201-NYC
SOLUTIONS
CHAPITRE 13

EXERCICE 13.1

a) Les matrices sont : $L=\begin{pmatrix}1675 & 1357 & 1175\\ 978 & 875 & 786\\ 1115 & 927 & 912\\ 1534 & 1219 & 1057\\ 1614 & 1315 & 1026\\ 2327 & 2116 & 2068\\ 2612 & 2317 & 2215\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}1856 & 1252 & 975\\ 1263 & 1127 & 996\\ 1351 & 978 & 863\\ 1267 & 1069 & 1003\\ 1523 & 1217 & 1017\\ 2135 & 1856 & 1759\\ 2417 & 2175 & 2324\end{pmatrix}$, $P_L=\begin{pmatrix}1,10\\ 0,95\\ 1,95\end{pmatrix}$ et $P_R=\begin{pmatrix}1,15\\ 1,05\\ 2,15\end{pmatrix}$

b) La matrice somme est : $L+R=\begin{pmatrix}1675 & 1357 & 1175\\ 978 & 875 & 786\\ 1115 & 927 & 912\\ 1534 & 1219 & 1057\\ 1614 & 1315 & 1026\\ 2327 & 2116 & 2068\\ 2612 & 2317 & 2215\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1856 & 1252 & 975\\ 1263 & 1127 & 996\\ 1351 & 978 & 863\\ 1267 & 1069 & 1003\\ 1523 & 1217 & 1017\\ 2135 & 1856 & 1759\\ 2417 & 2175 & 2324\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3531 & 2609 & 2150\\ 2241 & 2002 & 1782\\ 2466 & 1905 & 1775\\ 2801 & 2288 & 2060\\ 3137 & 2532 & 2043\\ 4462 & 3972 & 3827\\ 5029 & 4492 & 4539\end{pmatrix}$

c) Le revenu par jour à Lévis est : $L\bullet P_L=\begin{pmatrix}1675 & 1357 & 1175\\ 978 & 875 & 786\\ 1115 & 927 & 912\\ 1534 & 1219 & 1057\\ 1614 & 1315 & 1026\\ 2327 & 2116 & 2068\\ 2612 & 2317 & 2215\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1,10\\ 0,95\\ 1,95\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5422,90\\ 3439,75\\ 3885,55\\ 4906,60\\ 5025,35\\ 8602,50\\ 9393,60\end{pmatrix}$

d) Le revenu par jour à Rimouski est : $R\bullet P_R=\begin{pmatrix}1856 & 1252 & 975\\ 1263 & 1127 & 996\\ 1351 & 978 & 863\\ 1267 & 1069 & 1003\\ 1523 & 1217 & 1017\\ 2135 & 1856 & 1759\\ 2417 & 2175 & 2324\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1,15\\ 1,05\\ 2,15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5545,25\\ 4777,20\\ 4436,00\\ 4735,95\\ 5215,85\\ 8185,90\\ 10059,90\end{pmatrix}$

e) Le revenu total par jour est : $L\bullet P_L+R\bullet P_R=\begin{pmatrix}5422,90\\ 3439,75\\ 3885,55\\ 4906,60\\ 5025,35\\ 8602,50\\ 9393,60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5545,25\\ 4777,20\\ 4436,00\\ 4735,95\\ 5215,85\\ 8185,90\\ 10059,90\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10968,15\\ 8216,95\\ 8321,55\\ 9642,55\\ 10241,20\\ 16788,40\\ 19453,50\end{pmatrix}$

EXERCICE 13.2

a) $\begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 10 & 15 & 20\\ 30 & 30 & 30\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}200\\ 200\\ 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9000\\ 9000\\ 18000\end{pmatrix}$, soit 9 kg d'arachides, 9 kg de raisins et 18 kg de noix de cajou.

b) $(0,10\quad 0,04\quad 0,16)\bullet\begin{pmatrix}2 & 1,5 & 1\\ 1 & 1,5 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}=(0,72\quad 0,69\quad 0,66)$

c) (0,72 0,69 0,66) + (0,18 0,18 0,18) = (0,90 0,87 0,84)

d) 1,8 (0,90 0,87 0,84) = (1,62 1,57 1,51) *e*) La matrice augmentée est : $\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 15 & 10 & 6000 \\ 10 & 15 & 20 & 6000 \\ 30 & 30 & 30 & 12000 \end{array}\right)$.

En résolvant, on a : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Il y a une variable libre, c'est le nombre de mélanges Croc. En posant $z = t$, on a :

$$\{(x; y; z) \mid x = t; y = 400 - 2t \text{ et } z = t\}.$$

Le marchand a le choix parmi différentes possibilités dont certaines sont énumérées dans le tableau ci-contre.

$$\left[\begin{bmatrix} Cric & Crac & Croc \\ 0 & 400 & 0 \\ 25 & 350 & 25 \\ 50 & 300 & 50 \\ 75 & 250 & 75 \\ 100 & 200 & 100 \\ 125 & 150 & 125 \\ 150 & 100 & 150 \\ 175 & 50 & 175 \\ 200 & 0 & 200 \end{bmatrix}\right]$$

f) Les coûts pour 10 g de chaque ingrédient sont donnés par la matrice (0,10 0,04 0,26). La matrice du coût des matières premières de chaque type de mélange est alors :

$$(0{,}10 \quad 0{,}04 \quad 0{,}26)\begin{pmatrix} 4 & 2{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1{,}5 & 2 \end{pmatrix} = (0{,}70 \quad 0{,}72 \quad 0{,}80)$$

Matrice des coûts : (0,70 0,72 0,80) + (0,18 0,18 0,18) = (0,88 0,90 0,98)
Matrice des prix : 1,8 × (0,88 0,90 0,98) = (1,58 1,62 1,76)

g) $\begin{pmatrix} 40 & 25 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8500 \\ 5000 \\ 4500 \end{pmatrix}$

soit 8,5 kg d'arachides, 5 kg de raisins et 4,5 kg de noix de cajou.

EXERCICE 13.3

a) La matrice donnant le message sous forme numérique est $M = \begin{pmatrix} -14 & 3 & -12 & 4 & 7 & -14 \\ 19 & 10 & 3 & 19 & -14 & 13 \\ -14 & 7 & -12 & -18 & -12 & -14 \end{pmatrix}$ ou

$N = \begin{pmatrix} -14 & 4 & 19 & 19 & -14 & -18 \\ 3 & 7 & 10 & -14 & 7 & -12 \\ -12 & -14 & 3 & 13 & -12 & -14 \end{pmatrix}$ selon qu'on écrit le message en ligne ou en colonne. En codant avec la matrice C, on obtient :

$$CM = \begin{pmatrix} -89 & 17 & -63 & -65 & -8 & -83 \\ 52 & 9 & 18 & 78 & 3 & 40 \\ 29 & 32 & -15 & 87 & -9 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } CN = \begin{pmatrix} -67 & -41 & 37 & 91 & -71 & -66 \\ 16 & 46 & 33 & -35 & 24 & -14 \\ -21 & 47 & 84 & 2 & -9 & -76 \end{pmatrix}$$

b) Le déterminant de cette matrice est 0. Elle n'est donc pas inversible. Ce n'est pas une bonne matrice de codage car une partie de l'information est perdue dans le produit matriciel.

c) La matrice inverse de C est $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5/4 & -11/4 & 7/4 \\ -3/4 & -9/4 & 5/4 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$M = C^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5/4 & -11/4 & 7/4 \\ -3/4 & -9/4 & 5/4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 & -90 & -97 & 55 \\ 25 & -46 & 59 & 37 & 48 & -23 \\ 53 & -76 & 93 & -1 & 17 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 19 & -15 & -18 & 3 \\ 19 & -14 & 8 & 9 & 19 & 5 \\ 7 & 4 & -12 & -17 & -14 & 18 \end{pmatrix}$$

Le message est « la fin est proche. ».

EXERCICE 13.4

a) Sous forme matricielle, le système d'équations s'écrit : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 119 \\ 172 \end{pmatrix}$.

b) Le déterminant de la matrice est –3, par conséquent la matrice est inversible.

c) $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 7 & -31 & 22 \\ 2 & -11 & 8 \end{pmatrix}$

d) La matrice inverse est donc $A^{-1} = \dfrac{1}{-3}\,\text{adj}(A) = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 7 & -31 & 22 \\ 2 & -11 & 8 \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 7 & -31 & 22 \\ 2 & -11 & 8 \end{pmatrix}$

En résolvant par la matrice inverse, on a : $\dfrac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 7 & -31 & 22 \\ 2 & -11 & 8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -20 \\ 119 \\ 179 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix}$

La solution est donc $x = 11$, $y = 15$ et $z = -9$.

EXERCICE 13.5

a) z = 3 200 \$ à (30; 40) et à (55; 20).

b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \\ 1{,}2 & 1{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 240 \\ 96 \end{pmatrix}$.En soustrayant du vecteur des disponibilités, on obtient :

$\begin{pmatrix} 300 \\ 280 \\ 96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 300 \\ 240 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les surplus sont alors de 40 feuilles de contreplaqué.

Note : Cette solution n’est pas la seule possible; le point sommet (55 ; 20) est également une solution donnant le même profit global. Toutes les solutions entières du segment de droite joignant les sommets (30; 40) et (55; 20) sont des solutions procurant le même profit. Le tableau suivant donne, pour chacune des solutions, le nombre d’étagères de chaque modèle et les surplus mensuels.

Nombre de modèles		Surplus mensuels	
M_1	M_2	Montants (m)	Contreplaqué (feuilles)
30	40	0	40
35	36	14	32
40	32	28	24
45	28	42	16
50	24	56	8
55	20	70	0

EXERCICE 13.6

Le total des salaires pour chaque semaine est :

$$\begin{pmatrix} 7{,}35 & 10{,}35 & 12{,}75 & 15{,}85 & 24{,}55 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 35 & 38 & 35 & 32 \\ 30 & 35 & 40 & 40 \\ 34 & 35 & 35 & 38 \\ 37 & 35 & 37 & 40 \\ 36 & 34 & 38 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2471{,}50 & 2477{,}25 & 2636{,}85 & 2725{,}15 \end{pmatrix}$$

Le total des salaires pour chaque semaine est : (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15)

Contributions de l’employé :

L’impôt fédéral retenu par l’employeur pour chacune des semaines est :

0,26 (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15) = (642,59   644,09   685,58   708,54)

La cotisation de l’employé à l’Assurance-emploi est :

0,029 (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15) = (71,67   71,84   76,47   79,03)

L’impôt provincial retenu par l’employeur est :

0,24 (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15) = (593,16   594,54   632,84   654,04)

La cotisation de l'employé à la Régie des rentes est :
0,027 (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15) = (66,73   66,89   71,19   73,58)
Contributions de l'employeur :
La cotisation de l'employeur à l'Assurance-emploi est :
1,4 (71,67   71,84   76,47   79,03) = (100,34   100,58   107,06   110,64)
La cotisation de l'employeur à la Régie des rentes est :
0,027 (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15) = (66,73   66,89   71,19   73,58)
La contribution au Fonds des services de santé (FSS) est :
0,0426 (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15) = (105,29 105,53 112,33 116,09)
La contribution à la Commission des normes du travail (CNT) est :
0,0008 (2 471,50   2 477,25   2 636,85   2 725,15) = (1,98 1,98 2,11 2,18)

EXERCICE 13.7

a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = (2;\ 0;\ 5) + \frac{1}{2}[(-4;\ 6;\ 1) - (2;\ 0;\ 5)]$

$= (2;\ 0;\ 5) + (-3;\ 3;\ -2) = (-1;\ 3;\ 3)$

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (-1;\ 3;\ 3) - (3;\ -1;\ 4) = (-4;\ 4;\ -1)$

Les composantes sont respectivement –4, 4, et –1.

c) $\overrightarrow{AB}$ = (–1; 1; 1) et $\overrightarrow{AC}$ =(–7; 7; –3). On a alors :

$\cos\alpha = \dfrac{11}{\sqrt{3}\sqrt{107}}$ et $\alpha = \arccos\left(\dfrac{11}{\sqrt{3}\sqrt{107}}\right) = 52{,}12°$

d) La longueur de la projection de $\overrightarrow{AB}$ = (–1; 1; 1) sur $\overrightarrow{AC}$ =(–7; 7; –3) est donnée par :

$\left\| \overrightarrow{AB}_{(\overrightarrow{AC})} \right\| = \dfrac{\left| \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} \right|}{\left\| \overrightarrow{AC} \right\|} = \dfrac{11}{\sqrt{107}} = 1{,}0634...$, soit environ 1,06 unité de longueur.

e) Le vecteur perpendiculaire est donné par le produit vectoriel, soit :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -7 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3-7) - \vec{j}(3+7) + \vec{k}(-7+7) = -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k}$$

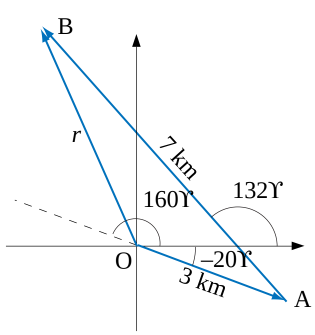
Le vecteur est donc (–10; –10; 0)

f) Le module du vecteur perpendiculaire donne l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En divisant cette aire par la longueur du vecteur $\overrightarrow{AC}$, on obtient la hauteur abaissée du sommet B sur le côté AC. Ce qui donne :

$$h = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AC} \right\|} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{107}} = 1{,}367... \approx 1{,}37 \text{ unité.}$$

EXERCICE 13.8

a)



b) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$= (3\cos(-20°) + 7\cos 132°;\ 3\sin(-20°) + 7\sin 132°)$

$= (-1{,}8648...\ ;\ 4{,}1759...)$

$= (a; b)$

$\left\| \overrightarrow{OB} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 4{,}573...$

$\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ et $\alpha = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) = -65{,}9°$

$\theta = 180° + \alpha = 114{,}1°$

La direction de la droite support est 114,1°. Le sens est nord-ouest.

EXERCICE 13.9

a) (60; 20), z = 4 800 $

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \\ 300 \end{pmatrix}$

EXERCICE 13.10

a) Le vecteur $\overrightarrow{D}_1 = \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ = (3; –2; 0) – (1; 3; –2) = (2; –5; 2) est un vecteur directeur du plan cherché. Puisque ce plan est parallèle à la droite Δ, le vecteur directeur de la droite est également un vecteur directeur du plan. Le vecteur directeur de la droite est obtenu par le produit vectoriel des vecteurs normaux des plans dont la droite est l'intersection.

Les vecteurs normaux sont : $\overrightarrow{N}_1$ = (4; 3; –1) et $\overrightarrow{N}_2$ = (3; –5; 2). Le produit vectoriel est alors :

$$\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(6-5) - \vec{j}(8+3) + \vec{k}(-20-9)$$

On a donc $\overrightarrow{D}_2$ = (1; –11; –29)

Un point P(x; y; z) est dans le plan cherché si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{P_1P}}$, $\overrightarrow{D}_1$ et $\overrightarrow{D}_2$ sont coplanaires. C'est-à-dire si et seulement si det($\overrightarrow{\mathrm{P_1P}}, \overrightarrow{D}_1, \overrightarrow{D}_2$) = 0. On a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P}} \bullet \left(\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -11 & -29 \end{vmatrix} = 167(x-1) + 60(y-3) - 17(z+2) = 0$$

D'où l'équation du plan est 167x + 60y – 17z – 381 = 0.

b) Le vecteur $\overrightarrow{D}_1 = \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ = (4; 0; 3) – (3; –1; 2) = (1; 1; 1) est un vecteur directeur du plan cherché. Puisque ce plan est parallèle à la droite Δ, le vecteur directeur de la droite est également un vecteur directeur du plan. Le vecteur directeur de la droite est obtenu par le produit vectoriel des vecteurs normaux des plans dont la droite est l'intersection. Les vecteurs normaux sont : $\overrightarrow{N}_1$ = (2; –1; 1) et $\overrightarrow{N}_2$ = (–3; 2; 4). Le produit vectoriel est alors :

$$\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4-2) - \vec{j}(8+3) + \vec{k}(4-3)$$

On a donc $\overrightarrow{D}_2$ = (–6; –11; 1)

Un point P(x; y; z) est dans le plan cherché si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{P_1P}}$, $\overrightarrow{D}_1$ et $\overrightarrow{D}_2$ sont coplanaires. C'est-à-dire si et seulement si det($\overrightarrow{\mathrm{P_1P}}, \overrightarrow{D}_1, \overrightarrow{D}_2$) = 0. On a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P}} \bullet \left(\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}\right) = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 12(x-3) - 7(y+1) - 5(z-2) = 0.$$

D'où l'équation du plan est 12x – 7y – 5z – 33 = 0.

EXERCICE 13.11

a) $\begin{pmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}8 & 1{,}6 & 2{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 648 \\ 83 \\ 88 \end{pmatrix}$

La compagnie doit commander 648 mètres linéaires de bois, 83 m^2 de contreplaqué et 88 m^2 de panneau d'aggloméré.

b) $(4{,}50 \;\; 32{,}50 \;\; 22{,}50) \begin{pmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}8 & 1{,}6 & 2{,}2 \end{pmatrix} = (143{,}25 \;\; 189{,}25 \;\; 161{,}25)$

c) 8,50 (6 5 4) = (51 42,50 34)

d) (143,25 189,25 161,25) + (51 42,50 34) = (194,25 231,75 195,25)

e) 1,5 (194,25 231,75 195,25) = (291,38 347,63 292,88)

f) 1,4 (291,38 347,63 292,88) = (407,93 486,68 410,03)

g) La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 14 & 332 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 1{,}5 & 44 \\ 1{,}8 & 1{,}6 & 2{,}2 & 44 \end{array}\right)$ et en résolvant, on trouve $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$.

Le plan de production doit être de 10 bureaux du modèle colonial, 8 du modèle espagnol et 6 du modèle canadien.

h) La matrice augmentée est: $\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 14 & 612 \\ 1,5 & 2,5 & 1,5 & 76 \\ 1,8 & 1,6 & 2,2 & 86 \end{array}\right)$ et en résolvant, on trouve $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right)$.

Le plan de production doit être de 12 bureaux du modèle colonial, 10 du modèle espagnol et 22 du modèle canadien.

EXERCICE 13.12

a) $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$

b) $P^2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 & 0 \\ 0,44 & 0,56 & 0 \\ 0,32 & 0,43 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 0,445 & 0,555 & 0 \\ 0,444 & 0,556 & 0 \\ 0,382 & 0,493 & 0,125 \end{pmatrix}$.

c) La matrice de transition n'est pas régulière car elle aura toujours des éléments nuls dans la troisième colonne.

d) La part de marché du produit *C* est initialement 0,5. Après une transition, elle est de $0,5^2$. C'est la probabilité qu'un consommateur après 1 transition choisisse le produit *C*. Après deux transitions, elle est de $0,5^3$.

e) La part de marché du produit *C* dans la matrice Q^n est $0,5^n$. C'est la probabilité qu'un consommateur après *n* transitions choisisse le produit *C*. Or, la limite lorsque *n* tend vers l'infini de $0,5^n$ est 0. Par conséquent, ce produit sera éventuellement boudé par les consommateurs.

f) Les matrices sont $P - I = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & -0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & -0,5 \end{pmatrix}$, $(P-I)^t = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & -0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$

On a donc $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & -0,4 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,44... \\ 0 & 1 & 0 & 0,55... \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Le produit *C* sera éliminé du marché. Le produit *A* aura 44,4% du marché et le produit *B* 55,6%.

EXERCICE 13.13

Par la méthode du simplexe, problème dual, on obtient (0; 60; 60) à 2 160 $. Il faut fabriquer 60 exemplaires de P_2 et 60 exemplaires de P_3 pour minimiser les coûts à 2 160 $.

EXERCICE 13.14

a) En calculant le déterminant de la matrice dont les éléments des lignes sont les composantes des vecteurs, on a :

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ = L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ puisqu'il y a deux lignes proportionnelles. Puisque le déterminant est nul, les vecteurs sont linéairement dépendants.

b) En calculant le déterminant, on a $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ = L_2 + 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Puisque le déterminant est non nul, les vecteurs sont linéairement indépendants.

c) Quatre vecteurs de $\mathbf{R}^3$ sont linéairement dépendants, car la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ est 3, ce qui signifie qu'une base contient trois vecteurs.

EXERCICE 13.15

a) La matrice augmentée du système est $\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 24 & 30 & 930 \\ 20 & 15 & 30 & 840 \\ 15 & 18 & 20 & 660 \end{array}\right)$

dont la solution est (12; 10; 15). L'entreprise peut donc produire 12 chaises du premier modèle, 10 du deuxième et 15 du troisième.

b) En tenant compte des temps qui s'ajoutent suite à la suspension de la production des deux anciens modèles, la matrice augmentée du système devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 24 & 30 & 2120 \\ 20 & 15 & 30 & 1895 \\ 15 & 18 & 20 & 1510 \end{array}\right)$$

dont la solution est (28; 25; 32). L'entreprise peut maintenant produire 28 chaises du premier modèle, 25 du deuxième et 32 du troisième

EXERCICE 13.16

a) **Sous-ensemble non vide**

Le sous-ensemble est non vide puisque $(0; 0; 0) \in$ **U**.

Fermeture de l'addition

Les vecteurs de **U** satisfont à la condition $z = 2y - 5x$.

Soit $(a; b; 2b - 5a)$ et $(c; d; 2d - 5c)$, deux vecteurs quelconques de **U**. Alors,

$(a; b; 2b - 5a) + (c; d; 2d - 5c) = (a+c; b+d; 2(b+d) - 5(a+c))$

Le vecteur résultant est dans **U** puisqu'il satisfait à la condition $z = 2y - 5x$.

Puisque les vecteurs sont quelconques, l'argument est valide pour tous les vecteurs de **U**. Le sous-ensemble **U** est donc fermé pour l'addition.

Fermeture de la multiplication par un scalaire

Soit $(a; b; 2b - 5a)$, un vecteur quelconque de **U** et soit k, un nombre réel quelconque. Alors,

$k(a; b; 2b - 5a) = (ka; kb; 2kb - 5ka)$

Le vecteur résultant est dans **U** puisqu'il satisfait à la condition $z = 2y - 5x$.

Puisque le vecteur est quelconque et que le scalaire k est quelconque, l'argument est valide pour tous les vecteurs de **U** et pour tous les scalaires. Le sous-ensemble **U** est donc fermé pour la multiplication par un scalaire.

Puisque **U** est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}^3$, fermé pour les deux opérations, on peut conclure que **U** est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

La condition $z = 2y - 5x$ comporte deux variables libres et une variable liée. Pour déterminer une base de **U**, on assigne, en alternance, les valeurs 1 et 0 aux variables libres pour déterminer deux vecteurs linéairement indépendants qui engendrent le sous-espace. En posant $x = 1$ et $y = 0$, on obtient $z = -5$, ce qui donne le vecteur $(1; 0; -5)$. En posant $x = 0$ et $y = 1$, on obtient $z = 2$, ce qui donne le vecteur $(0; 1; 2)$.

On a donc $\mathbf{B}_{\mathbf{U}} = \{(1; 0; -5), (0; 1; 2)\}$ et $\dim(\mathbf{U}) = 2$.

b) **Sous-ensemble non vide**

Le sous-ensemble est non vide puisque $(0; 0; 0) \in$ **U**.

Fermeture de l'addition

Les vecteurs de **U** satisfont aux conditions $y = 4x$ et $z = -5x$.

Soit $(a; 4a; -5a)$ et $(b; 4b; -5b)$, deux vecteurs quelconques de **U**. Alors,

$(a; 4a; -5a) + (b; 4b; -5b) = (a+b; 4(a+b); -5(a+b))$.

Le vecteur résultant est dans **U** puisqu'il satisfait aux conditions $y = 4x$ et $z = -5x$.

Puisque les vecteurs sont quelconques, l'argument est valide pour tous les vecteurs de **U**. Le sous-ensemble **U** est donc fermé pour l'addition.

Fermeture de la multiplication par un scalaire

Soit $(a; 4a; -5a)$, un vecteur quelconque de **U** et soit k, un nombre réel quelconque. Alors,

$k(a; 4a; -5a) = (ka; 4ka; -5ka)$

Le vecteur résultant est dans **U** puisqu'il satisfait aux conditions $y = 4x$ et $z = -5x$.

Puisque le vecteur est quelconque et que le scalaire k est quelconque, l'argument est valide pour tous les vecteurs de **U** et pour tous les scalaires. Le sous-ensemble **U** est donc fermé pour la multiplication par un scalaire.

Puisque **U** est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}^3$, fermé pour les deux opérations, on peut conclure que **U** est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Les conditions $y = 4x$ et $z = -5x$ ne comportent qu'une variable libre et deux variables liées. Pour déterminer une base de **U**, on assigne la valeur 1 à la variable libre pour déterminer un vecteur qui engendre le sous-espace. En posant $x = 1$, on obtient $y = 4$ et $z = -5$, ce qui donne le vecteur $(1; 4; -5)$.

On a donc $\mathbf{B}_{\mathbf{U}} = \{(1; 4; -5)\}$ et $\dim(\mathbf{U}) = 1$.

EXERCICE 13.17

a) La matrice augmentée du système d'équations est : $\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 14 & 18 & 370 \\ 1,3 & 1,8 & 2,2 & 42 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 19 \end{array}\right)$.

dont la solution est (6;8;9). Il est donc possible de produire 6 meubles du premier modèle, 8 du deuxième et 9 du troisième.

b) La différence des matrices : $\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

donne le nombre de meubles qu'il restera à produire après avoir utilisé les matériaux en réserve. Pour déterminer les quantités de matériaux à commander, il faut multiplier la matrice des matériaux par cette matrice.

$$\begin{pmatrix} 16 & 14 & 18 \\ 1,3 & 1,8 & 2,2 \\ 0,6 & 0,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 444 \\ 45,8 \\ 20,8 \end{pmatrix}$$

Il faut donc 444 unités de bois de pin, 45,8 unités de contreplaqué et 20,8 unités d'acrylique.

c) Le temps en minutes nécessaire à la réalisation est obtenu en multipliant la matrice des temps de réalisation par la matrice des quantités à produire, soit :

$$\begin{pmatrix} 60 & 75 & 80 \\ 45 & 60 & 50 \\ 80 & 85 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 2610 \\ 4620 \end{pmatrix}$$

Soit 60 h à l'atelier de sciage, 43,5 h à l'atelier d'assemblage et 77 h à l'atelier de sablage.

d) Les salaires étant à taux horaire, exprimons le temps de travail en heures.

$$\frac{1}{60}\begin{pmatrix} 3600 \\ 2610 \\ 4620 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 43,5 \\ 77 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 12,50 & 9,75 & 8,10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 43,5 \\ 77 \end{pmatrix} = 1797,83 \text{ \$.}$$

e) La multiplication de la matrice des quantités de matériaux par la matrice des quantités à produire donne les quantités de matériaux nécessaires pour fabriquer les meubles en commande.

$$\begin{pmatrix} 16 & 14 & 18 \\ 1,3 & 1,8 & 2,2 \\ 0,6 & 0,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 814 \\ 87,8 \\ 39,8 \end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice des matériaux nécessaires à la fabrication et de la matrice des coûts unitaires donne le coût en matériaux, soit :

$$\begin{pmatrix} 1,15 & 26,6 & 34,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 81,4 \\ 87,8 \\ 39,8 \end{pmatrix} = 4644,68 \text{ \$}$$

On aurait pu trouver ce coût d'une autre façon. On détermine d'abord le coût en matériaux pour produire un exemplaire de chaque modèle en effectuant le produit :

$$\begin{pmatrix} 1,15 & 26,6 & 34,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 14 & 18 \\ 1,3 & 1,8 & 2,2 \\ 0,6 & 0,8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73,68 & 91,58 & 113,72 \end{pmatrix}$$

Le coût en matériaux de la commande est alors donné par le produit de la matrice des coûts unitaires et de la matrice des quantités en commande

$$\begin{pmatrix} 73,68 & 91,58 & 113,72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} = 4644,68 \text{ \$}$$

Le coût total de production est alors la somme du coût en salaires et du coût en matériaux, soit
1 797,83 + 4 644,68 = 6 442,51 $.

EXERCICE 13.18

a) L'ensemble ne contient que deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Cet ensemble ne peut donc constituer une base de $\mathbf{R}^3$. Les vecteurs engendrés sont les vecteurs $(x; y; z)$ pour lesquels il existe des scalaires a et b tels que
$a(1; 2; -5) + b(3; 2; 4) = (x; y; z)$.

Ce qui donne : $\begin{cases} a+3b=x \\ 2a+2b=y \\ -5a+4b=z \end{cases}$

D'où $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \\ -5 & 4 & z \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3+5L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \\ 0 & 19 & z+5x \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 4L_3+19L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y-2x \\ 0 & 0 & -18x+19y+4z \end{array}\right)$

Le système admet une solution si et seulement si $-18x + 19y + 4z = 0$. Le sous-espace engendré est donc :

$$\mathbf{U} = \{(x; y; z) \mid -18x + 19y + 4z = 0\}$$

C'est un plan passant par $(0; 0; 0)$ et de vecteur normal $\vec{N} = (-18; 19; 4)$.
On remarque qu'en isolant z, on obtient $z = (18x - 19y)/4$, ce qui exprime bien qu'il suffit de deux variables libres pour décrire le sous-espace vectoriel engendré. En posant $x = 2$ et $y = 0$, on obtient le vecteur $(2; 0; 9)$ et en posant $x = 0$ et $y = 4$, on obtient le vecteur $(0; 4; -19)$. La base est $\mathbf{B} = \{(2; 0; 9), (0; 4; -19)\}$. Le sous-espace engendré par **U** est donc de dimension 2 puisqu'une base de ce sous-espace contient deux vecteurs.
On peut également procéder en échelonnant la matrice constituée des vecteurs de **U**. On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 19 \end{pmatrix} \approx \begin{array}{l} 2L_1+L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\{(2; 0; 9)$ et $(0; -4; 19)\}$ constituent une base. Le sous-espace est de dimension 2. Ce sont des vecteurs directeurs du plan engendré. On peut le décrire par des équations paramétriques ce qui donne :

Π: $\begin{cases} x=2t \\ y=-4s \\ z=9t+19s \end{cases}$

On peut également décrire ce plan par le produit mixte : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 19 \end{vmatrix} = 36x - 38y - 8z = 0.$

En divisant par -2, on a $-18x + 19y + 4z = 0$.

Dans ce cas, puisque les vecteurs $(1; 2; -5)$ et $(3; 2; 4)$ sont linéairement indépendants, le rapport des composantes n'étant pas constant, on peut donc également trouver l'équation par le produit mixte :

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 18x - 19y - 4z = 0.$

b) L'ensemble compte trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Le déterminant de la matrice constituée de ces vecteurs est

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$ On peut donc conclure que les vecteurs sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de $\mathbf{R}^3$. $\mathbf{R}^3$ est le sous-espace engendré. Il est de dimension 3.

c) L'ensemble contient trois vecteurs de R^3. Le déterminant de la matrice constituée de ces vecteurs est

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -10 \end{vmatrix} = 0.$ On peut donc conclure que les vecteurs sont linéairement dépendants. Ils ne forment pas une base de $\mathbf{R}^3$. Les vecteurs engendrés sont les vecteurs $(x; y; z)$ pour lesquels il existe des scalaires a, b et c tels que
$a(1; -2; 2) + b(3; 1; -4) + c(5; 4; -10) = (x; y; z)$.

Ce qui donne : $\begin{cases} a+3b+5c=x \\ -2a+b+4c=y \\ 2a-4b-10c=z \end{cases}$

D'où :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & x \\ -2 & 1 & 4 & y \\ 2 & -4 & -10 & z \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ \approx L_2+2L_1 \\ L_3-2L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & x \\ 0 & 7 & 14 & y+2x \\ 0 & -10 & -20 & z-2x \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ \approx L_2 \\ 7L_3+10L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & x \\ 0 & 7 & 14 & y+2x \\ 0 & 0 & 0 & 6x+10y+7z \end{array}\right)$$

Le système admet une solution si et seulement si $6x + 10y + 7z = 0$. Le sous-espace engendré est donc **U** $= \{(x; y; z) | \ 6x + 10y + 7z = 0\}$. C'est un plan passant par (0; 0; 0) et de vecteur normal $\vec{N} = (6; 10; 7)$.

On remarque qu'en isolant z, on obtient $z = (-6x - 10y)/7$, ce qui exprime bien qu'il suffit de deux variables libres pour décrire le sous-espace vectoriel engendré. En posant $x = 7$ et $y = 0$, on obtient le vecteur (7; 0; –6) et en posant $x = 0$ et $y = 7$, on obtient le vecteur (0; 7; –10). La base est **B** = {(7; 0; –6), (0; 7; –10)}. Le sous-espace engendré par **U** est donc de dimension 2 puisqu'une base de ce sous-espace contient deux vecteurs.

On peut également procéder en échelonnant la matrice constituée des vecteurs de **U**. On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \approx L_2-3L_1 \\ L_3-5L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 14 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7L_1+2L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3-2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs {(7; 0; –6), (0; 7; –10)} constituent une base. Ce sont des vecteurs directeurs du plan engendré. On peut le décrire par des équations paramétriques ce qui donne :

$$\Pi: \begin{cases} x = 7t \\ y = 7s \\ z = -6t - 10s \end{cases}$$

On peut également décrire ce plan par le produit mixte :

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 7 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -10 \end{vmatrix} = 42x + 70y + 49z = 0$. En divisant par 7, on a $6x + 10y + 7z = 0$.

d) L'ensemble compte quatre vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Ils sont donc linéairement dépendants. On peut déterminer un sous-ensemble de **U** formé de vecteurs indépendants en échelonnant la matrice dont les lignes sont constituées de ces vecteurs. On trouve alors :

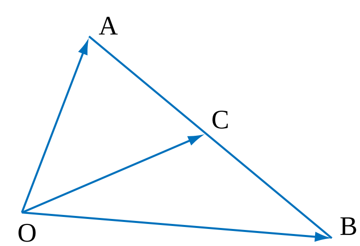
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ \approx L_3-3L_1 \\ L_4+L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -14 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7L_1+4L_2 \\ L_2 \\ \approx L_3-2L_2 \\ L_4+L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -10 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs {(7; 0; –10),(0; –7; 1)} sont les vecteurs directeurs du plan engendré, ils constituent une base. Le sous-espace vectoriel est de dimension 2. On peut le décrire par des équations paramétriques ce qui donne :

$$\Pi: \begin{cases} x = 7t \\ y = -7s \\ z = -10t + s \end{cases}$$

On peut également décrire ce plan par le produit mixte :

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 7 & 0 & -10 \\ 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -70x - 7y - 49z = 0$. En divisant par –7, on a $10x + y + 7z = 0$.



EXERCICE 13.19

a) Soit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, trois vecteurs dans le plan ayant une origine commune O et tels que le point C est sur le segment AB. On a donc : $\overrightarrow{BC} = m\,\overrightarrow{BA}$. D'où :

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, par la loi de Chasles;

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + m\,\overrightarrow{BA}$, hypothèse;

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + m(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, par la loi de Chasles;

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + m\,\overrightarrow{OA} - m\,\overrightarrow{OB}$, distributivité de la multiplication sur une somme de vecteurs;

$\overrightarrow{OC} = m\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - m\,\overrightarrow{OB}$, commutativité de l'addition des vecteurs;

$\overrightarrow{OC} = m\,\overrightarrow{OA} + (1 - m)\,\overrightarrow{OB}$, distributivité de la multiplication sur une somme de scalaires.

b) Soit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, trois vecteurs dans le plan ayant une origine commune O et tels que

$\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + (1 - m)\overrightarrow{OB}$. On a alors :

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, par la loi de Chasles;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + [m\overrightarrow{OA} + (1 - m)\overrightarrow{OB}]$, par hypothèse;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + m\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - m\overrightarrow{OB}$, distributivité de la multiplication sur une somme de scalaires;

$\overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB}$, somme de vecteurs opposés;

$\overrightarrow{BC} = m(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, distributivité de la multiplication sur une somme de vecteurs;

$\overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{BA}$, par la loi de Chasles.

Par conséquent, $\overrightarrow{BC}$ est parallèle à $\overrightarrow{BA}$, par la définition de parallélisme. Le point C est donc sur le segment AB.

c) Ces deux démonstrations permettent de conclure que :

Soit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$,trois vecteurs dans le plan ayant une origine commune O. Alors, le point C est sur le segment AB si et seulement si $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + (1 - m)\overrightarrow{OB}$

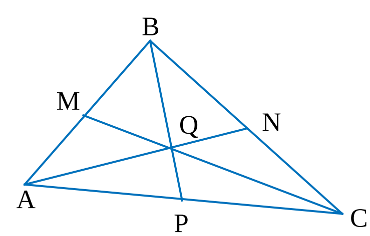
EXERCICE 13.20

Voir la solution du problème semblable présentée à l'exercice 13.2

a) 22 kg, 22 kg et 28 kg.
b) (1,20 1,04 1,20)
c) (1,48 1,32 1,48)
d) (2,52 2,24 2,52)
e) 150, 150 et 400 sachets
f) 15 kg, 19 kg et 14 kg

EXERCICE 13.21

Soit ABC un triangle, M, le point milieu de AB, N, milieu de BC et P, milieu de AC. Soit Q, le point d'intersection de AN et CM. Par l'exercice 13.19, on peut écrire :



$\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AC} + (1-m)\overrightarrow{AM}$, puisque Q est sur le segment CM;

$\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AC} + \dfrac{(1-m)}{2}\overrightarrow{AB}$, puisque M est le point milieu de AB.

De plus, on a :

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$, par la loi de Chasles;

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{CA} + (1-n)\overrightarrow{CN}$, puisque Q est sur le segment AN;

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{CA} + \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{CB}$, puisque N est le point milieu de BC;

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} - n\overrightarrow{AC} + \dfrac{(1-n)}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$, vecteur opposé;

$\overrightarrow{AQ} = (1-n)\overrightarrow{AC} + \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{CA} + \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{AB}$, par distributivité;

$\overrightarrow{AQ} = (1-n)\overrightarrow{AC} - \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{AB}$, vecteur opposé;

$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{AB}$, par distributivité;

En égalant ces deux expressions, on a : $m\overrightarrow{AC} + \dfrac{(1-m)}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{(1-n)}{2}\overrightarrow{AB}$

En regroupant, on a: $\left(m + \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} + \left(-\dfrac{m}{2} + \dfrac{n}{2}\right)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, par distributivité;

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant linéairement indépendants, les coefficients sont nuls et on a :

$$\left(m+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ et } \left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)=0$$

La deuxième équation donne $m = n$. En substituant dans la première, on a :

$$\left(m+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\right)=0, \text{ d'où, } \frac{3m}{2}=\frac{1}{2} \text{ et } m = 1/3.$$

On procède de façon analogue avec le segment $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$.

EXERCICE 13.22

a) $\det(A^2) = \det(A) \times \det(A) = (-5)(-5) = 25$.

b) $\det(A^t) = \det(A) = -5$.

c) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1/(-5) = -1/5$.

d) $\det(2A) = 2^4 \det(A) = 16 \times (-5) = -80$, pour chaque ligne multipliée par 2, le déterminant est multiplié par 2 et celui-ci est d'ordre 4, il a donc 4 lignes.

EXERCICE 13.23

a) En effectuant le produit mixte, on a :

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -5 & 3 & t \end{vmatrix} = -1(t+12)-2(3t-20)-3(9+5)=-7t-14$$

Le volume du parallélépipède est 48 lorsque $-7t - 14 = 48$ ou $-7t - 14 = -48$.
De $-7t - 14 = 48$, on tire $t = -62/7$.
De $-7t - 14 = -48$, on tire $t = 34/7$.

b) Les trois vecteurs sont coplanaires lorsque le déterminant est nul. Soit lorsque $-7t - 14 = 0$, d'où l'on tire $t = -2$.

EXERCICE 13.24

a) $P-I=\begin{pmatrix} -0,8 & 0,8 \\ 0,6 & -0,6 \end{pmatrix}$, $(P-I)^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix}$, $M^{-1}=\dfrac{1}{-1,4}\begin{pmatrix} -0,6 & -1 \\ -0,8 & 1 \end{pmatrix}$

Le point invariant est donc $\begin{pmatrix} \dfrac{0,6}{1,4} & \dfrac{0,8}{1,4} \end{pmatrix} = (3/7 \quad 4/7)$.

b) $P-I=\begin{pmatrix} -0,9 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & -0,8 & 0,6 \\ 0,3 & 0,1 & -0,4 \end{pmatrix}$, $(P-I)^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & -0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 & -0,4 \end{pmatrix}$

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & -0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 & -0,4 \end{pmatrix}$, $M^{-1}=\dfrac{1}{1,12}\begin{pmatrix} 0,26 & 1 & 0,9 \\ 0,24 & -0,8 & 0,4 \\ 0,62 & -0,2 & -1,3 \end{pmatrix}$

Le point invariant est donc $\begin{pmatrix} \dfrac{0,26}{1,12} & \dfrac{0,24}{1,12} & \dfrac{0,62}{1,12} \end{pmatrix} = (13/56 \quad 3/14 \quad 31/56)$.

c) $P-I=\begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}$, $(P-I)^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}$

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}$, $M^{-1}=\dfrac{1}{0,2}\begin{pmatrix} 0,05 & 0,3 & 0,4 \\ 0,05 & -0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & -0,4 \end{pmatrix}$

Le point invariant est donc $\begin{pmatrix} \dfrac{0,05}{0,2} & \dfrac{0,05}{0,2} & \dfrac{0,1}{0,2} \end{pmatrix} = (1/4 \quad 1/4 \quad 1/2)$.

EXERCICE 13.25

a) La matrice est nilpotente de degré 3 puisque : $Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $Q^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(I-Q)^{-1} = I + Q + Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\operatorname{cof}(I-Q) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{adj}(I-Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et, puisque $\det(I-Q) = 1$, on a :

$$(I-Q)^{-1} = \frac{1}{\det(I-Q)} \times \operatorname{adj}(I-Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 13.26

a) $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

b) $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}30 & 0{,}36 \\ 0{,}32 & 0{,}32 & 0{,}36 \\ 0{,}32 & 0{,}30 & 0{,}38 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}328 & 0{,}306 & 0{,}366 \\ 0{,}328 & 0{,}304 & 0{,}368 \\ 0{,}324 & 0{,}308 & 0{,}368 \end{pmatrix}$.

c) La matrice de transition est inversible.

d) La part de marché du produit *A* est initialement 0,4. Après une transition, elle est de 0,34. C'est la probabilité qu'un consommateur après 1 transition choisisse le produit *A*. Après deux transitions, elle est de 0,328.

e) Les matrices sont $P - I = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}6 \end{pmatrix}$ et $(P-I)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}6 \end{pmatrix}$.

On a donc $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}3 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}6 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}3265 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3061 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}3673 \end{array}\right)$.

Le produit *A* prendra 32,65 % du marché, le produit *B* aura 30,61 % du marché et le produit *C* 36,73 %.

EXERCICE 13.27

a) La matrice de transition est $\begin{array}{c} \\ A \\ E \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & E & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$. D'où $Q = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

b) On trouve $I - Q = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ -0{,}3 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}33 & 0{,}67 \\ 0 & 3{,}33 & 0 \\ 1 & 0{,}67 & 2 \end{pmatrix}$.

Si le premier hôtel choisi est *B* le client choisira, en moyenne, 2 fois l'hôtel *B*, 1,33 fois l'hôtel *C* et 0,67 fois l'hôtel *D* avant le choix définitif.

Si le premier hôtel choisi est *C* le client choisira, en moyenne, 0 fois l'hôtel *B*, 3,33 fois l'hôtel *C* et 0 fois l'hôtel *D* avant le choix définitif.

Si le premier hôtel choisi est *D* le client choisira, en moyenne, 1 fois l'hôtel *B*, 0,67 fois l'hôtel *C* et 2 fois l'hôtel *D* avant le choix définitif.

c) Le produit donne $(I-Q)^{-1} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}33 & 0{,}67 \\ 0 & 3{,}33 & 0 \\ 1 & 0{,}67 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}33 \\ 3{,}67 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, si le premier hôtel choisi est *B*, il y aura en moyenne 4 changements avant l'absorption. Si l'état initial est *C* il y aura en moyenne 3,33 changements avant l'absorption. Si l'état initial est *D* il y aura en moyenne 3,67 changements avant l'absorption.

d) Le produit *NR* donne $NR = \begin{pmatrix} 2 & 1,33 & 0,67 \\ 0 & 3,33 & 0 \\ 1 & 0,67 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,533 & 0,467 \\ 0,333 & 0,667 \\ 0,267 & 0,733 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, si le premier hôtel choisi est *B*, la probabilité que le choix définitif du client soit l'hôtel *A* est 53,3 % et la probabilité que le choix définitif soit l'hôtel *E* est 46,7 %. La probabilité que le client fasse un choix définitif est 100 %.
Si le premier hôtel choisi est *C*, la probabilité que le choix définitif du client soit l'hôtel *A* est 33,3 % et la probabilité que le choix définitif soit l'hôtel *E* est 66,7 %. La probabilité que le client fasse un choix définitif est 100 %.
Si le premier hôtel choisi est *D*, la probabilité que le choix définitif du client soit l'hôtel *A* est 26,7 % et la probabilité que le choix définitif soit l'hôtel *E* est 73,3 %. La probabilité que le client fasse un choix définitif est 100 %.

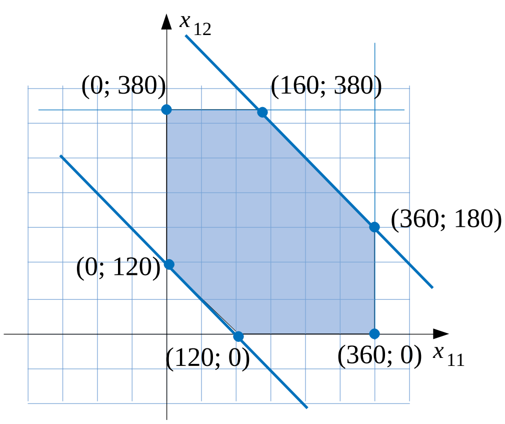
EXERCICE 13.28

a)

	D_1	D_2	D_3	Production
O_1	10 x_{11}	14 x_{12}	13 $540 - x_{11} - x_{12}$	540
O_2	15 $360 - x_{11}$	16 $380 - x_{12}$	13 $x_{11} + x_{12} - 120$	620
Demandes	360	380	420	1160

b) $\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 540 \\ x_{11} \leq 360 \\ x_{12} \leq 380 \\ x_{11} + x_{12} \geq 120 \end{cases}$ et $w = 16\,940 - 5x_{11} - 2\,x_{12}$

c)



d)

$(x_{11}; x_{12})$	(120; 0)	(360; 0)	(360; 180)	(160; 380)	(0; 380)	(0; 120)
w	16340	15140	14780	15380	16180	16700

La solution optimale est w = 14 780$, elle est atteinte à (360; 180).

e) $\left(\begin{array}{cc:ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 540 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 360 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 380 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 120 \\ \hdashline 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16940 \end{array}\right)$

f)

$$
\left(\begin{array}{cc|cccc|c|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 540 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 360 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 380 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 120 \\
\hline
5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16940
\end{array}\right)
\;*\;
\approx
\begin{array}{l}
L_1 - L_4 \\ L_2 - L_4 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 - 5L_4
\end{array}
\left(\begin{array}{cc|cccc|c|c}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 420 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 240 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 380 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 120 \\
\hline
0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 16340
\end{array}\right)
$$

$$
\approx
\begin{array}{l}
L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 + L_2 \\ L_5 - 5L_2
\end{array}
\left(\begin{array}{cc|cccc|c|c}
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 180 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 240 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 380 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 360 \\
\hline
0 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 15140
\end{array}\right)
\approx
\begin{array}{l}
L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 \\ L_5 - 2L_1
\end{array}
\left(\begin{array}{cc|cccc|c|c}
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 180 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 420 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 200 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 360 \\
\hline
0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 14780
\end{array}\right)
$$

Cela donne $x_{11} = 360$ et $x_{12} = 180$.

g) La solution complète est :

	D_1	D_2	D_3	Production
O_1	10 360	14 180	13 0	540
O_2	15 0	16 200	13 420	620
Demandes	360	380	420	1160

EXERCICE 13.29

a) La matrice de consommation est $Q = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$.

b) $(I - Q) = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$, $(I - Q)^{-1} = \dfrac{1}{0,365}\begin{pmatrix} 0,52 & 0,14 & 0,23 \\ 0,18 & 0,61 & 0,22 \\ 0,11 & 0,17 & 0,54 \end{pmatrix}$

$$(I - Q)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 68 \\ 172 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,365}\begin{pmatrix} 0,52 & 0,14 & 0,23 \\ 0,18 & 0,61 & 0,22 \\ 0,11 & 0,17 & 0,54 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 68 \\ 172 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 240 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Le vecteur production est $P = \begin{pmatrix} 200 \\ 240 \\ 300 \end{pmatrix}$.

c) $(I - Q) \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 58 \\ 110 \end{pmatrix}$.

La demande était de 34 unités des produits de U_1, 58 unités des produits de U_2 et 110 unité des produits de U_3.

$(I - Q) \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 160 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 160 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 219 \end{pmatrix}$.

La demande était de 50 unités des produits de U_1, 2 unités des produits de U_2 et 219 unités des produits de U_3.

EXERCICE 13.30

	D_1	D_2	D_3	Production
O_1	12 x_{11}	14 x_{12}	14 $480 - x_{11} - x_{12}$	480
O_2	18 x_{21}	13 x_{22}	17 $540 - x_{21} - x_{22}$	540
O_3	15 $590 - x_{11} - x_{21}$	16 $640 - x_{12} - x_{22}$	12 $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} - 510$	720
Demandes	590	640	510	1 740

La fonction coût est : $w = 28\,870 - 5x_{11} - 4x_{12} - 2x_{21} - 8x_{22}$.

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccccc|c|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 480 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 540 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 590 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 640 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 510 \\
\hline
5 & 4 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 28870
\end{array}\right)
*
\approx
\begin{array}{l}
L_1 \\ L_2 - L_5 \\ L_3 \\ L_4 - L_5 \\ L_5 \\ L_6 - 8L_5
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|ccccc|c|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 480 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 590 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 130 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 510 \\
\hline
-3 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 24790
\end{array}\right)
$$

$$
\approx
\begin{array}{l}
L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - L_2 \\ L_5 + L_2 \\ L_6 - 8L_2
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|ccccc|c|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 480 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 590 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 540 \\
\hline
5 & 4 & -6 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 24550
\end{array}\right)
\approx
\begin{array}{l}
L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 - 5L_1
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|ccccc|c|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 480 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 510 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 110 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 540 \\
\hline
0 & -1 & -6 & 0 & -5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 22150
\end{array}\right)
$$

On trouve $x_{11} = 480$, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$ et $x_{22} = 540$. La solution complète est :

	D_1	D_2	D_3	Production
O_1	12 480	14 0	14 0	480
O_2	18 0	13 540	17 0	540
O_3	15 110	16 100	12 510	720
Demandes	590	640	510	1 740

EXERCICE 13.31

a)
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\
\hline
S_0 & 0,55 & 0,70 & 0,60 & 0,50 \\
S_1 & 0,10 & 0,05 & 0,15 & 0,25 \\
S_2 & 0,20 & 0,10 & 0,10 & 0,10 \\
S_3 & 0,15 & 0,15 & 0,15 & 0,15
\end{array}
$$
La matrice du modèle fermé est
$$
Q = \begin{pmatrix}
0,55 & 0,70 & 0,60 & 0,50 \\
0,10 & 0,05 & 0,15 & 0,25 \\
0,20 & 0,10 & 0,10 & 0,10 \\
0,15 & 0,15 & 0,15 & 0,15
\end{pmatrix}
$$

b) Le coût des produits agricoles utilisés pour produire 1 $ de biens industriels est de 0,25 $.

c) La matrice est $I - Q = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,70 & -0,60 & -0,50 \\ -0,10 & 0,95 & -0,15 & -0,25 \\ -0,20 & -0,10 & 0,90 & -0,10 \\ -0,15 & -0,15 & -0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

En résolvant, on trouve $\left(\begin{array}{cccc|c} 0,45 & -0,70 & -0,60 & -0,50 & 0 \\ -0,10 & 0,95 & -0,15 & -0,25 & 0 \\ -0,20 & -0,10 & 0,90 & -0,10 & 0 \\ -0,15 & -0,15 & -0,15 & 0,85 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3,793 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,828 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,046 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

La matrice production est donc $\begin{pmatrix} 3,793t \\ 0,828t \\ 1,046t \\ t \end{pmatrix}$.

d) Si la valeur des biens du secteur industriel est de 200 000 $, la valeur des biens du secteur S_0 est de 758 600 $, celle des produits du secteur S_1 est 165 600 $ et celle des produits du secteur S_2 est 209 200 $.

EXERCICE 13.32

a) Déterminons l'équation de la droite passant par le point P et perpendiculaire au plan. Le vecteur directeur de cette droite est $\vec{D}$ = (6; –3; 7) et l'équation de la droite est : $\Delta\colon \begin{cases} x = 7 + 6t \\ y = -2 - 3t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$

Pour trouver le point de rencontre, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, ce qui donne :
6(7 + 6t) – 3(–2 – 3*t*) + 7(4 + 7*t*) – 29 = 0 et 42 + 36*t* + 6 + 9*t* + 28 + 49*t* – 29 = 0.
D'où 94t + 47= 0 et *t* = –1/2. En substituant cette valeur de *t* dans les équations paramétriques de la droite, on trouve (*x*; *y*; *z*) = (4; –1/2; 1/2). Ce point est le pied de la hauteur abaissée de P(7; –2; 4) sur le plan ∏: 6*x* – 3*y* + 7*z* – 29 = 0.

b) Le produit vectoriel des vecteurs directeurs du plan donne : $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$

Le vecteur $\vec{D}_1$ = (10; 6; 2) est donc un vecteur directeur de la droite, le vecteur $\vec{D}_2$ = (5; 3; 1) également. L'équation de la droite est :

$$\Delta\colon \begin{cases} x = -11 + 5s \\ y = -8 + 3s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Pour trouver le point de rencontre, on doit déterminer s'il existe des scalaires s, *t* et *u* tels que :

$\begin{cases} -11 + 5s = 3 - 2t + 2u \\ -8 + 3s = 4 + 2t - 3u \\ 3 + s = 2 + 4t - u \end{cases}$. Ce qui donne le système d'équations $\begin{cases} 5s + 2t - 2u = 14 \\ 3s - 2t + 3u = 12 \\ s - 4t + u = -1 \end{cases}$

En résolvant, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -2 & 14 \\ 3 & -2 & 3 & 12 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -4 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 12 \\ 5 & 2 & -2 & 14 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 5L_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 22 & -7 & 19 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/5 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 3 \\ 0 & 22 & -7 & 19 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 11L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-7} & -14 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3/(-7) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2/2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

En posant *s* = 3 dans les équations paramétriques de la droite, on trouve (*x*; *y*; *z*) = (4; 1; 6). Ce point est le pied de la hauteur abaissée de P(–11; –8; 3) sur le plan ∏. On peut vérifier la concordance en posant *t* = 3/2 et *u* = 2 dans les équations paramétriques du plan.

EXERCICE 13.33

a) L'ensemble ne forme pas une base de $\mathbf{R}^3$ car il y a seulement 2 vecteurs et une base de $\mathbf{R}^3$ doit comporter 3 vecteurs.

b) L'ensemble comporte trois vecteurs. Il y en a suffisamment pour engendrer $\mathbf{R}^3$. On doit s'assurer qu'ils sont linéairement indépendants. En calculant le déterminant dont les lignes sont les composantes des vecteurs, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 + 4C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 4 & -3 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0$$

Le déterminant est nul, les vecteurs sont donc coplanaires (linéairement dépendants). Ils ne peuvent former une base de $\mathbf{R}^3$.

c) L'ensemble comporte quatre vecteurs de $\mathbf{R}^3$, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent former une base.

d) L'ensemble comporte trois vecteurs. Il y en a suffisamment pour engendrer $\mathbf{R}^3$. On doit s'assurer qu'ils sont linéairement indépendants. En calculant le déterminant dont les lignes sont les composantes des vecteurs, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -1(15 - 35) = 20 \neq 0$$

Le déterminant est non nul, les vecteurs sont donc linéairement indépendants et ils forment une base de $\mathbf{R}^3$.

e) On cherche des scalaires a, b et c tels que :
$a(2; 1; -4) + b(5; 1; 3) + c(3; -1; 9) = (9; 1; -1)$

Ce qui donne le système d'équations $\begin{cases} 2a + 5b + 3c = 9 \\ a + b - c = 1 \\ -4a + 3b + 9c = -1 \end{cases}$

On a donc :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 5 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 9 & -1 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ -4 & 3 & 9 & -1 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + 4L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} 3L_1 - L_2 \\ L_2 \\ 3L_3 - 7L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -40 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3/(-20) \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} L_1 + 8L_3 \\ L_2 - 5L_3 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} L_1/3 \\ L_2/3 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

On a donc $4(2; 1; -4) - (5; 1; 3) + 2(3; -1; 9) = (9; 1; -1)$.

EXERCICE 13.34

a) **Sous-ensemble non vide**

Le sous-ensemble est non vide puisque $(1; 1; -1) \in$ U.

Fermeture de l'addition

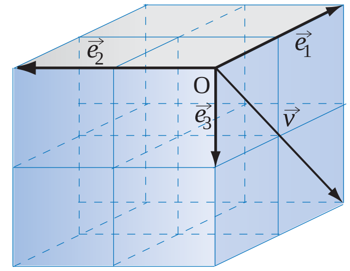
Soit $(a; b; a - 2b)$ et $(c; d; c - 2d)$, deux vecteurs quelconques de U. Alors,
$(a; b; a - 2b) + (c; d; c - 2d) = (a + c; b + d; a + c - 2b - 2d)$
Le vecteur résultant est dans U puisqu'il satisfait à la condition $z = x - 2y$.
Puisque les vecteurs sont quelconques, l'argument est valide pour tous les vecteurs de U. Le sous-ensemble U est donc fermé pour l'addition.

Fermeture de la multiplication par un scalaire

Soit $(a; b; a - 2b)$, un vecteur quelconque de U et soit k un nombre réel quelconque. Alors,
$k(a; b; a - 2b) = (ka; kb; ka - 2kb)$
Le vecteur résultant est dans U puisqu'il satisfait à la condition $z = x - 2y$.
Puisque le vecteur est quelconque et que le scalaire est quelconque, l'argument est valide pour tous les vecteurs de U et pour tous les scalaires. Le sous-ensemble U est donc fermé pour la multiplication par un scalaire.
Puisque U est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}^3$, fermé pour les deux opérations, on peut conclure que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

b) $\mathbf{B} = \{(1; 0; 1), (0; 1; -2)\}$, dimension 2.

EXERCICE 13.35



a) $\vec{e}_1 \bullet \vec{v} = \| \vec{e}_1 \| \| \vec{v} \| \cos\angle(\vec{e}_1, \vec{v})$. Géométriquement, cela signifie le produit du module de $\vec{e}_1$ par la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{e}_1$. La figure donne alors $\vec{e}_1 \bullet \vec{v} = 2 \times 2 = 4$.

b) On peut tracer plusieurs vecteurs dont la projection sur $\vec{e}_1$ est égale à 2 unités.

EXERCICE 13.36

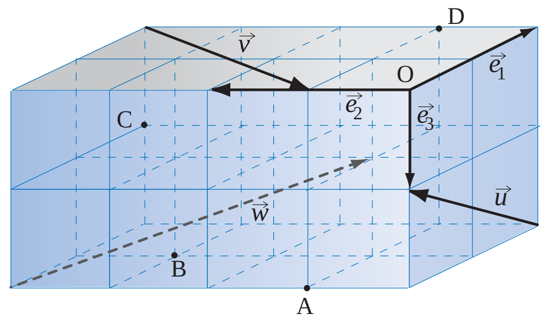
a) En exprimant les vecteurs dans la base, on obtient :

$\vec{u} = (-\vec{e}_1 - \vec{e}_3)$,

$\vec{v} = \left(-\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2\right)$ et

$\vec{w} = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right)$

En utilisant les propriétés des opérations sur les vecteurs, on peut alors effectuer les produits scalaires demandés. Cela donne :



$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{v} &= (-\vec{e}_1 - \vec{e}_3) \bullet \left(-\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2\right) \\
&= (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1) + \frac{3}{2}(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2) + (\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1) + \frac{3}{2}(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2), \text{ propriétés du produits scalaire;} \\
&= \| \vec{e}_1 \| \| \vec{e}_1 \| + 0 + 0 + 0, \text{ définition et produit de vecteurs perpendiculaires;} \\
&= 2 \times 2 = 4
\end{aligned}$$

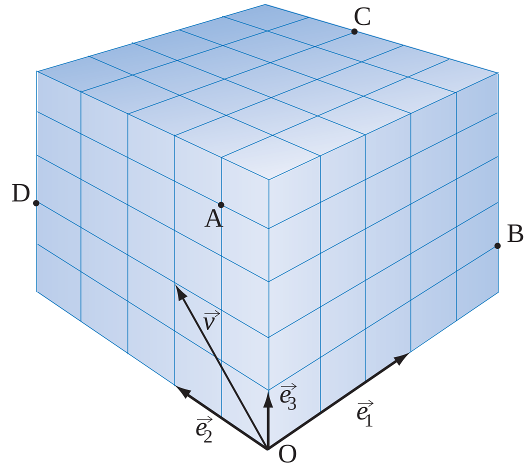
$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{w} &= (-\vec{e}_1 - \vec{e}_3) \bullet \left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right) \\
&= -\frac{1}{2}(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1) + \frac{3}{2}(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2) + (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3) - \frac{1}{2}(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1) + \frac{3}{2}(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2) + (\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3) \\
&= -\frac{1}{2}(\| \vec{e}_1 \| \| \vec{e}_1 \|) + (\| \vec{e}_3 \| \| \vec{e}_3 \|) \\
&= -\frac{1}{2} \times 4 + 1 = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v} \bullet \vec{w} &= \left(-\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2\right) \bullet \left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right) \\
&= -\frac{1}{2}(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1) + \frac{3}{2}(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2) + (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3) - \frac{3}{4}(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1) + \frac{9}{4}(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2) + \frac{3}{2}(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3) \\
&= -\frac{1}{2}(\| \vec{e}_1 \| \| \vec{e}_1 \|) + \frac{9}{4}(\| \vec{e}_2 \| \| \vec{e}_2 \|) \\
&= -\frac{1}{2} \times 4 + \frac{9}{4} \times 4 = 7
\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ et $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

c) $$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} &= \left(\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right) \bullet \left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) \\
&= \frac{1}{2}\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 + \frac{3}{4}\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 - 3\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 \\
&= \frac{1}{2}\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 \\
&= \frac{1}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 + 2 \times 1 = -2
\end{aligned}$$

EXERCICE 13.37



a) La direction du vecteur $\vec{e}_3 \times \vec{v}$ est perpendiculaire au plan défini par ces vecteurs. Il est donc dans la direction de $\vec{e}_1$. Son sens, donné par la règle du tire-bouchon est contraire à celui de $\vec{e}_1$. Son module $\| \vec{e}_3 \times \vec{v} \| = \| \vec{e}_3 \| \, \| \vec{v} \| \sin \angle(\vec{e}_3, \vec{v})$ est, géométriquement, la surface du parallélogramme construit sur les deux vecteurs. La figure permet de voir que celle-ci est de 2 unités d'aire. Le produit vectoriel est donc :
$\vec{e}_3 \times \vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{e}_1$.

b) $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{v}$

c) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{5}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = -\frac{5}{3}\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$

d)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \left(\frac{5}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \times \left(-\frac{5}{3}\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \\
&= -\frac{25}{9}\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + \frac{25}{6}\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \frac{5}{3}\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 - \frac{5}{3}\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 - \frac{5}{3}\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \\
&= \frac{25}{6}\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \frac{5}{3}\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 - \frac{5}{3}\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 - \frac{5}{3}\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \\
&= \frac{25}{6}(6\vec{e}_3) + \frac{5}{3}\left(-\frac{3}{2}\vec{e}_2\right) - \frac{5}{3}(-6\vec{e}_3) + \left(\frac{2}{3}\vec{e}_1\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{3}{2}\vec{e}_2\right) + \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{3}\vec{e}_1\right) \\
&= -\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 35\vec{e}_3
\end{aligned}$$

EXERCICE 13.38

a) Le plan est l'ensemble des points S(x; y; z) pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PS}} = (x - 3;\ y + 2;\ z - 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (4; –3; –2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (–6; –4; 4)$ sont coplanaires, c'est-à-dire que le produit mixte est nul. On a donc :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-4 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -20(x-3) - 4(y+2) - 34(z-4) = 0$$

Cela donne $-20x - 4y - 34z + 188 = 0$ ou $10x + 2y + 17z - 94 = 0$.

b) On peut déterminer la valeur absolue du produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ pour déterminer le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs. Puis, on divise par l'aire de la base, soit le module du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$. On obtient alors la hauteur du parallélépipède abaissée sur la base formée des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$. Cette hauteur est la distance cherchée.

c) Le plan est l'ensemble des points S(x; y; z) pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PS}} = (x + 5;\ y - 4;\ z - 6)$ et $\vec{u} = (2; 3; –1)$ sont perpendiculaires. Le produit scalaire donne alors :
$(x + 5;\ y - 4;\ z - 6) \bullet (2; 3; -1) = 0$, d'où $2x + 3y - z + 4 = 0$.

d) $$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

e) En substituant les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, on trouve :
$3(2 - 3t) + 4(4 + 2t) - 5(5 - t) - 9 = 0$, d'où $4t - 12 = 0$ et $t = 3$. En substituant cette valeur dans le équations paramétriques, on obtient $(x; y; z) = (–7; 10; 2)$. C'est le point de rencontre.

f) On doit déterminer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{D} = (–3; 2; –1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, où C(2; 4; 5) et B(3; 8; 2), puis diviser cette aire par la longueur de la base $\vec{D}$ pour trouver la hauteur du parallélogramme qui est la distance cherchée. Cela donne :

$$\vec{D} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 10\vec{j} - 14\vec{k} \ \text{ et } \ A = \| \vec{D} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}} \| = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2 + (-14)^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$\| \vec{D} \| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \text{ et } h = \frac{\| \vec{D} \times \overrightarrow{CB} \|}{\| \vec{D} \|} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{5}{7}\sqrt{42} \approx 4{,}63 \text{ unités.}$$

g) Le plan est perpendiculaire à $\prod_2$, le vecteur normal de $\prod_2$ est donc un vecteur directeur de $\prod_3$. Le vecteur directeur de Δ est également un vecteur directeur du plan $\prod_3$ et ce plan contient le point (2; 4; 5). On a donc :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t + 3s \\ y = 4 + 2t + 4s \\ z = 5 - t - 5s \end{cases}$$

EXERCICE 13.39

En représentant par une matrice et en échelonnant, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 28 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & -10 & -20 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 4L_1 + L_2 \\ L_2 \\ 2L_3 + L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -6 & 16 \\ 0 & -4 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 + 3L_3 \\ L_2 + 5L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/4 \\ L_2/(-4) \\ L_3/2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc une solution unique, (4; 5; 0), c'est le point de rencontre des trois plans décrits par ces équations.