

4. a) La droite passe par le point $(5; 3)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (2; 5)$. Par conséquent, un point $P(x; y)$ est sur la droite si et seulement si le vecteur $\vec{QP} = (x - 5; y - 3)$ est parallèle au vecteur $\vec{D} = (2; 5)$. C'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire t tel que $\vec{QP} = t\vec{D}$. Ce qui donne :

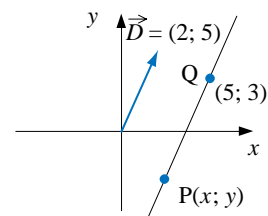
$$(x - 5; y - 3) = t(2; 5).$$

D'où $x - 5 = 2t$ et $y - 3 = 5t$. En isolant x et y , on obtient alors les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

On obtient l'intersection avec l'axe des x en posant $y = 0$ dans l'équation $y = 3 + 5t$, ce qui donne $t = -3/5$. En substituant cette valeur dans l'équation $x = 5 + 2t$, on trouve $x = 19/5$. Le point d'intersection avec l'axe horizontal est donc $(19/5; 0)$.

On obtient l'intersection avec l'axe des y en posant $x = 0$ dans l'équation $x = 5 + 2t$, ce qui donne $t = -5/2$. En substituant cette valeur dans l'équation $y = 3 + 5t$, on trouve $y = -19/2$. Le point d'intersection avec l'axe vertical est donc $(0; -19/2)$.



- b) La droite passe par le point $(4; -3)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (-3; 6)$.

Par conséquent, un point $P(x; y)$ est sur la droite si et seulement si le vecteur $\vec{QP} = (x - 4; y + 3)$ est parallèle au vecteur $\vec{D} = (-3; 6)$. C'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire t tel que $\vec{QP} = t\vec{D}$. Ce qui donne :

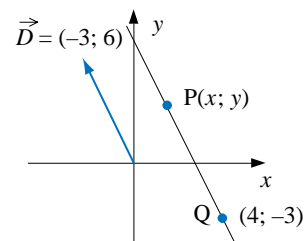
$$(x - 4; y + 3) = t(-3; 6).$$

D'où $x - 4 = -3t$ et $y + 3 = 6t$. En isolant x et y , on obtient alors les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -3 + 6t \end{cases}$$

On obtient l'intersection avec l'axe des x en posant $y = 0$ dans l'équation $y = -3 + 6t$, ce qui donne $t = 1/2$. En substituant cette valeur dans l'équation $x = 4 - 3t$, on trouve $x = 5/2$. Le point d'intersection avec l'axe horizontal est donc $(5/2; 0)$.

On obtient l'intersection avec l'axe des y en posant $x = 0$ dans l'équation $x = 4 - 3t$, ce qui donne $t = 4/3$. En substituant cette valeur dans l'équation $y = -3 + 6t$, on trouve $y = 5$. Le point d'intersection avec l'axe vertical est donc $(0; 5)$.



- c) La droite passe par le point $(-5; -3)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (2; -5)$.

Par conséquent, un point $P(x; y)$ est sur la droite si et seulement si le vecteur $\vec{QP} = (x + 5; y + 3)$ est parallèle au vecteur $\vec{D} = (2; -5)$. C'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire t tel que $\vec{QP} = t\vec{D}$. Ce qui donne :

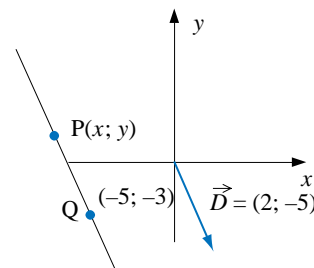
$$(x + 5; y + 3) = t(2; -5).$$

D'où $x + 5 = 2t$ et $y + 3 = -5t$. En isolant x et y , on obtient alors les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = -3 - 5t \end{cases}$$

On obtient l'intersection avec l'axe des x en posant $y = 0$ dans l'équation $y = -3 - 5t$, ce qui donne $t = -3/5$. En substituant cette valeur dans l'équation $x = -5 + 2t$, on trouve $x = -31/5$. Le point d'intersection avec l'axe horizontal est donc $(-31/5; 0)$.

On obtient l'intersection avec l'axe des y en posant $x = 0$ dans l'équation $x = -5 + 2t$, ce qui donne $t = 5/2$. En substituant cette valeur dans l'équation $y = -3 - 5t$, on trouve $y = -31/2$. Le point d'intersection avec l'axe vertical est donc $(0; -31/2)$.



- d) La droite passe par le point $(4; 2)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (-2; -3)$. Par conséquent, un point $P(x; y)$ est sur la droite si et seulement si le vecteur $\vec{QP} = (x - 4; y - 2)$ est parallèle au vecteur $\vec{D} = (-2; -3)$. C'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire t tel que $\vec{QP} = t\vec{D}$. Ce qui donne :

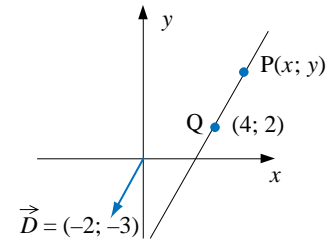
$$(x - 4; y - 2) = t(-2; -3)$$

D'où $x - 4 = -2t$ et $y - 2 = -3t$. En isolant x et y , on obtient alors les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

On obtient l'intersection avec l'axe des x en posant $y = 0$ dans l'équation $y = 2 - 3t$, ce qui donne $t = 2/3$. En substituant cette valeur dans l'équation $x = 4 - 2t$, on trouve $x = 8/3$. Le point d'intersection avec l'axe horizontal est donc $(8/3; 0)$.

On obtient l'intersection avec l'axe des y en posant $x = 0$ dans l'équation $x = 4 - 2t$, ce qui donne $t = 2$. En substituant cette valeur dans l'équation $y = 2 - 3t$, on trouve $y = -4$. Le point d'intersection avec l'axe vertical est donc $(0; -4)$.



5. a) L'équation cartésienne nous permet de trouver directement un vecteur normal, dans ce cas on trouve $\vec{N} = (5; -2)$. Un vecteur directeur de la droite sera perpendiculaire à ce vecteur normal. On cherche donc un vecteur $\vec{D} = (a; b)$ tel que $\vec{N} \cdot \vec{D} = 0$. On doit avoir $(5; -2) \cdot (a; b) = 0$. Ce qui donne :

$$5a - 2b = 0$$

Il y a une infinité de solutions qui sont décrites par :

$$\{(a; b) \mid a = 2t/5 \text{ et } b = t\}$$

En posant, par exemple, $t = 5$, on a le vecteur $\vec{D}_1 = (2; 5)$. En posant $t = -10$, on a $\vec{D}_2 = (-4; -10)$.

- b) Les coefficients du paramètre donnent un vecteur directeur de la droite. On a donc $\vec{D}_1 = (-5; 3)$. En multipliant ce vecteur par un scalaire quelconque, on obtient un autre vecteur directeur. Ainsi, en multipliant par le scalaire -2 , on obtient $\vec{D}_2 = (10; -6)$ qui est également un vecteur directeur.
- c) L'équation vectorielle donne un vecteur directeur de la droite. On a donc $\vec{D}_1 = (-2; 4)$. En multipliant ce vecteur par un scalaire quelconque, on obtient un autre vecteur directeur. Ainsi, en multipliant par le scalaire -2 , on obtient $\vec{D}_2 = (4; -8)$ qui est également un vecteur directeur.
- d) Les dénominateurs de l'équation symétrique donnent un vecteur directeur de la droite. On a donc $\vec{D}_1 = (-2; 5)$. En multipliant ce vecteur par un scalaire quelconque, on obtient un autre vecteur directeur. Ainsi, en multipliant par le scalaire 3 , on obtient $\vec{D}_2 = (-6; 15)$ qui est également un vecteur directeur.
- e) L'équation cartésienne nous permet de trouver directement un vecteur normal. Dans ce cas, l'équation est $2x + 3y - 12 = 0$ et on trouve $\vec{N} = (2; 3)$. Un vecteur directeur de la droite sera perpendiculaire à ce vecteur normal. On cherche donc un vecteur $\vec{D} = (a; b)$ tel que $\vec{N} \cdot \vec{D} = 0$. Cela donne :

$$(2; 3) \cdot (a; b) = 0$$

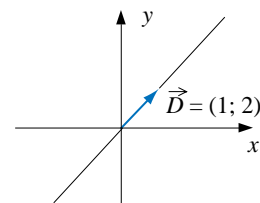
On a donc $2a + 3b = 0$. Il y a donc une infinité de solutions qui sont décrites par :

$$\{(a; b) \mid a = -3t/2 \text{ et } b = t\}$$

En posant, par exemple, $t = 2$, on obtient le vecteur $\vec{D}_1 = (-3; 2)$. En posant $t = -1$, on a $\vec{D}_2 = (3/2; -1)$.

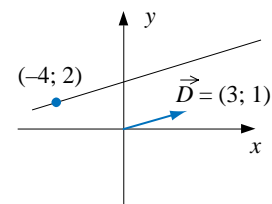
f) Les dénominateurs de l'équation symétrique donnent un vecteur directeur de la droite. Il faut cependant écrire l'équation $\frac{-x+4}{3} = \frac{6+2y}{5}$ sous forme standard. On a donc $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+3}{5/2}$, ce qui donne $\vec{D}_1 = (-3; 5/2)$. En multipliant ce vecteur par un scalaire quelconque, on obtient un autre vecteur directeur. Ainsi, en multipliant par le scalaire 2, on obtient $\vec{D}_2 = (-6; 5)$ qui est également un vecteur directeur.

6. a) Les équations sont $x = t$ et $y = 2t$. Les constantes donnent un point de la droite et les coefficients du paramètre donnent un vecteur directeur de la droite. La droite passe donc par l'origine $(0; 0)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (1; 2)$. C'est donc la droite support du vecteur.



Dans ce cas, la droite passe par $(0; 0)$ et c'est en ce point qu'elle coupe les deux axes.

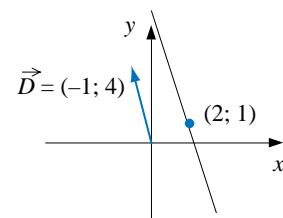
b) Les équations sont $x = -4 + 3t$ et $y = 2 + t$. Les constantes donnent un point de la droite et les coefficients du paramètre donnent un vecteur directeur de la droite. La droite passe donc par le point $(-4; 2)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (3; 1)$.



On obtient l'intersection avec l'axe des x en posant $y = 0$ dans l'équation $y = 2 + t$, ce qui donne $t = -2$. En substituant cette valeur dans l'équation $x = -4 + 3t$, on trouve $x = -10$. Le point d'intersection avec l'axe horizontal est donc $(-10; 0)$.

On obtient l'intersection avec l'axe des y en posant $x = 0$ dans l'équation $x = -4 + 3t$, ce qui donne $t = 4/3$. En substituant cette valeur dans l'équation $y = 2 + t$, on trouve $y = 10/3$. Le point d'intersection avec l'axe vertical est donc $(0; 10/3)$.

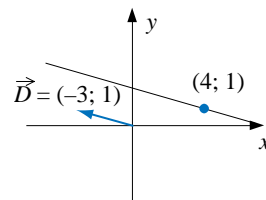
c) Les équations sont $x = 2 - t$ et $y = 1 + 4t$. Les constantes donnent un point de la droite et les coefficients du paramètre donnent un vecteur directeur de la droite. La droite passe donc par le point $(2; 1)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (-1; 4)$.



On obtient l'intersection avec l'axe des x en posant $y = 0$ dans l'équation $y = 1 + 4t$, ce qui donne $t = -1/4$. En substituant cette valeur dans l'équation $x = 2 - t$, on trouve $x = 9/4$. Le point d'intersection avec l'axe horizontal est donc $(9/4; 0)$.

On obtient l'intersection avec l'axe des y en posant $x = 0$ dans l'équation $x = 2 - t$, ce qui donne $t = 2$. En substituant cette valeur dans l'équation $y = 1 + 4t$, on trouve $y = 9$. Le point d'intersection avec l'axe vertical est donc $(0; 9)$.

d) Les équations sont $x = 4 - 3t$ et $y = 1 + t$. Les constantes donnent un point de la droite et les coefficients du paramètre donnent un vecteur directeur de la droite. La droite passe donc par le point $(4; 1)$ et est parallèle au vecteur $\vec{D} = (-3; 1)$.



On obtient l'intersection avec l'axe des x en posant $y = 0$ dans l'équation $y = 1 + t$, ce qui donne $t = -1$. En substituant cette valeur dans l'équation $x = 4 - 3t$, on trouve $x = 7$. Le point d'intersection avec l'axe horizontal est donc $(7; 0)$.

On obtient l'intersection avec l'axe des y en posant $x = 0$ dans l'équation $x = 4 - 3t$, ce qui donne $t = 4/3$. En substituant cette valeur dans l'équation $y = 1 + t$, on trouve $y = 7/3$. Le point d'intersection avec l'axe vertical est donc $(0; 7/3)$.

7. a) L'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Pour pouvoir utiliser le produit vectoriel, on ajoute une composante nulle aux vecteurs.

On trouve $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (4; -8; 0)$, d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(32+8) \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 40\vec{k}\end{aligned}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{40^2}}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ unités d'aire.}$$

Pour trouver la hauteur du triangle, il suffit de diviser l'aire du parallélogramme par la longueur de la base, soit le module du vecteur \overrightarrow{AB} qui est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,47 \text{ unités.}$$

La hauteur est :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{40 \text{ unités d'aire}}{2\sqrt{5} \text{ unités}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} \approx 8,94 \text{ unités.}$$

- b) L'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Pour pouvoir utiliser le produit vectoriel, on ajoute une composante nulle aux vecteurs.

On trouve $\overrightarrow{AB} = (-12; -3; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1; 10; 0)$, d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -12 & -3 & 0 \\ -1 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(-120-3) \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} - 123\vec{k}\end{aligned}$$

$$\text{L'aire du triangle est : } A_{\Delta} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = 61,5 \text{ unités d'aire.}$$

La longueur de la base est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-12)^2 + (-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{153} \approx 12,37 \text{ unités.}$$

En divisant l'aire du parallélogramme par la longueur de la base, on obtient la hauteur, soit :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{123 \text{ unités d'aire}}{\sqrt{153} \text{ unités}} \approx 9,94 \text{ unités.}$$

8. a) Le vecteur algébrique équipollent à $\overrightarrow{P_1P_2}$ est un vecteur directeur de la droite. On trouve $\vec{D} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-3; -7)$. Il faut donc établir des équations paramétriques de la droite passant par le point $(5; 3)$ et parallèle au vecteur $\vec{D} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-3; -7)$.

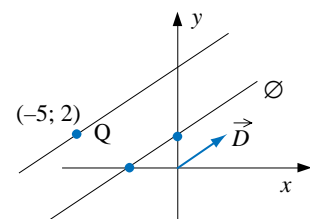
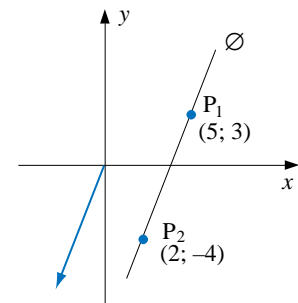
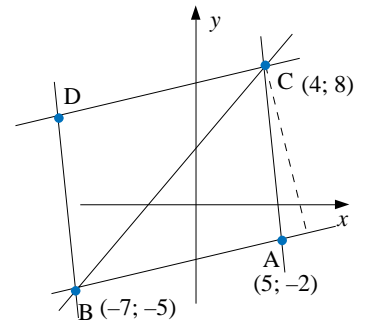
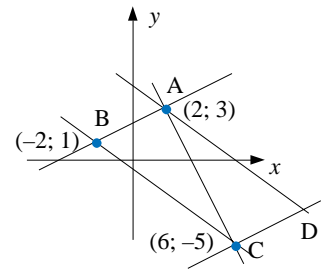
$$\text{On trouve : } \Delta: \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 3 - 7t \end{cases}$$

- b) On doit déterminer un vecteur directeur de la droite. Pour ce faire, on peut envisager différentes procédures.

On peut considérer le vecteur normal de la droite Δ , soit $\vec{N} = (2; -3)$ et déterminer un vecteur perpendiculaire à \vec{N} . On cherche donc un vecteur $\vec{D} = (a; b)$ tel que :

$$\vec{D} \cdot \vec{N} = (a; b) \cdot (2; -3) = 0, \text{ d'où } 2a - 3b = 0.$$

Le vecteur $\vec{D} = (3; 2)$ satisfait à cette condition.



On peut également trouver un vecteur directeur en déterminant deux points P_1 et P_2 de la droite Δ et déterminer le vecteur algébrique équipollent à $\overrightarrow{P_1P_2}$. En choisissant, par exemple, les points d'intersection de Δ avec les axes, on a $P_1(-3; 0)$ et $P_2(0; 2)$.

On trouve alors : $\vec{D} = \overrightarrow{P_1P_2} = (3; 2)$.

Une autre façon de procéder est de décrire la droite Δ par des équations paramétriques. Ainsi, en posant $y = t$, et en substituant, on a $x = -3 + 3t/2$. On peut donc décrire la droite Δ par les équations paramétriques suivantes :

$$\Delta: \begin{cases} x = -3 + 3t/2 \\ y = t \end{cases}$$

Le vecteur directeur de Δ est $(3/2; 1)$. On peut pour simplifier l'écriture prendre un vecteur parallèle en multipliant par un scalaire. Ainsi, en multipliant par 2, on obtient le vecteur $\vec{D} = (3; 2)$.

Quelle que soit la procédure choisie et le vecteur retenu, on peut obtenir une description équivalente à :

$$\Delta: \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

c) La droite cherchée est perpendiculaire à la droite

$\Delta : 2x - 3y + 6 = 0$. Par conséquent, le vecteur normal de Δ est un vecteur directeur de la droite cherchée.

Le vecteur $\vec{N} = (2; -3)$ est normal à la droite Δ . Par conséquent, on doit décrire par des équations paramétriques la droite passant par le point $(6; -4)$ et de vecteur directeur $\vec{D} = (2; -3)$. On trouve :

$$\Delta: \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -4 - 3t \end{cases}$$

d) Dans ce cas, le vecteur directeur de l'une des droites est également un vecteur directeur de l'autre droite. Ainsi, le vecteur $\vec{D} = (-1; 2)$ est un vecteur directeur des deux droites et on peut décrire la droite cherchée par les équations :

$$\Delta: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$$

e) Le vecteur $\vec{D}_1 = (-4; 3)$ est un vecteur directeur de la droite Δ . Le vecteur $\vec{D}_2 = (3; -4)$ est perpendiculaire à \vec{D}_1 . C'est donc un vecteur directeur de la droite cherchée et on a :

$$\Delta: \begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$$

f) On doit déterminer le point de rencontre des deux droites,

$$\Delta_1 : 3x - 5y = -58$$

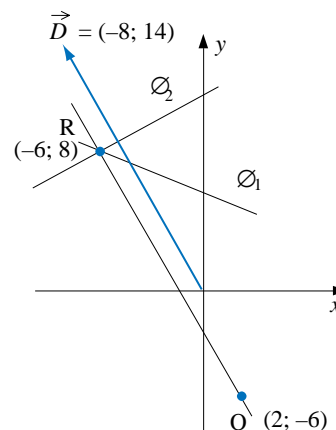
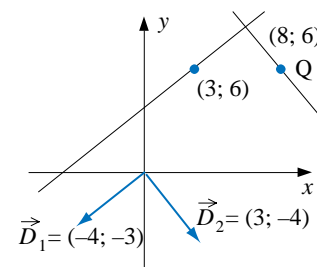
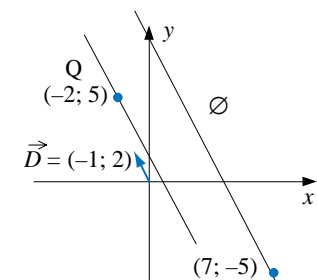
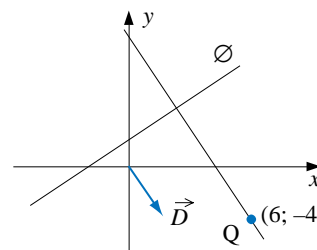
$$\Delta_2 : 2x + 6y = 36$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -58 \\ 2 & 6 & 36 \end{array} \right) &\approx L_1 \quad 3L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -58 \\ 0 & 28 & 224 \end{array} \right) \approx L_1/28 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -58 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \\ &\approx L_1 + 5L_2 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \approx L_1/3 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Le point de rencontre est $R(-6; 8)$. On cherche donc l'équation de la droite passant par les points $Q(2; -6)$ et $R(-6; 8)$.

Le vecteur algébrique équipollent à \overrightarrow{QR} est un vecteur directeur de la droite.



On trouve $\vec{D} = \vec{QR} = (-8; 14)$. Il faut donc établir des équations paramétriques de la droite passant par le point $Q(2; -6)$ et parallèle à $\vec{D} = \vec{QR} = (-8; 14)$. On trouve :

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 - 8t \\ y = -6 + 14t \end{cases}$$

g) Le vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{D} = (-3; 7)$. C'est également un vecteur directeur de la droite cherchée puisqu'elles sont parallèles. On a donc :

$$\Delta: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = -5 + 7t \end{cases}$$

h) La droite Δ est décrite par : $\frac{x+2}{5} = \frac{y-4}{-3}$

En effectuant le produit des extrêmes et le produit des moyens, on obtient :

$$-3x - 6 = 5y - 20$$

$$-3x - 5y = -14$$

$$3x + 5y = 14$$

Le vecteur $\vec{N} = (3; 5)$ est normal à la droite Δ . Il est donc un vecteur directeur de la droite cherchée et on trouve :

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 + 5t \end{cases}$$

9. a) Les vecteurs normaux sont $\vec{N}_1 = (3; -5)$ et $\vec{N}_2 = (2; 6)$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants puisque :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 10 = 28 \neq 0$$

Par conséquent, les droites sont concourantes. En résolvant le système d'équations, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 35 \\ 2 & 6 & -14 \end{array} \right) &\approx_{3L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 35 \\ 0 & 28 & -112 \end{array} \right) \approx_{L_2/28} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 35 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \\ &\approx_{L_1 + 5L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \approx_{L_1/3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Les droites sont concourantes au point $(5; -4)$.

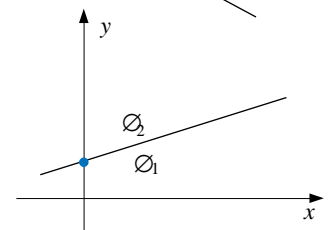
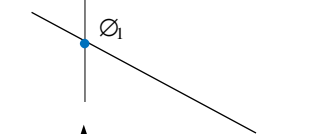
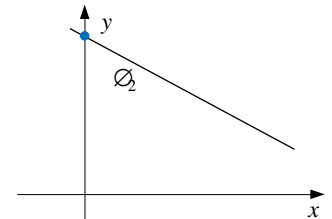
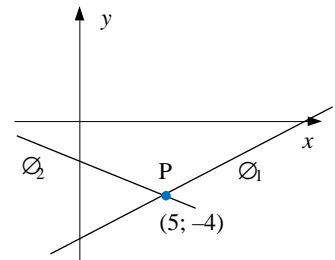
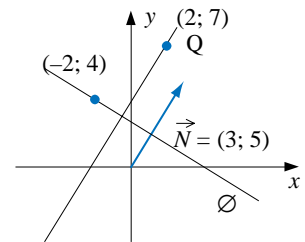
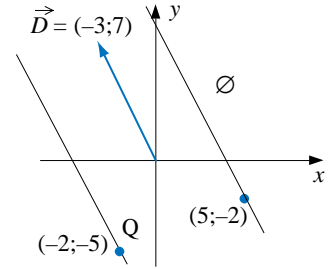
b) Les vecteurs normaux sont $\vec{N}_1 = (2; 4)$ et $\vec{N}_2 = (1; 2)$. Ces vecteurs sont linéairement dépendants puisque :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Par conséquent, les droites sont parallèles. Déterminons si elles sont confondues ou distinctes. En posant $x = 0$ dans l'équation de la droite Δ_1 , on obtient $y = -6$. Cependant, en posant $x = 0$ dans l'équation de Δ_2 , on obtient $y = 9$. Par conséquent, les droites n'ont pas la même ordonnée à l'origine, elles sont donc distinctes.

c) Les vecteurs normaux sont $\vec{N}_1 = (2; -6)$ et $\vec{N}_2 = (-1; 3)$. Ces vecteurs sont linéairement dépendants puisque

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$



Par conséquent, les droites sont parallèles. Déterminons si elles sont confondues ou distinctes. En posant $x = 0$ dans l'équation de la droite Δ_1 , on obtient $y = 2$. Aussi, en posant $x = 0$ dans l'équation de Δ_2 , on obtient $y = 2$. Par conséquent les droites ont la même ordonnée à l'origine, elles sont donc confondues.

- d) Le vecteur $\vec{N}_1 = (4; -1)$ est normal à Δ_1 et $\vec{D}_2 = (-5; 3)$ est un vecteur directeur de Δ_2 . Le produit scalaire donne :

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{D}_2 = (4; -1) \cdot (-5; 3) = -20 - 3 = -23 \neq 0$$

Par conséquent, les vecteurs ne sont pas perpendiculaires, ce qui signifie que les droites sont concourantes. Pour trouver les coordonnées du point de rencontre, on peut substituer les équations paramétriques de Δ_2 dans l'équation de Δ_1 , ce qui donne :

$$4(2 - 5t) - (6 + 3t) - 48 = 0$$

$$8 - 20t - 6 - 3t - 48 = 0$$

$$-23t = 46 \text{ et } t = -46/23 = -2$$

Les coordonnées du point de rencontre sont alors obtenues en posant $t = -2$ dans les équations paramétriques de Δ_2 , ce qui donne $x = 12$ et $y = 0$. Les droites sont donc concourantes au point $(12; 0)$.

- e) Le vecteur $\vec{N}_1 = (5; -2)$ est normal à Δ_1 et $\vec{D}_2 = (2; 5)$ est un vecteur directeur de Δ_2 . Le produit scalaire donne :

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{D}_2 = (5; -2) \cdot (2; 5) = 10 - 10 = 0$$

Par conséquent, les vecteurs sont perpendiculaires, ce qui signifie que les droites sont parallèles. Déterminons si elles sont confondues ou distinctes. Le point $(-3; 4)$ est sur la droite Δ_2 . En substituant ces coordonnées dans l'équation de Δ_1 , on obtient :

$5 \times (-3) - 2 \times (4) - 11 = -34 \neq 0$. Par conséquent, les coordonnées du point $(-3; 4)$ ne satisfont pas à l'équation de la droite Δ_1 . Les droites sont donc parallèles et distinctes.

- f) Le vecteur $\vec{N}_1 = (3; 5)$ est normal à Δ_1 et $\vec{D}_2 = (-2; 5)$ est un vecteur directeur de Δ_2 . Le produit scalaire donne :

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{D}_2 = (3; 5) \cdot (-2; 5) = -6 + 25 = 19 \neq 0.$$

Par conséquent, les vecteurs ne sont pas perpendiculaires ce qui signifie que les droites sont concourantes. En déterminant les équations paramétriques de Δ_2 , on a :

$$\Delta: \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = -4t + 5 \end{cases}$$

En substituant ces coordonnées dans l'équation de Δ_1 , on obtient :

$$3(-3 - 2t) + 5(-4 + 5t) + 10 = 0$$

$$-9 - 6t - 20 + 25t + 10 = 0$$

$$19t = 19 \text{ et } t = 1.$$

Les coordonnées du point de rencontre sont alors obtenues en posant $t = 1$ dans les équations paramétriques de Δ_2 , ce qui donne $x = -5$ et $y = 1$. Les droites sont donc concourantes au point $(-5; 1)$.

- g) Le vecteur $\vec{N}_1 = (3; -2)$ est normal à Δ_1 et $\vec{D}_2 = (2; -3)$ est un vecteur directeur de Δ_2 . Le produit scalaire donne :

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{D}_2 = (3; -2) \cdot (2; -3) = 6 + 6 = 12 \neq 0$$

Par conséquent, les vecteurs ne sont pas perpendiculaires, ce qui signifie que les droites sont concourantes.

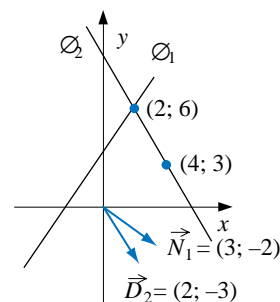
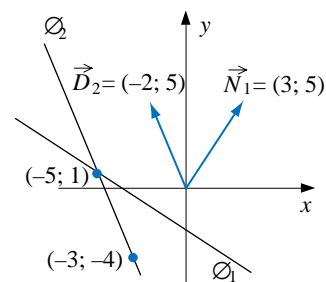
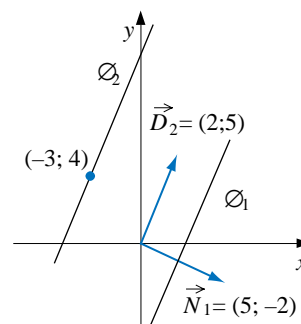
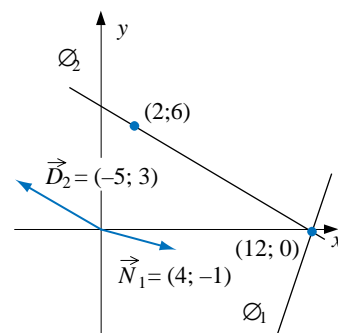
En substituant les équations paramétriques de Δ_2 , dans l'équation de Δ_1 , on obtient :

$$3(4 + 2t) - 2(3 - 3t) + 6 = 0$$

$$12 + 6t - 6 + 6t + 6 = 0$$

$$12t = -12 \text{ et } t = -1.$$

Les coordonnées du point de rencontre sont alors obtenues en posant $t = -1$ dans les équations paramétriques de Δ_2 , ce qui donne $x = 2$ et $y = 6$. Les droites sont donc concourantes au point $(2; 6)$.



h) Le vecteur $\vec{D}_1 = (7; -4)$ est un vecteur directeur de Δ_1 et $\vec{D}_2 = (3; 7)$ est un vecteur directeur de Δ_2 .

Puisque $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 49 + 12 = 61 \neq 0$ les vecteurs ne sont pas parallèles. Les droites sont donc concourantes.

Les droites se rencontrent lorsque les variables sont égales, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = -2 + 7t = 2 + 6u \\ y = 7 - 4t = -4 + 14u \end{cases} \cdot \text{On a donc : } \begin{cases} 7t - 6u = 4 \\ 4t + 14u = 11 \end{cases}$$

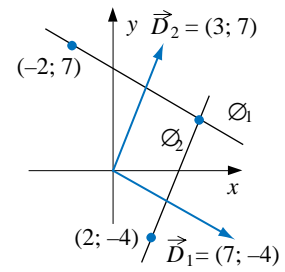
En résolvant par Cramer, on trouve :

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 11 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{122}{122} = 1 \quad \text{et} \quad t = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{61}{122} = \frac{1}{2}$$

En posant $t = 1$ dans les équations paramétriques de Δ_1 , on obtient $x = 5$ et $y = 3$.

En posant $u = 1/2$ dans les équations paramétriques de Δ_2 , on obtient également $x = 5$ et $y = 3$.

Les droites se rencontrent donc au point (5; 3) puisque celui-ci est sur les deux droites concourantes.



10. a) Le point de rencontre des droites Δ_1 et Δ_2 est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 21 & -9 \\ 18 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{246}{41} = 6 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 21 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{123}{41} = 3$$

Le sommet est A(6; 3).

Le point de rencontre des droites Δ_1 et Δ_3 est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 21 & -9 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-123}{41} = -3 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 21 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-205}{41} = -5$$

Le sommet est B(-3; -5).

Le point de rencontre des droites Δ_2 et Δ_3 est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-82}{-41} = 2 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-164}{-41} = 4$$

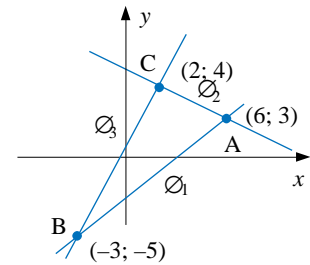
Le sommet est C(2; 4).

L'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} . Pour pouvoir utiliser le produit vectoriel, on ajoute une composante nulle aux vecteurs.

On trouve $\vec{AB} = (-9; -8; 0)$ et $\vec{AC} = (-4; 1; 0)$, d'où :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & -8 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-9 - 32) = -41\vec{k} \quad \text{et}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = 20,5 \quad \text{unités d'aire.}$$



b) Le point de rencontre des droites Δ_1 et Δ_2 est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -57 & -13 \\ 63 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -13 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{1104}{138} = 8 \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -57 \\ 11 & 63 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -13 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{690}{138} = 5$$

Le sommet est A(8; 5).

Le point de rencontre des droites Δ_1 et Δ_3 est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -57 & -13 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -13 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-345}{69} = -5 \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -57 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -13 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{276}{69} = 4$$

Le sommet est B(-5; 4).

Le point de rencontre des droites Δ_2 et Δ_3 est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 63 & -5 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{207}{69} = 3 \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 63 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-414}{69} = -6$$

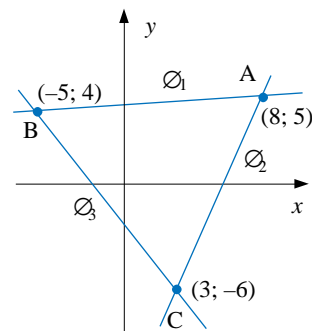
Le sommet est C(3; -6).

L'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Pour pouvoir utiliser le produit vectoriel, on ajoute une composante nulle aux vecteurs.

On trouve $\overrightarrow{AB} = (-13; -1; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-5; -11; 0)$, d'où :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -13 & -1 & 0 \\ -5 & -11 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(143 - 5) = 138\vec{k} \text{ et}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = 69 \text{ unités d'aire.}$$



11. L'équation du côté passant par les sommets A(-5; -2) et B(3; 7) est :

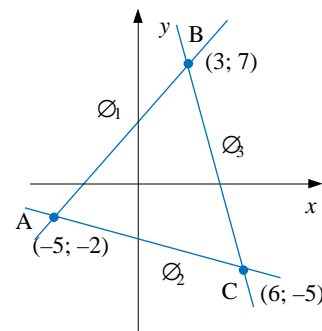
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Cela donne } \Delta_1: -9x + 8y - 29 = 0.$$

L'équation du côté passant par A(-5; -2) et C(6; -5) est :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Cela donne } \Delta_2: 3x + 11y + 37 = 0.$$

L'équation du côté passant par les sommets B(3; 7) et C(6; -5) est :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Cela donne } \Delta_3: 12x + 3y - 57 = 0.$$



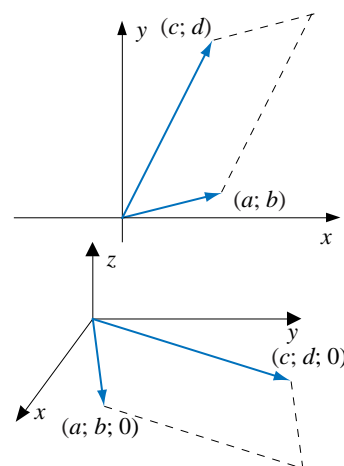
12. a) Les vecteurs sont $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (c; d)$. Pour pouvoir utiliser le produit vectoriel, on ajoute une composante nulle aux vecteurs. On a alors :

$\vec{u} = (a; b; 0)$ et $\vec{v} = (c; d; 0)$, d'où :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}(ad - cb)$$

L'aire du parallélogramme est alors :

$$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = |ad - cb| \text{ unités d'aire.}$$



b) L'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme :

$$A_{\Delta} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2} = \frac{|ad - cb|}{2} \text{ unités d'aire.}$$

c) Déterminons le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ défini par les sommets $A(-5; -2)$ et $B(3; 7)$.

On a donc $\vec{u} = (8; 9)$.

Déterminons le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ défini par les sommets $B(3; 7)$ et $C(6; -5)$.

On a donc $\vec{v} = (3; -12)$.

L'aire du triangle est alors :

$$A_{\Delta} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} \right|}{2} = \frac{123}{2} = 61,5 \text{ unités d'aire.}$$

d) Pour trouver la hauteur abaissée sur un côté, il suffit de diviser l'aire par la demi-longueur du vecteur équipollent à ce côté. Ce qui donne :

$$\text{Hauteur abaissée sur AB : } h_{AB} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{8^2 + 9^2}} = \frac{123}{\sqrt{145}} \approx 10,21 \text{ unités.}$$

$$\text{Hauteur abaissée sur BC : } h_{BC} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{3^2 + (-12)^2}} = \frac{123}{\sqrt{153}} \approx 9,94 \text{ unités.}$$

Hauteur abaissée sur AC : Le vecteur est $\overrightarrow{AC} = (11; -3)$. On a donc :

$$h_{AC} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{11^2 + (-3)^2}} = \frac{123}{\sqrt{130}} \approx 10,79 \text{ unités.}$$

e) La hauteur abaissée du sommet A passe par le point $A(-5; -2)$ et est perpendiculaire au côté BC. Le vecteur \overrightarrow{BC} est donc un vecteur normal de cette hauteur. Le produit scalaire donne alors :

$$(x + 5; y + 2) \cdot (3; -12) = 0, \text{ d'où,}$$

$$3x - 12y - 9 = 0, \text{ ou, en divisant par 3, } x - 4y - 3 = 0.$$

La hauteur abaissée du sommet B passe par le point $B(3; 7)$ et est perpendiculaire au côté AC. Le vecteur \overrightarrow{AC} est donc un vecteur normal de cette hauteur. Le produit scalaire donne alors :

$$(x - 3; y - 7) \cdot (11; -3) = 0, \text{ d'où } 11x - 3y - 12 = 0$$

La hauteur abaissée du sommet C passe par le point $C(6; -5)$ et est perpendiculaire au côté AB. Le vecteur \overrightarrow{AB} est donc un vecteur normal de cette hauteur. Le produit scalaire donne alors :

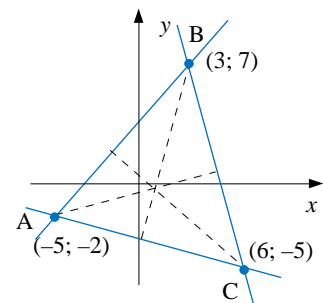
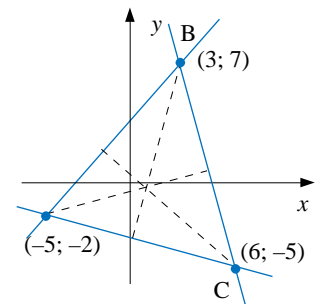
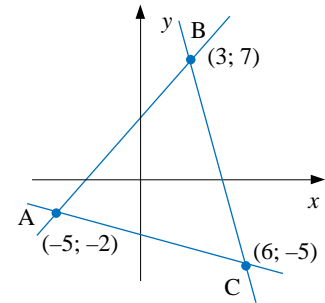
$$(x - 6; y + 5) \cdot (8; 9) = 0, \text{ d'où } 8x + 9y - 3 = 0.$$

Selon un théorème de géométrie plane, les trois hauteurs se rencontrent en un point appelé l'orthocentre du triangle. Le point de rencontre des hauteurs peut donc être obtenu en résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} x - 4y - 3 = 0 \\ 11x - 3y - 12 = 0 \\ 8x + 9y - 3 = 0 \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 3 \\ 11 & -3 & 12 \\ 8 & 9 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 11L_1 \\ L_3 - 8L_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 41 & -21 \\ 0 & 41 & -21 \end{array} \right) \approx \begin{array}{l} 41L_1 + 4L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 41 & 0 & 39 \\ 0 & 41 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \begin{array}{l} L_1/41 \\ \approx L_2/41 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 39/41 \\ 0 & 1 & -21/41 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$



Le point de rencontre est donc $(39/41; -21/41)$. On remarque que l'une des équations s'élimine dans le processus, ce qui est normal puisqu'il y a trois équations pour deux inconnues et qu'il existe une solution unique.

On peut également considérer deux des équations et résoudre par Cramer, puis vérifier que le point obtenu satisfait à l'équation de la troisième hauteur. En considérant le système d'équations :

$$\begin{cases} x - 4y - 3 = 0 \\ 11x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 12 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 11 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{39}{41} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 11 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-21}{41}$$

En substituant dans la troisième équation, on a :

$$8\left(\frac{39}{41}\right) + 9\left(\frac{-21}{41}\right) - 3 = \frac{312}{41} - \frac{189}{41} - \frac{123}{41} = 0.$$

Ce qui confirme que les trois droites se rencontrent en un même point.

13. a) Pour trouver la distance du point R à la droite Δ , on peut déterminer deux points A et B sur la droite Δ , puis calculer la hauteur du parallélogramme construit sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AR} .

L'équation de la droite est $2x + 3y - 5 = 0$. En posant $x = 1$ dans cette équation, on trouve $y = 1$. Le point A(1; 1) est donc sur la droite. En posant $x = -2$ dans l'équation de la droite, on trouve $y = 3$. Le point B(-2; 3) est donc également un point de la droite.

Pour pouvoir utiliser le produit vectoriel afin de calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AR} , on ajoute une composante nulle aux vecteurs.

On trouve $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AR} = (0; -6; 0)$, d'où :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 18\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est : $A = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\| = 18$ unités d'aire.

Le module du vecteur \overrightarrow{AB} est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13} \approx 3,6 \text{ unités.}$$

La distance du point R à la droite Δ est alors :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{18 \text{ unités d'aire}}{\sqrt{13} \text{ unités}} \approx 4,99 \text{ unités.}$$

On aurait pu choisir les points A(7; -3) et B(-2; 3) pour effectuer nos calculs.

Le résultat eut été le même. En effet, les vecteurs sont alors $\overrightarrow{AB} = (-9; 6; 0)$ et $\overrightarrow{AR} = (-6; -2; 0)$, d'où :

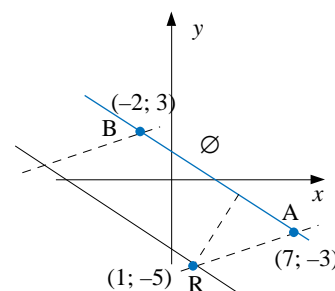
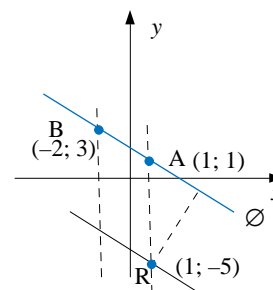
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 6 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 54\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est :

$A = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\| = 54$ unités d'aire.

Le module du vecteur \overrightarrow{AB} est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-9)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{117} \approx 10,82 \text{ unités.}$$



La distance du point R à la droite Δ est alors :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{54 \text{ unités d'aire}}{3\sqrt{13} \text{ unités}} = \frac{18 \text{ unités d'aire}}{\sqrt{13} \text{ unités}} \approx 4,99 \text{ unités.}$$

- b) On peut choisir les points $A(-2; -1)$ et $B(2; -4)$ pour effectuer nos calculs. On trouve $\overrightarrow{AB} = (4; -3; 0)$ et $\overrightarrow{AR} = (8; 4; 0)$, d'où :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est :

$$A = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\| = 40 \text{ unités d'aire.}$$

Le module du vecteur \overrightarrow{AB} est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ unités.}$$

La distance du point R à la droite Δ est alors :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{40 \text{ unités d'aire}}{5 \text{ unités}} = 8 \text{ unités.}$$

- c) En posant $t = 0$ dans les équations paramétriques, on obtient le point $A(5; -6)$. En posant $t = 2$, on obtient le point $B(1; 0)$. On trouve $\overrightarrow{AB} = (-4; 6; 0)$ et $\overrightarrow{AR} = (1; 4; 0)$, d'où :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -22\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est :

$$A = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\| = 22 \text{ unités d'aire.}$$

Le module du vecteur \overrightarrow{AB} est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 0^2} = 2\sqrt{13} \approx 7,21 \text{ unités.}$$

La distance du point R à la droite Δ est alors :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{22 \text{ unités d'aire}}{2\sqrt{13} \text{ unités}} \approx 3,05 \text{ unités.}$$

- d) En posant $t = 0$ dans les équations paramétriques, on obtient le point $A(5; 8)$. En posant $t = 2$, on obtient le point $B(11; 4)$. On trouve $\overrightarrow{AB} = (6; -4; 0)$ et $\overrightarrow{AR} = (-10; -6; 0)$, d'où :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & 0 \\ -10 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -76\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est :

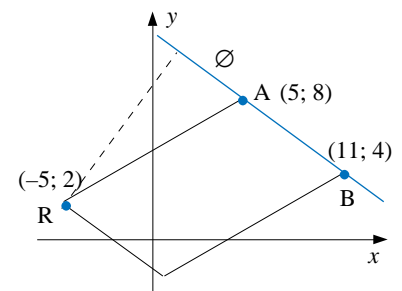
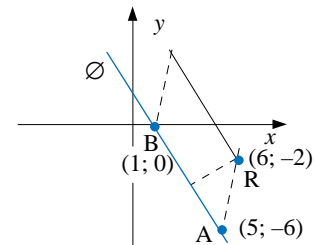
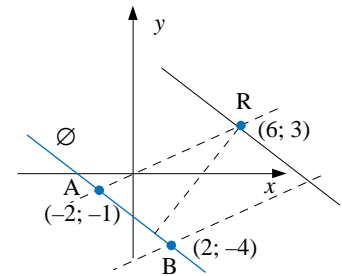
$$A = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\| = 76 \text{ unités d'aire.}$$

Le module du vecteur \overrightarrow{AB} est :

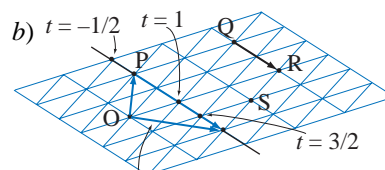
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 0^2} = 2\sqrt{13} \approx 7,21 \text{ unités.}$$

La distance du point R à la droite Δ est alors :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{76 \text{ unités d'aire}}{2\sqrt{13} \text{ unités}} \approx 10,54 \text{ unités.}$$

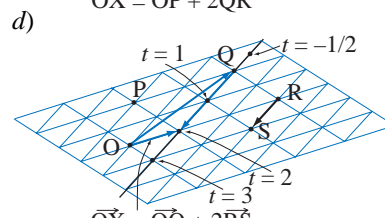


14. a) $\vec{OX} = \vec{OP} + t\vec{QR}$



$\vec{OX} = \vec{OP} + 2\vec{QR}$

c) $\vec{OX} = \vec{OQ} + t\vec{RS}$

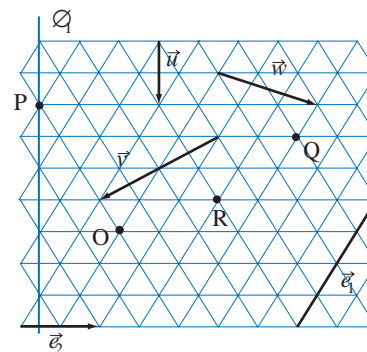


$\vec{OX} = \vec{OQ} + 2\vec{RS}$

15. a) $\vec{OP} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ et $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$

L'équation de la droite est alors :

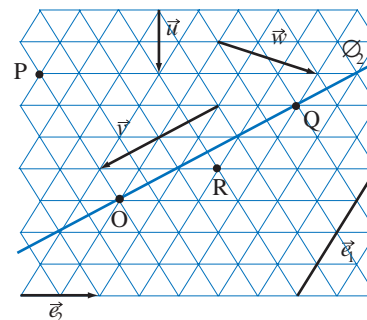
$$\begin{aligned} \Delta_1 : \vec{OX} &= \vec{OP} + t\vec{u} \\ &= (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2\right) \\ &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{e}_1 + \left(-2 + \frac{t}{2}\right)\vec{e}_2 \end{aligned}$$



b) $\vec{OQ} = \frac{3}{4}\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$ et $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

L'équation de la droite est alors :

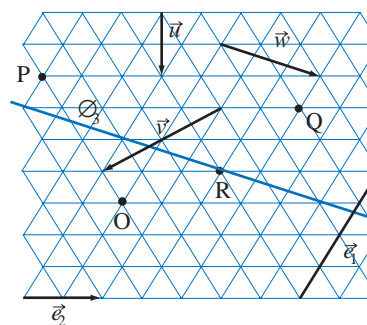
$$\begin{aligned} \Delta_2 : \vec{OX} &= \vec{OQ} + r\vec{v} \\ &= \left(\frac{3}{4}\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2\right) + r\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right) \\ &= \left(\frac{3}{4} - r\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2} - r\right)\vec{e}_2 \end{aligned}$$



c) $\vec{OR} = \frac{1}{4}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{w} = -\frac{1}{4}\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$

L'équation de la droite est alors :

$$\begin{aligned} \Delta_3 : \vec{OX} &= \vec{OR} + s\vec{w} \\ &= \left(\frac{1}{4}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + s\left(-\frac{1}{4}\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{s}{4}\right)\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{3s}{2}\right)\vec{e}_2 \end{aligned}$$



EXERCICES 10.4

1. a) Les vecteurs normaux sont $\vec{N}_1 = (2; 3)$ et $\vec{N}_2 = (3; -4)$. On a alors :

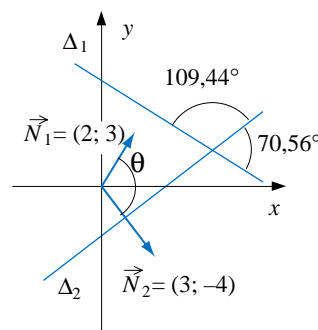
$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|} = \frac{6 - 12}{\sqrt{13} \sqrt{25}} = \frac{-6}{5\sqrt{13}}$$

D'où : $\theta = \arccos\left(\frac{-6}{5\sqrt{13}}\right) \approx 109,44^\circ$

Puisque $90^\circ < \theta < 180^\circ$, on a :

$\delta = 180^\circ - \theta = 180^\circ - 109,44^\circ = 70,56^\circ$.

L'angle entre les droites est donc de $70,56^\circ$.



b) Les vecteurs directeurs sont $\vec{D}_1 = (-2; 4)$ et $\vec{D}_2 = (5; -2)$. On a alors :

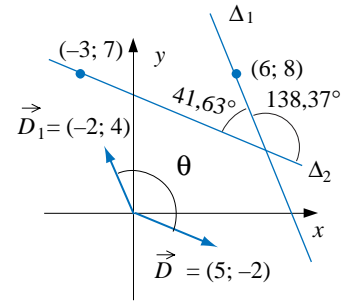
$$\cos \theta = \frac{\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2}{\|\vec{D}_1\| \|\vec{D}_2\|} = \frac{-10 - 8}{\sqrt{20} \sqrt{29}} = \frac{-18}{\sqrt{580}}$$

$$\text{D'où : } \theta = \arccos\left(\frac{-18}{\sqrt{580}}\right) \approx 138,37^\circ$$

Puisque $90^\circ < \theta < 180^\circ$, on a :

$$\delta = 180^\circ - \theta = 180^\circ - 138,37^\circ = 41,63^\circ.$$

L'angle entre les droites est donc de $41,63^\circ$.



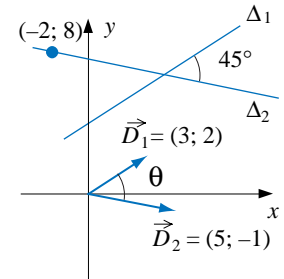
c) Le vecteur normal à Δ_1 est $\vec{N}_1 = (2; -3)$. On peut déterminer un vecteur perpendiculaire à \vec{N}_1 . Il suffit de déterminer un vecteur dont le produit scalaire avec \vec{N}_1 est nul. Le vecteur $\vec{D}_1 = (3; 2)$ est perpendiculaire à \vec{N}_1 . On a alors les vecteurs directeurs $\vec{D}_1 = (3; 2)$ et $\vec{D}_2 = (5; -1)$. On a alors :

$$\cos \theta = \frac{\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2}{\|\vec{D}_1\| \|\vec{D}_2\|} = \frac{15 - 2}{\sqrt{13} \sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{338}}$$

$$\text{D'où : } \theta = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{338}}\right) \approx 45^\circ$$

Puisque $0^\circ < \theta < 90^\circ$, on a $\delta = \theta = 45^\circ$.

L'angle entre les droites est donc de 45° .



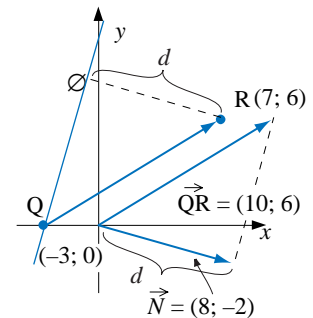
2. a) Le vecteur $\vec{N} = (8; -2)$ est normal à Δ . En posant $x = -3$ dans l'équation de la droite, on obtient $y = 0$. Le point $Q(-3; 0)$ est donc sur la droite Δ . On a alors :

$$\vec{QR} = (7; 6) - (-3; 0) = (10; 6)$$

La longueur de la projection de \vec{QR} sur le vecteur \vec{N} est alors la distance cherchée, soit :

$$d(R, \Delta) = \frac{|\vec{QR} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(10; 6) \cdot (8; -2)|}{\sqrt{8^2 + (-2)^2}} = \frac{68}{\sqrt{68}} = \sqrt{68}$$

La distance est d'environ 8,25 unités.



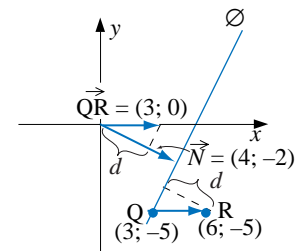
b) Le vecteur $\vec{D} = (-2; -4)$ est un vecteur directeur de la droite. Le vecteur $\vec{N} = (4; -2)$ est normal à la droite Δ . En posant $x = 3$ dans l'équation de la droite, on obtient $y = -5$. Le point $Q(3; -5)$ est donc sur la droite Δ . On a alors :

$$\vec{QP} = (6; -5) - (3; -5) = (3; 0).$$

La longueur de la projection de \vec{QP} sur le vecteur \vec{N} est alors la distance cherchée, soit :

$$d(R, \Delta) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(3; 0) \cdot (4; -2)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{20}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

La distance est d'environ 2,68 unités.



3. a) On peut procéder en calculant d'abord l'aire du parallélogramme construit sur un vecteur directeur des droites parallèles et un vecteur \vec{QP} , où Q est sur la droite Δ_1 et P est sur la droite Δ_2 . Pour obtenir la hauteur, on divise ensuite l'aire du parallélogramme par sa base, soit le module du vecteur directeur. Le

vecteur $\vec{D} = (-2; 4)$ est un vecteur directeur des droites.

Le point $Q(6; 8)$ est sur la droite Δ_1 et le point $P(-3; 7)$ est sur la droite Δ_2 . On a alors :

$$\vec{QP} = (-3; 7) - (6; 8) = (-9; -1).$$

L'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{D} et \vec{QP} est alors la

valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -9 & -1 \end{vmatrix}$. On a donc :

$$A_{\vec{QP}, \vec{D}} = \left| \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -9 & -1 \end{vmatrix} \right| = 38 \text{ unités d'aire.}$$

La hauteur du parallélogramme est alors :

$$h = \frac{38}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{38}{\sqrt{20}} = \frac{19}{\sqrt{5}} \approx 8,50 \text{ unités.}$$

On peut également procéder en déterminant un vecteur normal aux droites, soit un vecteur dont le produit scalaire avec le vecteur directeur donne 0. Le vecteur $\vec{N} = (4; 2)$ est normal aux droites et $\vec{QP} = (-9; -1)$.

La longueur de la projection de \vec{QP} sur le vecteur \vec{N} est alors la distance cherchée, soit :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(-9; -1) \cdot (4; 2)|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{38}{\sqrt{20}} = \frac{19}{\sqrt{5}} \approx 8,50 \text{ unités.}$$

- b) On peut procéder en calculant d'abord l'aire du parallélogramme construit sur un vecteur directeur des droites parallèles et un vecteur \vec{QP} , où Q est sur la droite Δ_1 et P est sur la droite Δ_2 . Pour obtenir la hauteur, on divise ensuite l'aire du parallélogramme par sa base, soit le module du vecteur directeur. Le vecteur $\vec{D} = (5; 2)$ est un vecteur directeur des droites.

Le point $Q(-7; -5)$ est sur la droite Δ_1 et le point $P(-4; 8)$ est sur la droite Δ_2 .

On a alors :

$$\vec{QP} = (-4; 8) - (-7; -5) = (3; 13)$$

L'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{D} et \vec{QP} est alors la

valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}$. On a donc :

$$A_{\vec{QP}, \vec{D}} = \left| \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} \right| = 59 \text{ unités d'aire.}$$

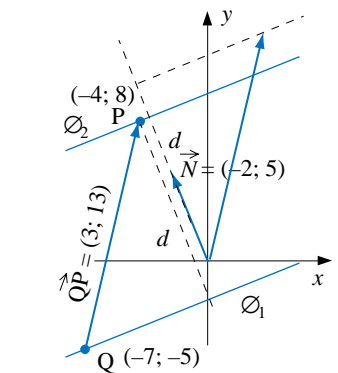
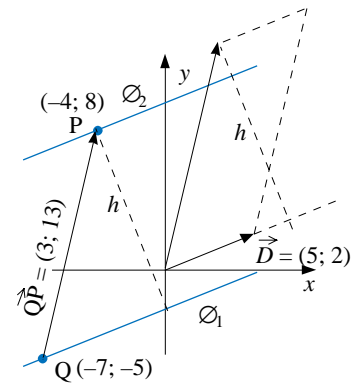
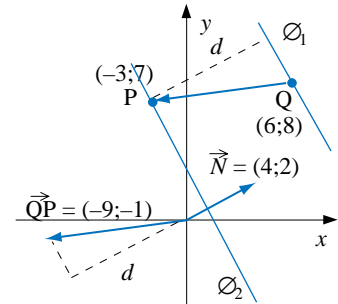
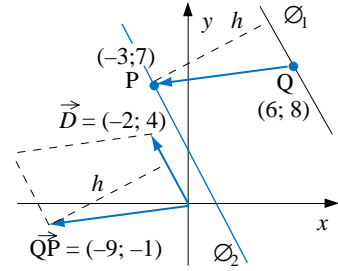
La hauteur du parallélogramme est donc :

$$h = \frac{59}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{59}{\sqrt{29}} \approx 10,96 \text{ unités.}$$

On peut également procéder en déterminant un vecteur normal aux droites, soit un vecteur dont le produit scalaire avec le vecteur directeur donne 0. Le vecteur $\vec{N} = (-2; 5)$ est normal aux droites et on considère le vecteur $\vec{QP} = (3; 13)$.

La longueur de la projection de \vec{QP} sur le vecteur \vec{N} est alors la distance cherchée, soit :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(3; 13) \cdot (-2; 5)|}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2}} = \frac{59}{\sqrt{29}} \approx 10,96 \text{ unités.}$$



- c) Le vecteur $\vec{N} = (2; 3)$ est normal aux deux droites. De plus le point $Q(0; 6)$ est sur la droite Δ_1 et le point $P(0; -8)$ est sur la droite Δ_2 . On a alors :

$$\vec{QP} = (0; -8) - (0; 6) = (0; -14).$$

La longueur de la projection de \vec{QP} sur le vecteur \vec{N} est alors la distance cherchée, soit :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(0; -14) \cdot (2; 3)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{42}{\sqrt{13}} \approx 11,65 \text{ unités.}$$

- d) Le vecteur $\vec{N} = (7; -2)$ est normal aux deux droites. De plus le point $Q(-2; 0)$ est sur la droite Δ_1 et le point $P(0; -5)$ est sur la droite Δ_2 . On a alors :

$$\vec{QP} = (0; -5) - (-2; 0) = (2; -5).$$

La longueur de la projection de \vec{QP} sur le vecteur \vec{N} est alors la distance cherchée, soit :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(2; -5) \cdot (7; -2)|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2}} = \frac{24}{\sqrt{53}} \approx 3,30 \text{ unités.}$$

4. a) L'équation des droites du faisceau s'écrit :

$$k(2x + y + 14) + r(3x - 4y - 9) = 0$$

$$\text{D'où : } (2k + 3r)x + (k - 4r)y + (14k - 9r) = 0.$$

- b) Pour trouver la droite du faisceau passant par le point $(3; -5)$, on substitue ces valeurs dans l'équation du faisceau, ce qui donne :

$$(2k + 3r) \times 3 + (k - 4r) \times (-5) + (14k - 9r) = 0$$

Ce qui, en distribuant, donne :

$$6k + 9r - 5k + 20r + 14k - 9r = 0. \text{ On a donc :}$$

$15k + 20r = 0$ et $3k = -4r$. Il y a une infinité de solutions, car la forme cartésienne de l'équation d'une droite n'est pas unique. On peut choisir $k = -4$ et $r = 3$. Ce qui donne l'équation :

$$x - 16y - 83 = 0.$$

- c) En isolant y dans l'équation du faisceau, on écrit l'équation sous la forme $y = mx + b$. Ce qui donne :

$$y = \frac{-(2k + 3r)}{k - 4r} x + \frac{-(14k - 9r)}{k - 4r}. \text{ On a donc } m = \frac{-(2k + 3r)}{k - 4r} \text{ et pour trouver}$$

la droite du faisceau dont la pente est $-1/3$, on pose $m = \frac{-(2k + 3r)}{k - 4r} = \frac{-1}{3}$. En

solutionnant, on trouve $5k = -13r$. En posant $k = 13$ et $r = -5$, on a :

$$11x + 33y + 227 = 0.$$

- d) On a $b = \frac{-(14k - 9r)}{k - 4r} = -2$ D'où $-14k + 9r = -2k + 8r$ et $12k = r$. En posant

$$k = 1 \text{ et } r = 12, \text{ on trouve } 38x - 47y - 94 = 0.$$

- e) La pente de la droite d'équation $2x - 5y - 13 = 0$ est $2/5$. On a donc

$$m = \frac{-(2k + 3r)}{k - 4r} = \frac{2}{5} \text{ d'où : } -10k - 15r = 2k - 8r \text{ et } -12k = 7r. \text{ En posant } k = 7$$

et $r = -12$, on trouve :

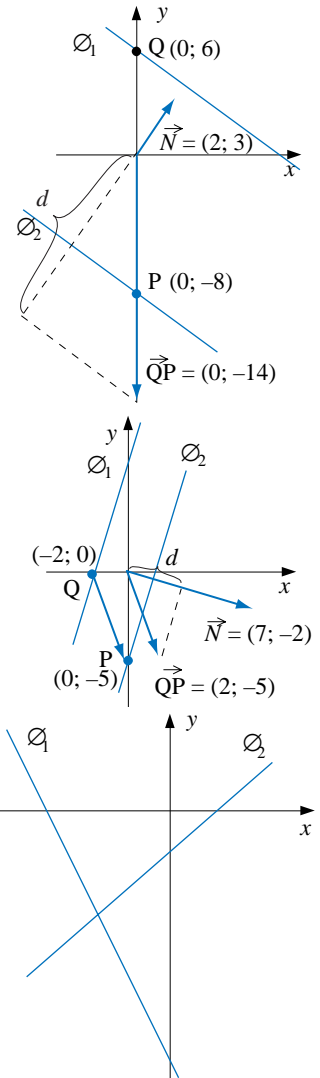
$$-22x + 55y + 206 = 0$$

- f) La pente de la droite d'équation $3x + 4y - 2 = 0$ est $-3/4$. La pente de la droite

perpendiculaire est $4/3$. On a donc $m = \frac{-(2k + 3r)}{k - 4r} = \frac{4}{3}$ d'où :

$-6k - 9r = 4k - 16r$ et $10k = 7r$. En posant $k = 7$ et $r = 10$, on trouve :

$$44x - 33y + 8 = 0$$



5. a) L'équation du faisceau est $y - 1 = m(x - 2)$, $x \neq 2$.
 b) En substituant les coordonnées du point (4; 9) dans l'équation du faisceau, on obtient $m = 4$. L'équation est donc

$$4x - y - 7 = 0$$

- c) La pente est $-3/5$, on a donc $y - 1 = \frac{-3}{5}(x - 2)$, d'où $3x + 5y - 11 = 0$.

- d) En isolant y dans l'équation du faisceau, on a :

$$y = mx - 2m + 1.$$

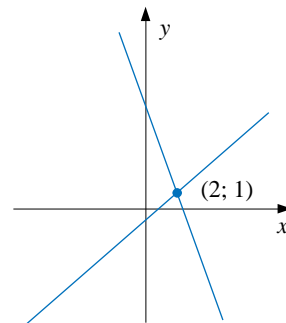
La droite dont l'ordonnée à l'origine est 5 doit satisfaire à l'équation $-2m + 1 = 5$, ce qui donne $m = -2$. La droite est donc :

$$2x + y - 5 = 0$$

- e) La pente de la droite d'équation $3x - 8y - 32 = 0$ est $3/8$. On a donc

$$y - 1 = \frac{3}{8}(x - 2) \text{ et l'équation est } 3x - 8y + 2 = 0.$$

- f) La pente de la droite d'équation $5x - 2y + 8 = 0$ est $5/2$. La pente de la droite perpendiculaire est $-2/5$. On a donc $y - 1 = \frac{-2}{5}(x - 2)$ et $2x + 5y - 9 = 0$.



6. a) Les médianes d'un triangle sont les droites joignant les sommets au milieu du côté opposé. Les coordonnées du point milieu d'un segment de droite sont

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, où $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ sont les coordonnées des extrémités du segment de droite.

Le milieu du côté AB est (0; 1). La médiane est la droite passant par les points (0; 1) et (4; 6). Son équation est $5x - 4y = -4$.

Le milieu du côté AC est (1; 5). La médiane est la droite passant par les points (1; 5) et (2; -2). Son équation est $7x + y = 12$.

Le milieu du côté BC est (3; 2). La médiane est la droite passant par les points (3; 2) et (-2; 4). Son équation est $2x + 5y = 16$.

Pour trouver le point de rencontre des médianes, il suffit de résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 5x - 4y = -4 \\ 7x + y = 12 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$$

Ce qui donne :

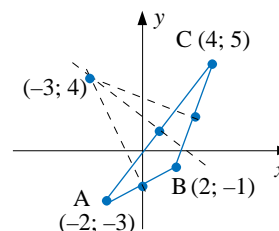
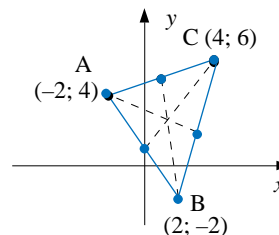
$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -4 \\ 7 & 1 & 12 \\ 2 & 5 & 16 \end{array}\right) & \begin{array}{l} L_1 \\ 5L_2 - 7L_1 \\ 5L_3 - 2L_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 33 & 88 \\ 0 & 33 & 88 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/11 \\ L_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 33 & 88 \end{array}\right) \\ & \begin{array}{l} 3L_1 + 4L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3 - 11L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/15 \\ L_2/3 \\ L_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Le point de rencontre des médianes est donc $(4/3; 8/3)$.

- b) Les médiatrices d'un triangle sont les droites perpendiculaires au milieu d'un côté. Les coordonnées du point milieu d'un segment de droite sont

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, où $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ sont les coordonnées des extrémités du segment de droite. La médiatrice étant perpendiculaire au côté, sa pente est $m_d = -1/m_c$, où m_d est la pente de la médiatrice et m_c est la pente du côté.

Le milieu du côté AB est (0; -2). La pente du côté AB est $1/2$ et la pente de la médiatrice est -2 . L'équation de la médiatrice est $2x + y = -2$.



Le milieu du côté AC est (1; 1). La pente du côté AC est $4/3$ et la pente de la médiatrice est $-3/4$. L'équation de la médiatrice est $3x + 4y = 7$.

Le milieu du côté BC est (3; 2). La pente du côté BC est 3 et la pente de la médiatrice est $-1/3$. L'équation de la médiatrice est $x + 3y = 9$.

Pour trouver le point de rencontre des médiatrices, on doit résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x + y = -2 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & \\ 2 & 1 & -2 & \\ 3 & 4 & 7 & \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & \\ 0 & -5 & -20 & \\ 0 & -5 & -20 & \end{array} \right) \\ & \begin{array}{l} 5L_1 + 3L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -15 & \\ 0 & -5 & -20 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1/5 \\ \approx L_2/(-5) \\ L_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & \\ 0 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Le point de rencontre des médiatrices est donc (-3; 4).

- c) Les hauteurs d'un triangle sont les droites abaissées d'un sommet perpendiculairement au côté opposé. La hauteur étant perpendiculaire au côté, sa pente est $m_h = -1/m_c$, où m_h est la pente de la hauteur et m_c est la pente du côté.

La pente du côté AB est $1/3$ et la pente de la hauteur est -3 . La hauteur passe par le sommet C(4; 6), son équation est $3x + y = 18$.

La pente du côté AC est $5/4$ et la pente de la hauteur est $-4/5$. La hauteur passe par le sommet B(2; -2), son équation est $4x + 5y = -2$.

La pente du côté BC est 4 et la pente de la hauteur est $-1/4$. La hauteur passe par le sommet A(-4; -4), son équation est $x + 4y = -20$.

Pour trouver le point de rencontre des hauteurs, on doit résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 4y = -20 \\ 4x + 5y = -2 \\ 3x + y = 18 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -20 & \\ 4 & 5 & -2 & \\ 3 & 1 & 18 & \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -20 & \\ 0 & -11 & 78 & \\ 0 & -11 & 78 & \end{array} \right) \\ & \begin{array}{l} 11L_1 + 4L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 92 & \\ 0 & -11 & 78 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1/11 \\ \approx L_2/(-11) \\ L_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 92/11 & \\ 0 & 1 & -78/11 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \end{aligned}$$

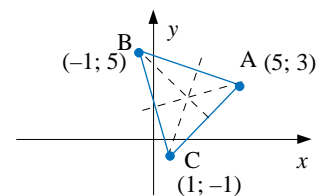
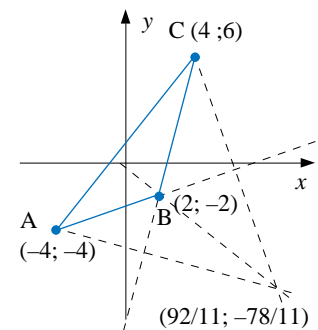
Le point de rencontre des hauteurs est donc (92/11; -78/11).

7. Pour trouver l'équation d'une hauteur, on doit déterminer le sommet du triangle. Il faut également déterminer la pente du côté opposé pour calculer la pente de la hauteur.

L'intersection des droites : $\begin{cases} x + 3y = 14 & \Delta_1 \\ x - y = 2 & \Delta_2 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-4} = 5 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Le sommet est donc (5; 3). Le côté opposé est défini par la droite d'équation $3x + y - 2 = 0$. Sa pente est -3 . La pente de la hauteur est donc $1/3$. L'équation de la hauteur est $x - 3y = -4$.



L'intersection des droites : $\begin{cases} x+3y=14 & \Delta_1 \\ 3x+y=2 & \Delta_3 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-8} = -1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-40}{-8} = 5$$

Le sommet est donc $(-1; 5)$. Le côté opposé est défini par la droite d'équation $x - y - 2 = 0$. Sa pente est 1. La pente de la hauteur est donc -1 . L'équation de la hauteur est $x + y = 4$.

L'intersection des droites : $\begin{cases} x-y=2 & \Delta_2 \\ 3x+y=2 & \Delta_3 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{4} = -1$$

Le sommet est donc $(1; -1)$. Le côté opposé est défini par la droite d'équation $x + 3y = 14$. Sa pente est $-1/3$. La pente de la hauteur est donc 3. L'équation de la hauteur est $3x - y = 4$.

Pour trouver le point de rencontre des hauteurs, on doit résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x-3y=-4 \\ x+y=4 \\ 3x-y=4 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ \approx L_2 - L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 4L_1 + 3L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1/4 \\ \approx L_2/4 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Le point de rencontre des hauteurs est donc $(2; 2)$.

8. a) Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de rencontre des médiatrices. Le rayon du cercle est la distance du centre à un des sommets du triangle.

Le milieu du côté AB est $(-1; 0)$. La pente du côté AB est $1/3$ et la pente de la médiatrice est -3 . L'équation de la médiatrice est $3x + y = -3$.

Le milieu du côté AC est $(2/3; 5)$. La pente du côté AC est -3 et la pente de la médiatrice est $1/3$. L'équation de la médiatrice est $3x - 9y = -43$.

Le milieu du côté BC est $(-7/3; 4)$. La pente du côté BC est 3 et la pente de la médiatrice est $-1/3$. L'équation de la médiatrice est $3x + 9y = 29$.

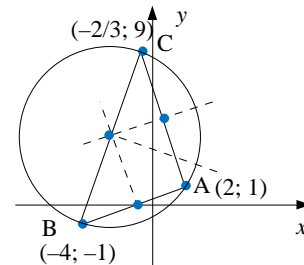
Le point de rencontre est obtenu en résolvant le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x+y=-3 \\ 3x-9y=-43 \\ 3x+9y=29 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -9 & -43 & 0 \\ 3 & 9 & 29 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ \approx L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -10 & -40 & 0 \\ 0 & 8 & 32 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ \approx L_2 / (-10) \\ L_3 / 8 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1/3 \\ \approx L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Le centre du cercle est donc $(-7/3; 4)$.



Le rayon du cercle circonscrit est la distance du centre à l'un des sommets du triangle, on trouve $r = \sqrt{250/9} \approx 5,27$ unités.

b) Le triangle est rectangle parce que le centre du cercle est le milieu du côté BC. Ce côté doit donc être le diamètre du cercle. Par conséquent, l'angle BAC est inscrit dans un demi-cercle. C'est donc un angle droit et le triangle est rectangle.

9. Pour connaître la longueur d'une hauteur, on doit déterminer un sommet du triangle, puis calculer la distance de ce sommet au côté opposé.

L'intersection des droites : $\begin{cases} x+2y = -6 & \Delta_1 \\ x-2y = 18 & \Delta_2 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 18 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-24}{-4} = 6 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{24}{-4} = -6$$

Le sommet est donc A(6; -6). Le côté opposé est défini par la droite d'équation $3x - y - 19 = 0$.

Soit P(6; -1) un point de la droite Δ_3 , la distance du sommet A au côté opposé (Δ_3) est :

$$d(A, \Delta_3) = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(0; -5) \cdot (3; -1)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{10}} \approx 1,58 \text{ unité.}$$

L'intersection des droites : $\begin{cases} x-2y = 18 & \Delta_2 \\ 3x-y = 19 & \Delta_3 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & -2 \\ 19 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{20}{5} = 4 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 3 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-35}{5} = -7$$

Le sommet est donc B(4; -7). Le côté opposé est défini par la droite d'équation $x + 2y + 6 = 0$. Soit R(-4; -1) un point de la droite Δ_1 , la distance du sommet B au côté opposé (Δ_1) est :

$$d(B, \Delta_1) = \frac{|\overrightarrow{RB} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(8; -6) \cdot (1; 2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} \approx 1,79 \text{ unité.}$$

L'intersection des droites : $\begin{cases} x+2y = -6 & \Delta_1 \\ 3x-y = 19 & \Delta_3 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 19 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{-7} = \frac{32}{7} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{37}{-7} = -\frac{37}{7}$$

Le sommet est donc C(32/7; -37/7). Le côté opposé est défini par la droite d'équation $x - 2y - 18 = 0$. Soit S(8; -5) un point de la droite Δ_2 , la distance du sommet C au côté opposé, Δ_2 , est :

$$d(C, \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{\left| \left(\frac{-24}{7}; \frac{-2}{7} \right) \cdot (1; -2) \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-20/7|}{\sqrt{5}} \approx 1,28 \text{ unité.}$$

10. Pour connaître l'aire du triangle, on peut déterminer les points sommets et les vecteurs formés par deux des côtés. L'aire du triangle est alors la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

L'intersection des droites : $\begin{cases} 8x + 5y = 1 & \Delta_1 \\ 3x + 7y = 26 & \Delta_2 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 26 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-123}{41} = -3 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{205}{41} = 5$$

Le sommet A est donc $(-3; 5)$.

L'intersection des droites : $\begin{cases} 8x + 5y = 1 & \Delta_1 \\ 5x - 2y = 16 & \Delta_3 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 16 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-82}{-41} = 2 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{123}{-41} = -3$$

Le sommet B est donc $(2; -3)$.

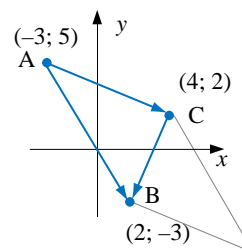
L'intersection des droites : $\begin{cases} 3x + 7y = 26 & \Delta_2 \\ 5x - 2y = 16 & \Delta_3 \end{cases}$ est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 7 \\ 16 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-164}{-41} = 4 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 26 \\ 5 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-82}{-41} = 2$$

Le sommet C est donc $(4; 2)$.

Les vecteurs sont $\overrightarrow{AB} = (5; -8)$ et $\overrightarrow{AC} = (7; -3)$. L'aire du triangle est donc :

$$A = \frac{\left| \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \right|}{2} = \frac{41}{2} = 20,5 \text{ unités d'aire.}$$



11. a) La position d'un point R du segment PQ est donnée par :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ}, \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

Puisque les vecteurs de cette situation sont des vecteurs algébriques, on peut écrire :

$$(x; y) = (-4; -6) + t[(8; 10) - (-4; -6)], \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

$$(x; y) = (-4; -6) + t(12; 16), \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

La description paramétrique du segment de droite est alors :

$$\begin{cases} x = -4 + 12t \\ y = -6 + 16t \end{cases}, \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

- b) Pour déterminer les coordonnées du point milieu entre P et Q, on pose $t = 1/2$ dans les équations paramétriques du segment de droite, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = -4 + 12 \times \frac{1}{2} = 2 \\ y = -6 + 16 \times \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

Le point cherché est le point de coordonnées $(2; 2)$.

- c) Pour déterminer les coordonnées du point situé au quart de la distance entre P et Q, on pose $t = 1/4$ dans les équations paramétriques du segment de droite, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = -4 + 12 \times \frac{1}{4} = -1 \\ y = -6 + 16 \times \frac{1}{4} = -2 \end{cases}$$

Le point cherché est le point de coordonnées $(-1; -2)$.

12. a) La position d'un point R du segment PQ est donnée par :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ}, \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

Puisque les vecteurs de cette situation sont des vecteurs algébriques, on peut écrire :

$$(x; y) = (-2; 12) + t[(8; -6) - (-2; 12)], \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

$$(x; y) = (-2; 12) + t(10; -18), \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

La description paramétrique du segment de droite est alors :

$$\Delta : \begin{cases} x = -2 + 10t \\ y = 12 - 18t \end{cases}, \text{ où } 0 \leq t \leq 1$$

- b) Pour déterminer les coordonnées du point milieu entre P et Q, on pose $t = 1/2$ dans les équations paramétriques du segment de droite, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = -2 + 10 \times \frac{1}{2} = 3 \\ y = 12 - 18 \times \frac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

Le point cherché est le point de coordonnées (3; 3).

- c) Pour déterminer les coordonnées du point situé au sixième de la distance entre P et Q, on pose $t = 1/6$ dans les équations paramétriques du segment de droite, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = -2 + 10 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \\ y = 12 - 18 \times \frac{1}{6} = 9 \end{cases}$$

Le point cherché est le point de coordonnées $(-1/3; 9)$.

13. a) $\overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$ et $\vec{u} = -\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$. Le vecteur position d'un point X quelconque de la droite est alors :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{u} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + t\left(-\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2\right) = (1-t)\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3t}{2}\right)\vec{e}_2$$

- b) $\overrightarrow{OR} = -3\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$ et $\overrightarrow{RQ} = 4\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$. Le vecteur position d'un point Y quelconque de la droite est alors :

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OR} + s\overrightarrow{RQ} = -3\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + s\left(4\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2\right) = (-3+4s)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{3s}{2}\right)\vec{e}_2$$

- c) Les droites se rencontrent au point pour lequel $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$, ce qui donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 4s + t = 4 \\ 3s - 3t = -2 \end{cases}$$

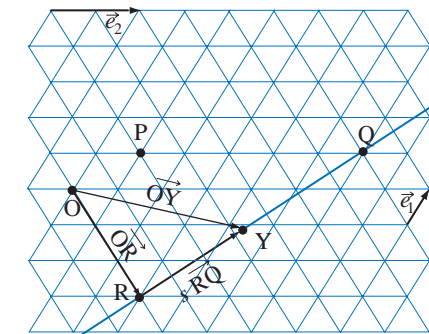
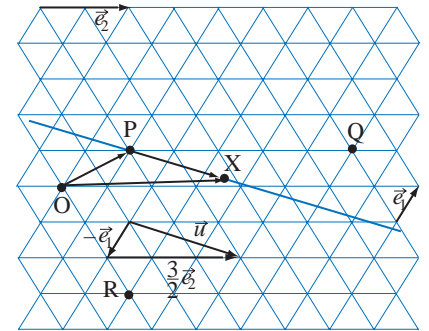
Le déterminant est $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 3 = -15 \neq 0$. Par la méthode de Cramer,

on trouve :

$$s = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-12 + 2}{-15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{ et } t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-8 - 12}{-15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

On trouve le vecteur position du point de rencontre A en substituant les valeurs trouvées dans les équations paramétriques. Le vecteur position du point

A est alors $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2$. Les coordonnées du point dans ce repère sont $(-1/3; 5/2)$.



d) Le vecteur position d'un point du segment PQ est donné, dans le repère, par :

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \vec{OP} + a\vec{PQ} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + a\left(0\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2\right) \\ &= \vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{5a}{2}\right)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq a \leq 1\end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{5a}{2}, \text{ où } 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

Le vecteur position d'un point du segment PR est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{OY} &= \vec{OP} + b\vec{PR} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + b(-4\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= (1-4b)\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2} + b\right)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq b \leq 1\end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1-4b \\ y = \frac{1}{2} + b, \text{ où } 0 \leq b \leq 1 \end{cases}$$

Le vecteur position d'un point du segment QR est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{OZ} &= \vec{OQ} + c\vec{QR} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + c\left(-4\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2\right) \\ &= (1-4c)\vec{e}_1 + \left(3 - \frac{3}{2}c\right)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq c \leq 1\end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

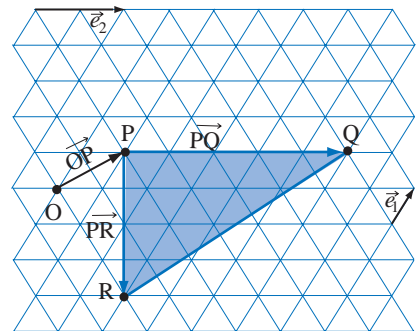
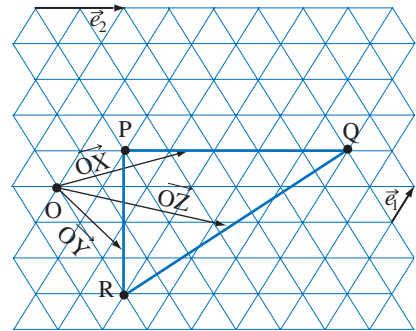
$$\begin{cases} x = 1 - 4c \\ y = 3 - \frac{3}{2}c, \text{ où } 0 \leq c \leq 1 \end{cases}$$

e) Le vecteur position d'un point du triangle est décrit vectoriellement par l'équation :

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \vec{OP} + s\vec{PQ} + t\vec{PR} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + s\left(0\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2\right) + t(-4\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= (1+0s-4t)\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{5s}{2} + t\right)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \text{ et } s+t \leq 1\end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 0s - 4t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{5s}{2} + t, \text{ où } 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \text{ et } s+t \leq 1. \end{cases}$$



14. a) Dans ce repère, $\vec{OP} = -2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ et $\vec{u} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Le vecteur position d'un point X quelconque de la droite est alors :

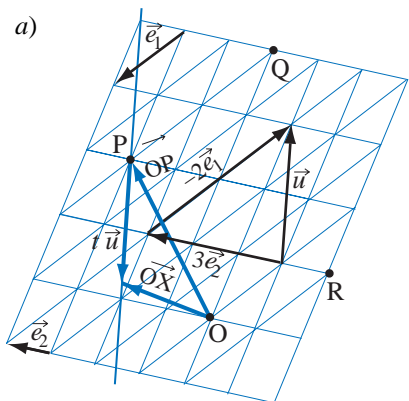
$$\vec{OX} = \vec{OP} + t\vec{u} = -2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + t(-2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = (-2-2t)\vec{e}_1 + (5+3t)\vec{e}_2$$

b) $\vec{OR} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{RQ} = -3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$. Le vecteur position d'un point Y quelconque de la droite est alors :

$$\vec{OY} = \vec{OR} + s\vec{RQ} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + s(-3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2) = (-1-3s)\vec{e}_1 + (-1+6s)\vec{e}_2$$

c) Les droites se rencontrent au point pour lequel $\vec{OX} = \vec{OY}$, ce qui donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ -6s + 3t = -6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ 2s - t = 2 \end{cases}$$



Le déterminant est $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \neq 0$. Par la méthode de Cramer, on trouve :

$$s = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1 + 4}{1} = 3 \text{ et } t = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{6 - 2}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

On trouve le vecteur position du point de rencontre A en substituant les valeurs trouvées dans les équations paramétriques. Le vecteur position du point A est alors $\overrightarrow{OA} = -10\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2$. Les coordonnées du point dans ce repère sont $(-10; 17)$.

d) Le vecteur position d'un point du segment PQ est donné par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{PQ} = -2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + a(-2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2) \\ &= (-2 - 2a)\vec{e}_1 + (5)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq a \leq 1 \end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 - 2a \\ y = 5 \end{cases}, \text{ où } 0 \leq a \leq 1.$$

Le vecteur position d'un point du segment PR est donné par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OY} &= \overrightarrow{OP} + b\overrightarrow{PR} = -2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + b(\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2) \\ &= (-2 + b)\vec{e}_1 + (5 - 6b)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq b \leq 1 \end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + b \\ y = 5 - 6b \end{cases}, \text{ où } 0 \leq b \leq 1.$$

Le vecteur position d'un point du segment QR est donné par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OZ} &= \overrightarrow{OQ} + c\overrightarrow{QR} = -4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + c(3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2) \\ &= (-4 + 3c)\vec{e}_1 + (5 - 6c)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq c \leq 1 \end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + 3c \\ y = 5 - 6c \end{cases}, \text{ où } 0 \leq c \leq 1.$$

e) Le vecteur position d'un point du triangle est décrit vectoriellement par l'équation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} = -2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + s(-2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2) + t(\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2) \\ &= (-2 - 2s + t)\vec{e}_1 + (5 + 0s - 6t)\vec{e}_2, \text{ où } 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \text{ et } s + t \leq 1. \end{aligned}$$

Cela donne, dans ce repère, la description paramétrique :

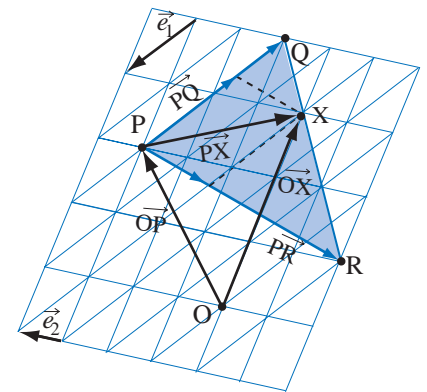
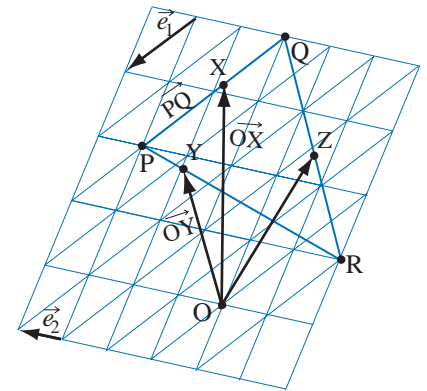
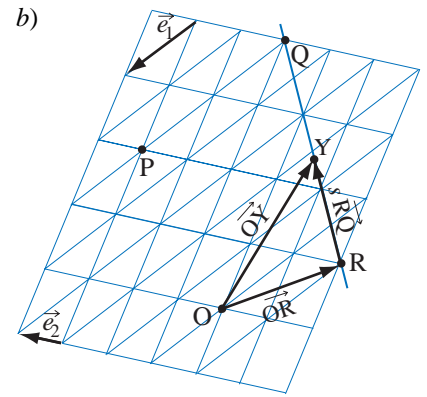
$$\begin{cases} x = -2 - 2s + t \\ y = 5 + 0s - 6t \end{cases}, \text{ où } 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \text{ et } s + t \leq 1.$$

15. a) Le point cherché est le pied R de la perpendiculaire abaissée du point Q sur la droite Δ . La direction de \overrightarrow{RQ} est alors la même que celle du vecteur normal à la droite, $\vec{N} = (1; -2)$. On a donc $\overrightarrow{RQ} = b\vec{N}$. En déterminant la valeur de b , il nous sera possible de connaître \overrightarrow{OR} , le vecteur position du point R. Pour déterminer cette valeur, il faut d'abord trouver un point P de la droite. En posant $x = 1$ dans l'équation de Δ , on obtient $y = 3$. Par conséquent, $P(1; 3)$ est un point de Δ .

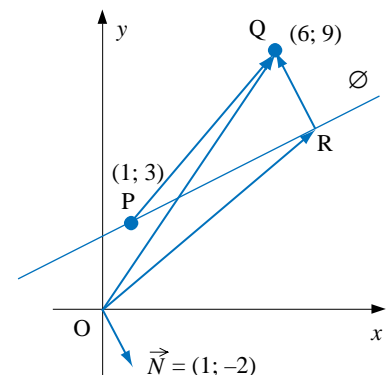
Par l'addition vectorielle, on a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} &= \overrightarrow{PQ} \text{ et} \\ \overrightarrow{PR} + b\vec{N} &= \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

La multiplication scalaire des deux membres de l'équation par le vecteur \vec{N} , donne :



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PR}$$



$$\vec{N} \cdot (\overrightarrow{PR} + b\vec{N}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{PR} + \vec{N} \cdot b\vec{N} = \vec{N} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$0 + b \|\vec{N}\|^2 = \vec{N} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

D'où : $5b = (1; -2) \cdot (5; 6) = -7$ et $b = -7/5$. On peut alors déterminer le vecteur position du point R :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - \left(-\frac{7}{5}\vec{N}\right) = (6; 9) + \frac{7}{5}(1; -2) = \left(\frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right).$$

Le point est $R(37/5; 31/5)$.

b) $\vec{N} = (2; -3)$ et $\overrightarrow{RQ} = b\vec{N}$.

En posant $x = -1$ dans l'équation de Δ , on obtient $y = 1$. Par conséquent, $P(-1; 1)$ est un point de Δ . Par l'addition vectorielle, on a alors

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{PR} + b\vec{N} = \overrightarrow{PQ}$$

La multiplication scalaire des deux membres de l'équation par le vecteur \vec{N} , donne :

$$\vec{N} \cdot (\overrightarrow{PR} + b\vec{N}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{PR} + \vec{N} \cdot b\vec{N} = \vec{N} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$0 + b \|\vec{N}\|^2 = \vec{N} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

D'où : $13b = (2; -3) \cdot (7; -4) = 14 + 12 = 26$ et $b = 2$. On peut alors déterminer le vecteur position du point R :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - (2\vec{N}) = (6; -3) - 2(2; -3) = (2; 3). \text{ Le point est } R(2; 3).$$

c) La direction de \overrightarrow{PR} est la même que celle de $\vec{D} = (1; 4)$, vecteur directeur de la droite. On a donc $\overrightarrow{PR} = a\vec{D}$.

En déterminant la valeur de a , il nous sera possible de connaître \overrightarrow{OR} , soit le vecteur position du point R. Pour déterminer cette valeur, considérons $P(4; 1)$, un point de la droite Δ .

Par l'addition vectorielle, on a alors :

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} \text{ et}$$

$$a\vec{D} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ}$$

La multiplication scalaire des deux membres de l'équation par le vecteur \vec{D} , donne :

$$\vec{D} \cdot (a\vec{D} + \overrightarrow{RQ}) = \vec{D} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{D} \cdot a\vec{D} + \vec{D} \cdot \overrightarrow{RQ} = \vec{D} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$a \|\vec{D}\|^2 + 0 = \vec{D} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

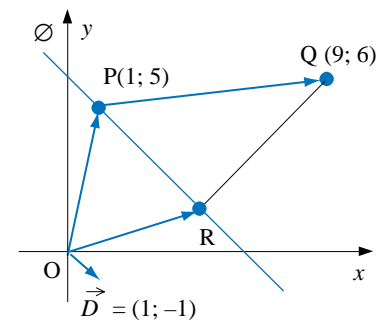
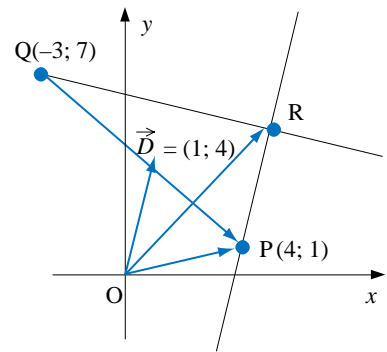
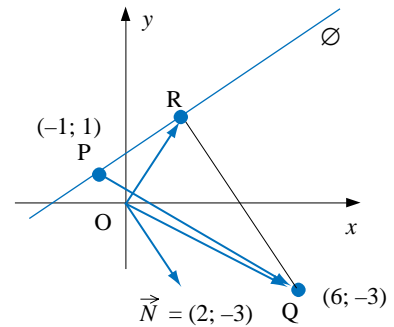
D'où : $17a = (1; 4) \cdot (-7; 6) = -7 + 24 = 17$ et $a = 1$. On peut alors déterminer le vecteur position du point R :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + (\vec{D}) = (4; 1) + (1; 4) = (5; 5). \text{ Le point est } R(5; 5).$$

d) La direction de \overrightarrow{PR} est la même que celle de $\vec{D} = (1; -1)$, vecteur directeur de la droite. On a donc $\overrightarrow{PR} = a\vec{D}$.

En déterminant la valeur de a , il nous sera possible de connaître \overrightarrow{OR} , soit le vecteur position du point R. Pour déterminer cette valeur, considérons $P(1; 5)$, un point de la droite Δ .

Par l'addition vectorielle, on a alors :



$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} \text{ et}$$

$$a\overrightarrow{D} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ}$$

La multiplication scalaire des deux membres de l'équation par le vecteur \overrightarrow{D} , donne :

$$\overrightarrow{D} \cdot (a\overrightarrow{D} + \overrightarrow{RQ}) = \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{D} \cdot a\overrightarrow{D} + \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$a \|\overrightarrow{D}\|^2 + 0 = \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

D'où : $2a = (1; -1) \cdot (8; 1) = 8 - 1 = 7$ et $a = 7/2$. On peut alors déterminer le vecteur position du point R :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \frac{7}{2}\overrightarrow{D} = (1; 5) + \frac{7}{2}(1; -1) = \left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right). \text{ Le point est } R(9/2; 3/2).$$

- e) La direction de \overrightarrow{AR} est la même que celle de $\overrightarrow{D} = (10; 8)$, vecteur directeur de la droite. On a donc $\overrightarrow{AR} = a\overrightarrow{D}$.

Par l'addition vectorielle, on a alors :

$$\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{AQ} \text{ et}$$

$$a\overrightarrow{D} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{AQ}$$

La multiplication scalaire des deux membres de l'équation par le vecteur \overrightarrow{D} , donne :

$$\overrightarrow{D} \cdot (a\overrightarrow{D} + \overrightarrow{RQ}) = \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{AQ}$$

$$\overrightarrow{D} \cdot a\overrightarrow{D} + \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{AQ}$$

$$a \|\overrightarrow{D}\|^2 + 0 = \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{AQ}$$

D'où : $164a = (10; 8) \cdot (3; 12) = 30 + 96 = 126$ et $a = 63/82$. On peut alors déterminer le vecteur position du point R :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \frac{63}{82}(\overrightarrow{D}) = (-4; -5) + \frac{63}{82}(10; 8) = \left(\frac{151}{82}; \frac{47}{82}\right).$$

Le point est $R(151/82; 47/82)$.

