

## TRAVAIL SUR LES CALCULS D'AIRES ET DE VOLUMES

201-NYB-05

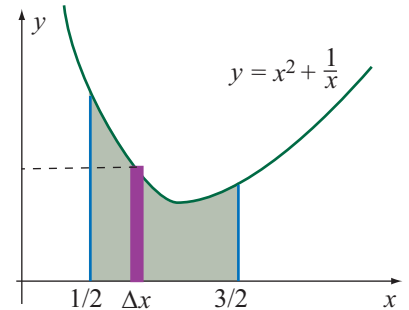
SESSION H-05

**Sans les évaluer**, poser les intégrales qu'il faudrait effectuer pour calculer les aires et les volumes suivants. (Dans chacun des cas, construire et décrire symboliquement un élément différentiel d'aire ou de volume, selon les cas, justifiant ainsi l'intégrale posée).

1. L'aire de la région ombrée de la figure ci-contre.

$$\Delta A = y \Delta x, \text{ d'où } \Delta A = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \Delta x \text{ et } dA = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\int_{1/2}^{3/2} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$$



2. L'aire de la région ombrée de la figure ci-contre.

Pour ne pas avoir à effectuer deux intégrales, il est préférable de considérer des tranches horizontales.

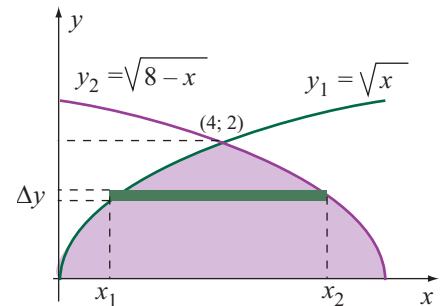
$$\Delta A = (x_2 - x_1) \Delta y$$

où  $x_2$  est obtenu en isolant  $x$  dans  $y = \sqrt{8-x}$ , cela donne  $x = 8 - y^2$

et  $x_1$  est obtenu en isolant  $x$  dans  $y = \sqrt{x}$ , cela donne  $x = y^2$ .

$$\Delta A = (8 - y^2 - y^2) \Delta y = (8 - 2y^2) \Delta y \text{ et } dA = (8 - 2y^2) dy$$

$$\int_0^2 (8 - 2y^2) dy$$

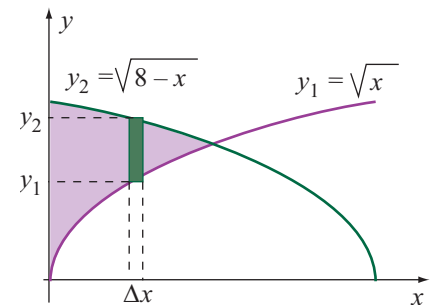


3. L'aire de la région ombrée de la figure ci-contre.

$$\Delta A = (y_2 - y_1) \Delta x \text{ où } y_2 = \sqrt{8-x} \text{ et } y_1 = \sqrt{x}.$$

$$\Delta A = (\sqrt{8-x} - \sqrt{x}) \Delta x \text{ et } dA = (\sqrt{8-x} - \sqrt{x}) dx$$

$$\int_0^4 (\sqrt{8-x} - \sqrt{x}) dx$$



4. L'aire de la région ombrée de la figure ci-contre.

$$\Delta A = (x_2 - x_1) \Delta y$$

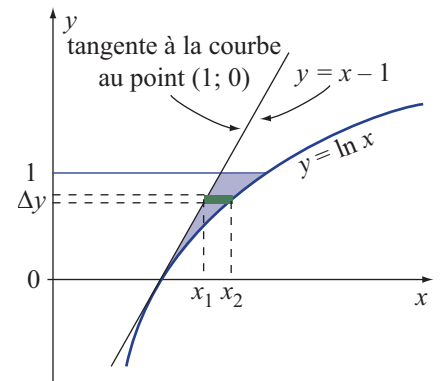
où  $x_2$  est obtenu en isolant  $x$  dans  $y = \ln x$ , cela donne  $x = e^y$  et  $x_1$  est obtenu en isolant  $x$  dans l'équation de la tangente. Le point de tangence est (1; 0)

et  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ , la pente de la tangente est donc  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1;0)} = \frac{1}{1} = 1$

et l'équation de la tangente est  $y = x - 1$ . On a donc  $x_1 = y + 1$ .

$$\Delta A = (e^y - (y + 1)) \Delta y = (e^y - y - 1) \Delta y \text{ et } dA = (e^y - y - 1) dy$$

$$\int_0^1 (e^y - y - 1) dy$$



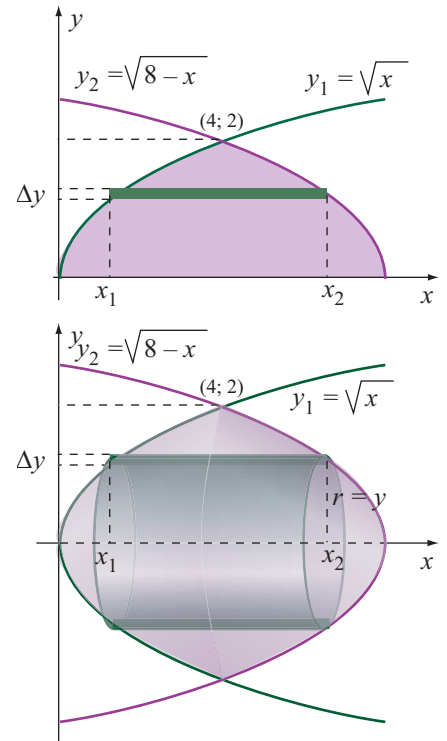
5. Le volume du solide obtenu par la rotation autour de l'axe des  $x$  de la région ombrée suivante.

On utilise la méthode des tubes pour effectuer une seule intégrale.

Le rayon du tube est  $y$ , sa hauteur est la longueur de la bande rectangulaire déterminée au numéro 2, soit  $h = (x_2 - x_1) = 8 - 2y^2$  et son épaisseur est  $\Delta y$ . On a donc :

$$\Delta V = 2\pi r h \Delta y = 2\pi y(8 - 2y^2) \Delta y \text{ et } dV = 4\pi(4y - y^3) dy$$

$$\text{et } V = 4\pi \int_0^2 (4y - y^3) dy$$



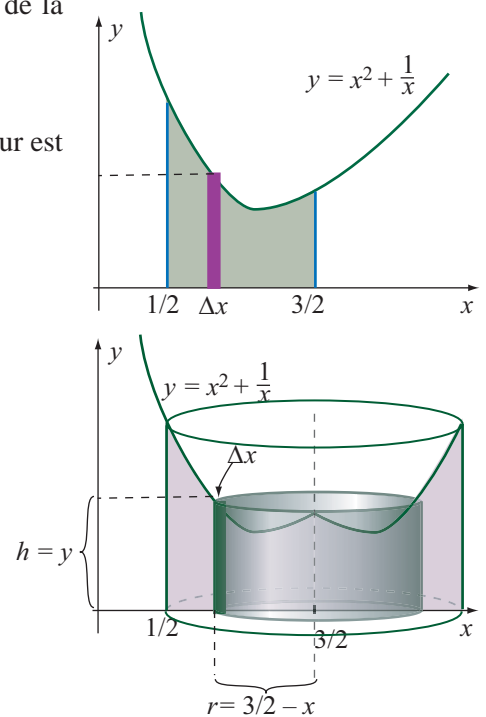
6. Le volume du solide obtenu par la rotation autour de la droite  $x = 3/2$  de la région ombrée suivante.

On utilise la méthode des tubes pour effectuer une seule intégrale.

Le rayon du tube est  $r = 3/2 - x$ , sa hauteur est  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  et son épaisseur est  $\Delta x$ . On a donc :

$$\Delta V = 2\pi \left( \frac{3}{2} - x \right) \left( x^2 + \frac{1}{x} \right) \Delta x \text{ et } dV = 2\pi \left( \frac{3x^2}{2} - x^3 + \frac{3}{2x} - 1 \right) dx$$

$$\text{et } V = 2\pi \int_{1/2}^{3/2} \left( \frac{3x^2}{2} - x^3 + \frac{3}{2x} - 1 \right) dx$$



7. Le volume du solide obtenu par la rotation autour de l'axe des  $y$  de la région ombrée suivante si on utilise la méthode des disques.

On a des disques troués. En utilisant les équations du numéro 4, on obtient que :

le rayon extérieur est  $R = x = e^y$ .

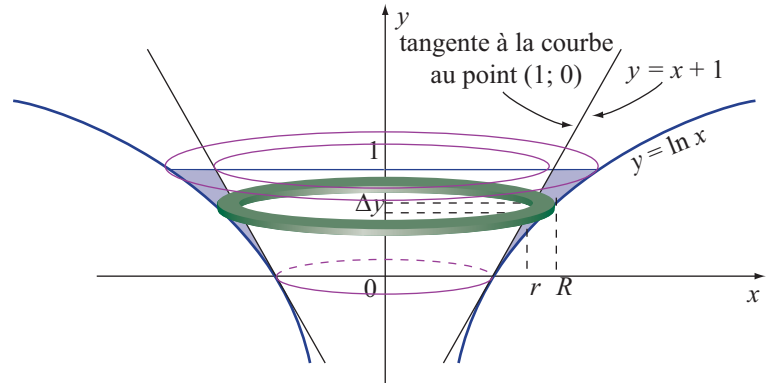
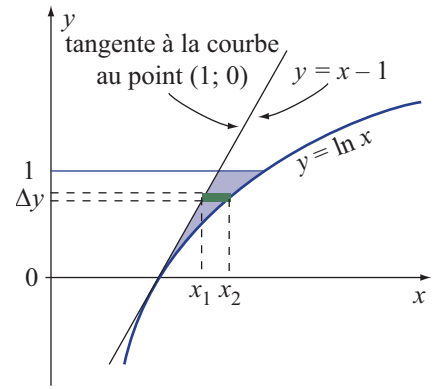
le rayon intérieur est  $r = x = y + 1$ .

$$\Delta V = \pi(R^2 - r^2) \Delta y = \pi(e^{2y} - (y + 1)^2) \Delta y$$

$$\text{et } dV = \pi(e^{2y} - (y^2 + 2y + 1)) dy$$

$$= \pi(e^{2y} - y^2 - 2y - 1) dy$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^{2y} - y^2 - 2y - 1) dy$$



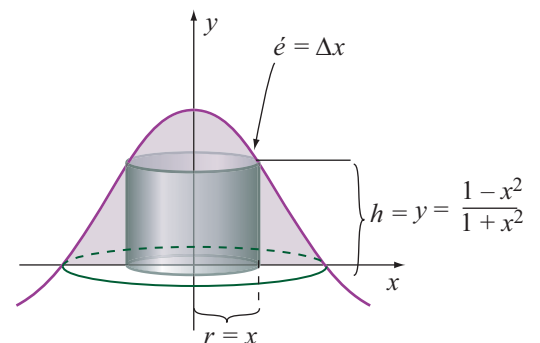
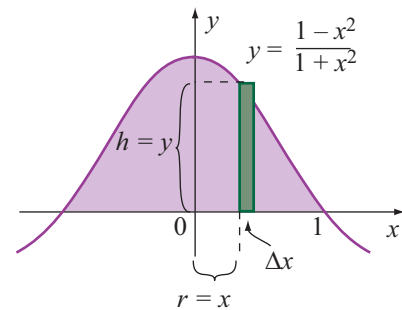
8. Le volume du solide obtenu par la rotation autour de l'axe des  $y$  de la région ombrée suivante, si on utilise la méthode des tubes.

Le rayon du tube est  $x$ , sa hauteur est  $h = y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  et son épaisseur est  $\Delta x$ . On a donc :

$$\Delta V = 2\pi x \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \Delta x \text{ et } dV = 2\pi x \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx$$

Puisque l'axe de rotation est l'axe de symétrie de la courbe, on intègre de 0 à 1, cela donne :

$$\text{et } V = 2\pi \int_0^1 x \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx$$



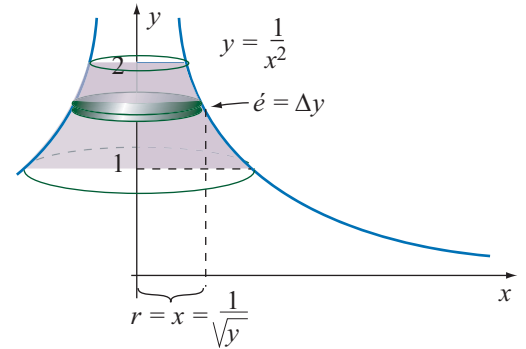
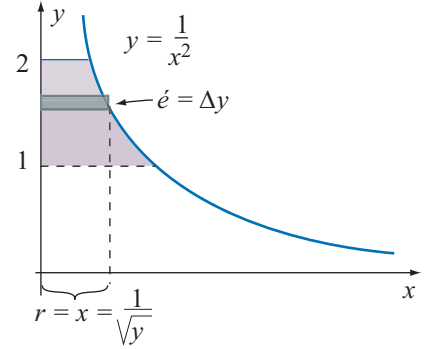
9. Le volume du solide obtenu par la rotation autour de l'axe des y de la région ombrée suivante, si on intègre par rapport à y.  
Si on intègre par rapport à y, on doit utiliser la méthode des disques pleins.

Le rayon est  $r = x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ , l'épaisseur est  $\Delta y$ . On a donc :

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta y = \pi \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 \Delta y = \pi \frac{1}{y} \Delta y$$

et  $dV = \pi \frac{1}{y} dy$

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{y} dy$$



10. Le volume du solide obtenu par la rotation autour de la droite  $y = 1$  de la région ombrée suivante.  
Le rayon du tube est  $r = y - 1$ ,

sa hauteur est  $h = x = \frac{1}{\sqrt{y}}$  et son épaisseur est  $\Delta y$ .

On a donc :

$$\Delta V = 2\pi(y-1) \frac{1}{\sqrt{y}} \Delta y \text{ et } dV = 2\pi \left( \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy$$

$$\text{et } V = 2\pi \int_1^2 \left( \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy$$

