CHAPITRE 12

EXERCICES 12.2

1. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{k+2}\times\frac{k+1}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|x\times\frac{k+1}{k+2}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k+2}\right| = |x|\times 1$$

La série converge pour $|x| < 1$ qui donne $-1 < x < 1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$, c'est la série harmonique alternée, elle converge.

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$, c'est la série harmonique , elle diverge.

L'intervalle de convergence est $[-1; 1[$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

2. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}x^{k+1}}{2^k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}|2x| = |2x|$$

La série converge pour $|2x| < 1$ qui donne $-1 < 2x < 1$ et en divisant par 2, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1/2$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\left(\frac{-1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$, la série diverge par oscillation.

Si $x = 1/2$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}1^k = \sum_{k=0}^{\infty}1$, elle diverge par le critère de divergence.

L'intervalle de convergence est $]-1/2; 1/2[$ et le rayon de convergence est $r = 1/2$.

3. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{k!}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x}{k+1}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right| = |x|\times 0 = 0$$

La limite est 0 pour toute valeur de x. La série converge pour tout x.
L'intervalle de convergence est $]-\infty; \infty[$ et le rayon de convergence est $r = \infty$.

4. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!\,x^{k+1}}{3^{k+1}}\times\frac{3^k}{k!\,x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k\,x}{3}\right| = \left|\frac{x}{3}\right|\lim_{k\to\infty}|k| = \infty$$

La série diverge sauf si $x = 0$ et $r = 0$.

5. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)^2}\times\frac{k^2}{2^k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|2x\times\frac{k^2}{(k+1)^2}\right| = |2x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^2}{(k+1)^2}\right| = |2x|\times 1 = |2x|$$

La série converge pour $|2x| < 1$ qui donne $-1 < 2x < 1$ et en divisant par 2, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1/2$, on a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\left(\frac{-1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$, c'est une série-$p$ alternée où $p = 2 > 1$. La série converge puisqu'elle converge absolument.

Si $x = 1/2$, on a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1^k}{k^2}$, c'est une série-$p$ où $p = 2 > 1$. La série converge.

L'intervalle de convergence est $[-1/2; 1/2]$ et le rayon de convergence est $r = 1/2$.

6. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{k!}{2^k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2x}{k+1}\right| = |2x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right| = |2x|\times 0 = 0$$

La série converge pour tout x. L'intervalle de convergence est $]-\infty; \infty[$ et le rayon de convergence est $r = \infty$.

7. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\times\frac{(2k)!}{x^{2k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)}\right| = |x^2|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\right| = |x^2|\times 0 = 0$$

La série converge pour tout x. L'intervalle de convergence est $]-\infty; \infty[$ et le rayon de convergence est $r = \infty$.

8. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)x^{k+1}}{1+(k+1)^2}\times\frac{1+k^2}{kx^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x(k+1)(1+k^2)}{k(1+(k+1)^2)}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(1+k^2)}{k(1+(k+1)^2)}\right| = |x|\times 1 = |x|$$

La série converge pour $|x| < 1$ qui donne $-1 < x < 1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{1+k^2}$, c'est une série alternée. Montrons qu'elle est convergente.

$\frac{k}{1+k^2} > \frac{k+1}{1+(k+1)^2}$. En effet, en effectant le produit des extrêmes et des moyens, on obtient :
$k^3 + 2k^2 + 2k > k^3 + k^2 + k + 1$, qui donne $k^2 + k > 1$, ce qui est vrai pour tout entier positif k.

De plus, $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{1+k^2}\right) = 0$. La série est donc convergente.

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{1+k^2}$, c'est une série divergente par le test du polynôme.

L'intervalle de convergence est $[-1; 1[$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

9. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}}\times\frac{3^k}{k(x-2)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|(x-2)\frac{(k+1)}{3k}\right| = |x-2|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)}{3k}\right| = |x-2|\times\frac{1}{3} = \frac{|x-2|}{3}$$

La série converge pour $\frac{|x-2|}{3} < 1$ qui donne $-1 < \frac{x-2}{3} < 1$ et $-3 < x-2 < 3$. En additonnant 2 à chacun des membres, on obtient $-1 < x < 5$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-3)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$, c'est une série alternée divergente car $\lim_{k\to\infty}(k) = \infty \neq 0$

Si $x = 5$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k3^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}k$, c'est une série arithmétique divergente.

L'intervalle de convergence est $]-1; 5[$ et le rayon de convergence est $r = 3$.

10. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{k+1}}{5^{k+1}}\times\frac{5^k}{(x-5)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x-4}{5}\right| = \left|\frac{x-4}{5}\right|$$

La série converge pour $\left|\frac{x-4}{5}\right|<1$ qui donne $-1<\frac{x-4}{5}<1$ et $-5 < x-4 < 5$. En additonnant 4 à chacun des membres, on obtient $-1 < x < 9$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-5)^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k} = 1+1+1+\ldots=\infty$, c'est une série divergente car $\lim_{k\to\infty}(1) = 1 \neq 0$.

Si $x = 5$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(5)^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-\ldots$, c'est une série divergente par oscillation.

L'intervalle de convergence est $]-1; 9[$ et le rayon de convergence est $r = 5$.

11. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{k+1}}{2^{k+1}}\times\frac{2^k}{(x-5)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x-5}{2}\right| = \left|\frac{x-5}{2}\right|$$

La série converge pour $\left|\frac{x-5}{2}\right|<1$ qui donne $-1<\frac{x-5}{2}<1$ et $-2 < x-5 < 2$. En additonnant 5 à chacun des membres, on obtient $3 < x < 7$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = 3$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-\ldots$, c'est une série divergente par oscillation.

Si $x = 7$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}1 = 1+1+1+\ldots$, c'est une série divergente car $\lim_{k\to\infty}(1) = 1 \neq 0$.

L'intervalle de convergence est $]3; 7[$ et le rayon de convergence est $r = 2$.

12. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{k+1}}{(k+1)^2}\times\frac{k^2}{(x-3)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-3)k^2}{(k+1)^2}\right| = |x-3|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^2}{(k+1)^2}\right| = |x-3|$$

La série converge pour $|x-3|<1$ qui donne $-1 < x-3 < 1$. En additonnant 3, on obtient $2 < x < 4$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = 2$, on a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$, c'est une série-$p$ alternée avec $p = 2 > 1$. Elle est absolument convergente donc convergente.

Si $x = 4$, on a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, c'est une série-$p$ avec $p = 2 > 1$, elle est donc convergente.

L'intervalle de convergence est $[2; 4]$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

13. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{k+1}}{(k+2)^2}\times\frac{(k+1)^2}{(x-5)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-5)(k+1)^2}{(k+2)^2}\right| = |x-5|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}\right| = |x-5|$$

La série converge pour $|x-5|<1$ qui donne $-1 < x-5 < 1$. En additonnant 5, on obtient $4 < x < 6$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = 4$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$, c'est une série-$p$ alternée avec $p = 2 > 1$. Elle est absolument convergente donc convergente.

Si $x = 6$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)^k}{(k+1)^2}$, c'est une série-$p$ avec $p = 2 > 1$, elle est donc convergente.

L'intervalle de convergence est $[4; 6]$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

14. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{k+1}}{(k+5)^3}\times\frac{(k+4)^3}{(x+1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+1)(k+4)^3}{(k+5)^4}\right| = |x+1|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+4)^3}{(k+5)^3}\right| = |x+1|$$

La série converge pour $|x+1|<1$ qui donne $-1 < x + 1 < 1$. En soustrayant 1, on obtient $-2 < x < 0$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -2$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+4)^3}$, c'est une série-$p$ alternée avec $p = 3 > 1$ (elle débute à $1/4^3$). Elle est absolument convergente donc convergente.

Si $x = 0$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+4)^3}$, c'est une série-$p$ alternée avec $p = 3 > 1$, elle est donc convergente.

L'intervalle de convergence est $[-2; 0]$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

15. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!\,(x-3)^{k+1}}{(k+2)^2}\times\frac{(k+1)^2}{k!\,(x-3)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-3)(k+1)^3}{(k+2)^2}\right| = |x-3|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^3}{(k+2)^2}\right| = \infty$$

La série diverge pour tout x, sauf $x = 3$ on a donc $r = 0$.

16. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{k+3}\times\frac{k+2}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x(k+2)}{k+3}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+2}{k+3}\right| = |x|$$

La série converge pour $|x| < 1$ qui donne $-1 < x < 1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+2}$, c'est une série harmonique alternée. Elle est conditionnellement convergente.

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k+2}$, c'est une série harmonique, elle est donc divergente.

L'intervalle de convergence est $[-1; 1[$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

17. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)^{1/3}}\times\frac{k^{1/3}}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x\,k^{1/3}}{(k+1)^{1/3}}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^{1/3}}{(k+1)^{1/3}}\right| = |x|\times 1 = |x|$$

La série converge pour $|x| < 1$ qui donne $-1 < x < 1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^k}{k^{1/3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^{1/3}}$, c'est une série-$p$ où $p = 1/3 < 1$. Elle est divergente.

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{1/3}}$, c'est une série alternée. Puisque $\frac{1}{k^{1/3}} > \frac{1}{(k+1)^{1/3}}$ pour tout k et que $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{1/3}} = 0$, elle est convergente.

L'intervalle de convergence est $]-1; 1]$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

18. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{k!}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x}{k+1}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right| = |x|\times 0 = 0$$

La série converge pour tout x.

L'intervalle de convergence est $]-\infty; \infty[$ et le rayon de convergence est $r = \infty$.

19. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2x^{k+1}}{5^{k+1}}\times\frac{5^k}{k^2x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x(k+1)^2}{5k^2}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2}{5k^2}\right| = |x|\times\frac{1}{5} = \frac{|x|}{5}$$

La série converge pour $\frac{|x|}{5}<1$ qui donne $-1<\frac{x}{5}<1$ et $-5 < x < 5$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -5$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2(-5)^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k^2$, c'est une série alternée divergente, car $\lim_{k\to\infty} k^2 = \infty \neq 0$.

Si $x = 5$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2 5^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2$, c'est une série à termes positifs divergente, car $\lim_{k\to\infty} k^2 = \infty \neq 0$.

L'intervalle de convergence est]–5; 5[et le rayon de convergence est $r = 5$.

20. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)^4}\times\frac{k^4}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x\,k^4}{(k+1)^4}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^4}{(k+1)^4}\right| = |x|\times 1 = |x|$$

La série converge pour $|x| < 1$ qui donne $-1 < x < 1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^4}$, c'est une série-$p$ alternée avec $p = 4 > 1$. Elle est absolument convergente donc convergente.

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k^4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^4}$, c'est une série-$p$ avec $p = 4 > 1$. Elle est donc convergente.

L'intervalle de convergence est [–1; 1] et le rayon de convergence est $r = 1$.

21. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{k+1}}{5^{k+1}}\times\frac{5^k}{(x+2)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x+2}{5}\right| = \left|\frac{x+2}{5}\right|$$

La série converge pour $\left|\frac{x+2}{5}\right|<1$ qui donne $-1<\frac{x+2}{5}<1$ et $-5 < x + 2 < 5$, d'où $-7 < x < 3$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -7$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5)^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$. Elle est divergente par oscillation.

Si $x = 3$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty}1 = 1\times\infty = \infty$. Elle est divergente.

L'intervalle de convergence est]–7; 3[et le rayon de convergence est $r = 5$.

22. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{k+1}}{k+1}\times\frac{k}{(x+2)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+2)k}{k+1}\right| = |x+2|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right| = |x+2|\times 1 = |x+2|$$

La série converge pour $|x + 2| < 1$ qui donne $-1 < x + 2 < 1$ et $-3 > x > -1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -3$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, c'est la série harmonique alternée. Elle est convergente.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}$, c'est la série harmonique. Elle est donc divergente.

L'intervalle de convergence est [–3; –1[et le rayon de convergence est $r = 1$.

23. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(x+2)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{k!}{k(x+2)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+2)}{k}\right| = |x+2|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k}\right| = 0$$

La série converge pour tout x.
L'intervalle de convergence est $]-\infty; \infty[$ et le rayon de convergence est $r = \infty$.

24. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{k+1}}{(k+1)^{1/2}}\times\frac{k^{1/2}}{(x+5)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x+5)k^{1/2}}{(k+1)^{1/2}}\right| = |x+5|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^{1/2}}{(k+1)^{1/2}}\right| = |x+5|\times 1 = |x+5|$$

La série converge pour $|x + 5| < 1$ qui donne $-1 < x + 5 < 1$ et $-6 < x > -4$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -6$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{1/2}}$, c'est une série-$p$ alternée. Elle est convergente puisque $\frac{1}{k^{1/2}} > \frac{1}{(k+1)^{1/2}}$ et $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{1/2}} = 0$.

Si $x = -4$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^{1/2}}$, c'est une série-$p$ avec $p = 1/2 < 1$. Elle est donc divergente.

L'intervalle de convergence est $]-6; -4[$ et le rayon de convergence est $r = 1$.

25. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{k!}{(x-5)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-5)}{k+1}\right| = |x-5|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right| = |x-5|\times 0 = 0$$

La série converge pour tout x. L'intervalle de convergence est $]-\infty; \infty[$ et le rayon de convergence est $r = \infty$.

26. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2x-5)^{k+1}}{(k+2)}\times\frac{k+1}{(2x-5)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2x-5)(k+1)}{k+2}\right| = |2x-5|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k+2}\right| = |2x-5|\times 1 = |2x-5|$$

La série converge pour $|2x - 5| < 1$ qui donne $-1 < 2x - 5 < 1$ et $4 < 2x > 6$, d'où $2 < x < 3$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = 2$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$, c'est une série harmonique alternée. Elle est convergente.

Si $x = 3$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{k+1}$, c'est une série harmonique. Elle est donc divergente.

L'intervalle de convergence est $[2; 3[$ et le rayon de convergence est $r = 1/2$.

27. La série est $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k2^k}$.

En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)2^{k+1}}\times\frac{k2^k}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x\ \ k}{(k+1)2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|\times 1 = \left|\frac{x}{2}\right|$$

La série converge pour $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ qui donne $-1 < \frac{x}{2} < 1$, d'où $-2 < x < 2$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -2$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, c'est une série harmonique alternée. Elle est convergente.

Si $x = 2$, on a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)^k}{k2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)^k}{k}$, c'est une série harmonique. Elle est donc divergente.

L'intervalle de convergence est $[-2; 2[$ et le rayon de convergence est $r = 2$.

28. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{k+1}}{k(k+2)}$.

En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+3)}\times\frac{k(k+2)}{x^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x\ \ k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right| = |x|\times 1 = |x|$$

La série converge pour $|x| < 1$ qui donne $-1 < x < 1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^{k+1}}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$. Elle est convergente par le test du polynôme.

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(1)^{k+1}}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+2)}$, c'est une série alternée qui converge absolument par le test du polynôme. Elle est donc convergente.

L'intervalle de convergence est [–1; 1] et le rayon de convergence est $r = 1$.

29. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{k}}{k(k+2)}$.

En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{k+2}}{(k+1)(k+3)}\times\frac{k(k+2)}{(x-3)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-3)\ \ k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right| = |(x-3)|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right| = |x-3|\times 1 = |x-3|$$

La série converge pour $|x-3| < 1$ qui donne $-1 < x - 3 < 1$, d'où $2 < x < 4$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = 2$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k(k+2)}$, c'est une série alternée qui converge absolument par le test du polynôme. Elle est donc convergente.

Si $x = 4$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^{k}}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$, c'est une série convergente par le test du polynôme.

L'intervalle de convergence est [2; 4] et le rayon de convergence est $r = 1$.

30. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{k+1}}{5^{k}}$.

En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+2}}{5^{k+1}}\times\frac{5^{k}}{x^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x}{5}\right| = \left|\frac{x}{5}\right|$$

La série converge pour $\left|\frac{x}{5}\right| < 1$ qui donne $-5 < x < 5$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -5$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-5)^{k+1}}{5^{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\times -5$, c'est une série alternée divergente, car la limite du terme général n'est pas nulle.

Si $x = 5$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(5)^{k+1}}{5^{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\times 5$, c'est une série alternée divergente, car la limite du terme général n'est pas nulle.

L'intervalle de convergence est]–5; 5[et le rayon de convergence est $r = 5$.

31. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5kx^k}{2k+1}$.

En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{5(k+1)x^{k+1}}{2k+2}\times\frac{2k+1}{5kx^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x(k+1)(2k+1)}{k(2k+3)}\right| = |(x)|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right| = |x|\times 1 = |x| < 1$$

La série converge pour $|x| < 1$ qui donne $-1 < x < 1$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5k}{2k+1}$, c'est une série alternée qui diverge car la limite du terme général est 5/2.

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k 5k}{2k+1}$, c'est une série à temes positifs qui diverge car la limite du terme général est 5/2.

L'intervalle de convergence est]–1; 1[et le rayon de convergence est $r = 1$.

32. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{2^k}$.

En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{k+1}}{2^{k+1}}\times\frac{2^k}{(x-1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x-1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right|$$

La série converge pour $\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1$ qui donne $-1 < \frac{x-1}{2} < 1$ et $-2 < x - 1 < 2$, d'où $-1 < x < 3$. Étudions le comportement aux frontières.

Si $x = -1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, c'est une série alternée qui diverge par oscillation.

Si $x = 3$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1^k = \infty$, c'est une série à terme constant, elle diverge car la limite du terme général est $1 \neq 0$.

L'intervalle de convergence est]–1; 3[et le rayon de convergence est $r = 2$.

33. La fonction est déjà sous la forme $\frac{1}{1-u}$, où $u = 2x$. On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$$

Elle converge pour $|2x| < 1$ et l'intervalle de convergence est]–1/2, 1/2[.

34. $$f(x) = \frac{1}{2-2x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Elle converge pour $|x| < 1$ et l'intervalle de convergence est]–1, 1[.

35. $$f(x) = \frac{x}{1-x} = x\times\frac{1}{1-x} = x\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$$

Elle converge pour $|x| < 1$ et l'intervalle de convergence est]–1, 1[.

36. $$f(x)=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\left(-\frac{x}{2}\right)^4+...\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+...\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{2^{k+1}}$$

Elle converge pour $\left|\frac{-x}{2}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|<1$ et l'intervalle de convergence est]–2, 2[.

37. Le développement est :

$$f(x)=\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+...=\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k \text{, pour } -1/2<x<1/2.$$

La dérivée est :

$$f'(x)=\frac{2}{(1-2x)^2}=2+8x+24x^2+64x^3+...=\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)2^k x^k \text{, pour } -1/2<x<1/2.$$

L'intégrale est :

$$\int\frac{1}{1-2x}dx=C+x+\frac{2x^2}{2}+\frac{4x^3}{3}+\frac{8x^4}{4}+\frac{16x^5}{5}+...=C+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{k+1}}{k+1}\text{, pour } -1/2<x<1/2.$$

38. Le développement est :

$$f(x)=\frac{1}{2-2x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}(1+x+x^2+x^3+x^4+...)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}x^k\text{, pour } -1<x<1.$$

La dérivée est :

$$f'(x)=\frac{1}{2(1-x)^2}=\frac{1}{2}(0+1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+...)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\text{, pour } -1<x<1.$$

L'intégrale est :

$$\int\frac{1}{2-2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x)+C=C+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...\right)=C+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2(k+1)}\text{, pour } -1<x<1.$$

39. Le développement est :

$$f(x)=\frac{x}{1-x}=x\times\frac{1}{1-x}=x(1+x+x^2+x^3+x^4+...)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+1}\text{, pour } -1<x<1.$$

La dérivée est :

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+...)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\text{, pour } -1<x<1.$$

L'intégrale est :

$$\int\frac{x}{1-x}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx=-x-\ln(1-x)+C=C-x+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...\right)=C-x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k}\text{, pour } -1<x<1.$$

40. Le développement est :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+...\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{2^{k+1}}\text{, pour } -2<x<2.$$

La dérivée est :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2} + \frac{2x}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{16} + \frac{5x^4}{32} + \dots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{2x}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{16} + \frac{5x^4}{32} + \dots\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}kx^{k+1}}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}kx^{k+1}}{2^{k+2}}, \text{ pour } -2 < x < 2.$$

L'intégrale est :

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln(x+2) + C = C + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{32} + \frac{x^5}{80}\dots\right) = C + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)2^k} = C + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{(k+1)2^{k+1}}$$

pour $-2 < x < 2$.

41. Le développement est :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

La dérivée est :

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -1 + \frac{2x}{2!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{5x^5}{5!} + \dots$$
$$= -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{4!} + \dots = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!} = -e^{-x}, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

42. Le développement est :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

La dérivée est :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = 0 + 2x + \frac{4x^3}{2!} + \frac{6x^5}{3!} + \frac{8x^7}{4!} + \dots = 2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

43. Puisque $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$, en posant $x = 1$, on obtient : $e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

44. Puisque $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, en posant $x = 1$, on obtient : $\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$

EXERCICES 12.4

1. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \ln(x+1),\ \text{d'où } f(0) = \ln 1 = 0\\
&f'(x) = \frac{1}{(x+1)},\ \text{d'où } f'(0) = 1\\
&f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2},\ \text{d'où } f''(0) = -1\\
&f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3},\ \text{d'où } f^{(3)}(0) = 2\\
&f^{(4)}(x) = \frac{-3\times 2}{(x+1)^4},\ \text{d'où } f^{(4)}(0) = -3!\\
&f^{(5)}(x) = \frac{4\times 3\times 2}{(x+1)^5},\ \text{d'où } f^{(5)}(0) = 4!\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&f^{(\mathrm{n})}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^5},\ \text{d'où } f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{3!\,x^4}{4!} + \frac{4!\,x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!\,x^n}{n!} + \ldots\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots
\end{aligned}
$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = \ln(x + 1)$ est donc :

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

2. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$
\begin{aligned}
&f(x) = e^x,\ \text{d'où } f(0) = e^0 = 1\\
&f'(x) = e^x,\ \text{d'où } f'(0) = e^0 = 1\\
&f''(x) = e^x,\ \text{d'où } f''(0) = e^0 = 1\\
&f^{(3)}(x) = e^x,\ \text{d'où } f^{(3)}(0) = e^0 = 1\\
&f^{(4)}(x) = e^x,\ \text{d'où } f^{(4)}(0) = e^0 = 1\\
&f^{(5)}(x) = e^x,\ \text{d'où } f^{(5)}(0) = e^0 = 1\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots
\end{aligned}
$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = e^x$ est donc :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

3. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x, \text{ d'où } f(0) = \sin 0 = 0\\
&f'(x) = \cos x, \text{ d'où } f'(0) = \cos 0 = 1\\
&f''(x) = -\sin x, \text{ d'où } f''(0) = -\sin 0 = 0\\
&f^{(3)}(x) = -\cos x, \text{ d'où } f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1\\
&f^{(4)}(x) = \sin x, \text{ d'où } f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0\\
&f^{(5)}(x) = \cos x, \text{ d'où } f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\\
&= 0 + x - 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} - 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots
\end{aligned}$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = \sin x$ est donc :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
&f(x) = \cos x, \text{ d'où } f(0) = \cos 0 = 1\\
&f'(x) = -\sin x, \text{ d'où } f'(0) = \cos 0 = 0\\
&f''(x) = -\cos x, \text{ d'où } f''(0) = -\sin 0 = -1\\
&f^{(3)}(x) = \sin x, \text{ d'où } f^{(3)}(0) = -\cos 0 = 0\\
&f^{(4)}(x) = \cos x, \text{ d'où } f^{(4)}(0) = \sin 0 = 1\\
&f^{(5)}(x) = -\sin x, \text{ d'où } f^{(5)}(0) = \cos 0 = 0\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots
\end{aligned}$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$ est donc :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

5. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
&f(x) = e^{-x}, \text{ d'où } f(0) = e^0 = 1\\
&f'(x) = -e^{-x}, \text{ d'où } f'(0) = -e^0 = -1\\
&f''(x) = e^{-x}, \text{ d'où } f''(0) = e^0 = 1\\
&f^{(3)}(x) = -e^{-x}, \text{ d'où } f^{(3)}(0) = -e^0 = -1\\
&f^{(4)}(x) = e^{-x}, \text{ d'où } f^{(4)}(0) = e^0 = 1\\
&f^{(5)}(x) = -e^{-x}, \text{ d'où } f^{(5)}(0) = -e^0 = -1\\
&\qquad\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ est donc :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

6. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{2x}, \text{ d'où } f(0) = e^0 = 1\\
f'(x) &= 2e^{2x}, \text{ d'où } f'(0) = 2e^0 = 2\\
f''(x) &= 4e^{2x}, \text{ d'où } f''(0) = 4e^0 = 4\\
f^{(3)}(x) &= 8e^{2x}, \text{ d'où } f^{(3)}(0) = 8e^0 = 8\\
f^{(4)}(x) &= 16e^{2x}, \text{ d'où } f^{(4)}(0) = 16e^0 = 16\\
f^{(5)}(x) &= 32e^{2x}, \text{ d'où } f^{(5)}(0) = 32e^0 = 32\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$
$$= 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \frac{32x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ est donc :

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \frac{32x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$$

7. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin 2x, \text{ d'où } f(0) = \sin 0 = 0\\
f'(x) &= 2\cos 2x, \text{ d'où } f'(0) = \cos 0 = 2\\
f''(x) &= -4\sin 2x, \text{ d'où } f''(0) = -\sin 0 = 0\\
f^{(3)}(x) &= -8\cos 2x, \text{ d'où } f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -8\\
f^{(4)}(x) &= 16\sin 2x, \text{ d'où } f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(5)}(x) &= 32\cos 2x, \text{ d'où } f^{(5)}(0) = \cos 0 = 32\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$
$$= 0 + 2x - 0 - \frac{8x^3}{3!} + 0 + \frac{32x^5}{5!} - 0 - \frac{128x^7}{7!} + \ldots$$
$$= 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!} + \ldots$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = \sin x$ est donc :

$$\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

8. Pour développer en série de Maclaurin, il faut évaluer les dérivées successives à $x = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos 2x, \text{ d'où } f(0) = \cos 0 = 1\\
f'(x) &= -2\sin 2x, \text{ d'où } f'(0) = 4\cos 0 = 0\\
f''(x) &= -4\cos 2x, \text{ d'où } f''(0) = -8\sin 0 = -4\\
f^{(3)}(x) &= 8\sin 2x, \text{ d'où } f^{(3)}(0) = -16\cos 0 = 0\\
f^{(4)}(x) &= 16\cos 2x, \text{ d'où } f^{(4)}(0) = 32\sin 0 = 16\\
f^{(5)}(x) &= -32\sin 2x, \text{ d'où } f^{(5)}(0) = 64\cos 0 = 0\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Par définition de la série de Maclaurin, on a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\\
&= 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{64x^6}{6!} + \ldots
\end{aligned}$$

Le développement en série de Maclaurin de la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$ est donc :

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{64x^6}{6!} + \ldots$$

9.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ln(x+1)) &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right)\\
&= 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{4x^3}{4} + \frac{5x^4}{5} - \ldots\\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}
\end{aligned}$$

On obtient cette dernière égalité en considérant $u = -x$ dans :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} u^k$$

10.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(e^x) &= \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\\
&= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \frac{5x^4}{5!} + \ldots\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x
\end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots\right)\\
&= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} \ldots\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x
\end{aligned}$$

12. $$\frac{d}{dx}(\cos x)=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)$$
$$=0-\frac{2x}{2!}+\frac{4x^3}{4!}-\frac{6x^5}{6!}+\frac{8x^7}{8!}\ldots$$
$$=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x7}{7!}-\ldots$$
$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=-\sin x$$

13. $$\frac{d}{dx}(e^{-x})=\frac{d}{dx}\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$
$$=0-1+\frac{2x}{2!}-\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}-\frac{5x^4}{5!}+\frac{6x^5}{6!}-\frac{7x^6}{7!}+\ldots$$
$$=-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$
$$=-\left(e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$
$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}=-e^{-x}$$

14. $$\frac{d}{dx}(e^{2x})=\frac{d}{dx}\left(1+2x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\frac{32x^5}{5!}+\ldots\right)$$
$$=0+2+\frac{8x}{2!}+\frac{24x^2}{3!}+\frac{64x^3}{4!}+\frac{160x^4}{5!}+\ldots$$
$$=2\left(1+2x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\ldots\right)$$
$$=2e^{2x}$$

15. $$\frac{d}{dx}(\sin 2x)=\frac{d}{dx}\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}-\frac{128x^7}{7!}+..\right)$$
$$=2-\frac{8\cdot 3x^2}{3!}+\frac{32\cdot 5x^4}{5!}-\frac{128\cdot 7x^6}{7!}+\ldots$$
$$=2-\frac{8x^2}{2!}+\frac{32x^4}{4!}-\frac{128x^4}{6!}+\ldots$$
$$=2\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}-\frac{64x^4}{6!}+\ldots\right)$$
$$=2\cos 2x$$

16. $$\frac{d}{dx}(\cos 2x)=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}-\frac{64x^6}{6!}+\ldots\right)$$
$$=0-\frac{8x}{2!}+\frac{16\cdot 4x^3}{4!}-\frac{64\cdot 6x^5}{6!}+\ldots$$
$$=-4x+\frac{16x^3}{3!}-\frac{64x^5}{5!}+\frac{256x^7}{7!}\ldots$$
$$=-2\left(2x+\frac{8x^3}{3!}-\frac{32x^5}{5!}+\frac{128x^7}{7!}\ldots\right)$$
$$=-2\sin 2x$$

17. En posant $u = -x$ dans le développement $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$, on obtient :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

18. En posant $u = 2x$ dans le développement $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$, on obtient :

$$e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

19. En posant $u = 2x$ dans le développement $\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots$, on obtient :

$$\sin 2x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

20. En posant $u = 2x$ dans le développement $\cos u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots$, on obtient :

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{64x^6}{6!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

21. En posant $u = x^2$ dans le développement $\ln(u+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{k+1}}{k+1} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$, on obtient :

$$\ln(x^2+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{k+1} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots, \text{ pour } -1 < x^2 \le 1 \text{ qui donne } -1 < x \le 1.$$

22. En posant $u = 3x$ dans le développement $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$, on obtient :

$$e^{3x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \frac{81x^4}{4!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

23. En posant $u = x^2$ dans le développement $\arctan u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{2k+1} = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \cdots$, on obtient :

$$\arctan x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{2k+1} = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \cdots, \text{ pour } -1 \le x^2 \le 1 \text{ qui donne } -1 < x \le 1.$$

24. En posant $u = x^3$ dans le développement $\cos u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots$, on obtient :

$$\cos x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{6k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

25. En posant $u = -x/2$ dans le développement $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$, on obtient :

$$e^{-x/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x/2)^k}{k!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4 \cdot 2!} - \frac{x^3}{8 \cdot 3!} + \frac{x^4}{16 \cdot 4!} - \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

26. En posant $u = -2x$ dans le développement $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$, on obtient :

$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} - \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

27. Puisque $\ln(u+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{k+1}}{k+1} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$, on a :

$$x^2 \ln(x+1) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x^2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^7}{4} + \cdots, \text{ pour } -1 \le x \le 1.$$

28. Puisque $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$, on a :

$$x^2 e^x = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

29. Puisque $\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots$, on a :

$$x \sin x = x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

30. Puisque $\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots$, on a :

$$\frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

31. Puisque $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$, on a :

$$\frac{1}{x} e^x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}.$$