

CHAPITRE 11

EXERCICES 11.2

1. Il ne peut rien conclure car la série harmonique est divergente et les termes de la série qu'il étudie sont plus petits que ceux de la série harmonique.
2. Il ne peut rien conclure car la série- p est convergente et les termes de la série qu'il étudie sont plus grands que ceux de la série- p avec $p = 2$.
3. Il peut conclure que la série qu'il étudie diverge car les termes de cette série sont plus grands que ceux de la série harmonique qui diverge.
4. Il peut conclure que la série qu'il étudie converge car les termes de cette série sont plus petits que ceux de la série- p avec $p = 2$.
5. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+3}{k^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^3} \left(1 + \frac{3}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{3}{k}\right) = 0 \times 1 = 0$. La limite du terme général est 0. On ne peut conclure.
6. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+5}{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k} \left(\frac{1+5/k}{2+1/k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5/k}{2+1/k}\right) = \frac{1}{2}$. La limite du terme général n'est pas nulle. La série diverge.
7. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$. La limite du terme général est 0. On ne peut conclure.
8. La série converge, donc la limite du terme général est 0.
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi + \cos 5\pi + \cos 6\pi + \dots = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$
La série diverge par oscillation, donc la limite du terme général n'est pas 0, elle n'existe pas.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{e^H}{1} = \infty$. La limite du terme général n'est pas nulle. La série diverge.
11. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{100k+1000} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k} \left(\frac{1+1/k}{100+1000/k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1+1/k}{100+1000/k}\right) = \frac{1}{100}$. La limite du terme général n'est pas nulle.
La série diverge.
12. La série converge, donc la limite du terme général est 0.
13. Puisque $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{2b^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, la série converge.
14. Puisque $\int_1^{\infty} \frac{x}{2x+1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(2x+1)) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(2b+1) - \ln 3) = \infty$, la série diverge.

$$15. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(x)) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \text{ la s\u00e9rie converge.}$$

$$16. \text{ Puisque } \int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x+1}{x^2+x} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(x^2+x)) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b^2+b) - \ln 2) = \infty, \text{ la s\u00e9rie diverge.}$$

$$17. \text{ Puisque } \int_1^{\infty} \frac{5}{2x} dx = \frac{5}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \frac{5}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(x)) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b) - \ln 1) = \infty, \text{ la s\u00e9rie diverge.}$$

$$18. \text{ Puisque } \int_1^{\infty} \frac{2}{x\sqrt{x}} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^{3/2}} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{-1/2}}{-1/2} \right) \Big|_1^b = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{x}} \right) \Big|_1^b \\ = -4 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \Big|_1^b = -4 \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right) - \frac{1}{1} \right) = 4$$

la s\u00e9rie converge.

$$19. \text{ Par comparaison, on a : } \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \text{ Or, la s\u00e9rie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge, puisque c'est une s\u00e9rie-}p \text{ avec } p=2.$$

Donc la s\u00e9rie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ converge \u00e9galement.

$$20. \text{ Par comparaison, on a : } \frac{1}{k} = \frac{k^2}{k^3} \leq \frac{k^2+1}{k^3} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \text{ Or, la s\u00e9rie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge, puisque c'est la s\u00e9rie harmonique.}$$

Donc la s\u00e9rie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3}$ diverge \u00e9galement.

$$21. \text{ Par comparaison, on a : } \frac{1}{3^k+4} < \frac{1}{3^k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \text{ Or, la s\u00e9rie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \text{ converge puisque c'est une s\u00e9rie g\u00e9om\u00e9trique}$$

de raison $1/3$. Donc la s\u00e9rie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+4}$ converge \u00e9galement.

$$22. \text{ Par comparaison, on a : } \frac{1}{k} < \frac{\ln k}{k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \text{ Or, la s\u00e9rie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge, puisque c'est la s\u00e9rie harmonique. Donc la}$$

s\u00e9rie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ diverge \u00e9galement.

$$23. \text{ Par comparaison, on a : } \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} = \frac{1}{k^{2/3}} > \frac{1}{k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \text{ Or, la s\u00e9rie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge, puisque c'est la s\u00e9rie harmonique.}$$

Donc la s\u00e9rie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ diverge \u00e9galement.

$$24. \text{ Par comparaison, on a : } \frac{3k}{k^3+3k+2} < \frac{3k}{k^3} = \frac{3}{k^2} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \text{ Or, la s\u00e9rie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge, puisque c'est une}$$

s\u00e9rie- p avec $p=2$. Donc la s\u00e9rie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k^2+3k+2}$ converge \u00e9galement.

25. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k}{k^2+2}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^2+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^2}{k^2} \times \frac{1}{1+2/k^2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+2/k^2} \right) = 1$$

Puisque $L > 0$ et que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+2}$ diverge également.

26. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{5}{2^k}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{2^k+3}}{\frac{5}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2^k+3} \times \frac{2^k}{5} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k}{2^k+3} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k}{2^k} \frac{1}{1+3/2^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+3/2^k} \right) = 1 \end{aligned}$$

Puisque $L > 0$ et que la série géométrique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2^k} = 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2^k+3}$ converge également.

27. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{k^2}{k^4} = \frac{1}{k^2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k^2+2k+1}{k^4+k-7}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^2+2k+1}{k^4+k-7} \times \frac{k^2}{1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^4+2k^3+k^2}{k^4+k-7} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^4}{k^4} \frac{1+2/k+1/k^2}{1+1/k^3-7/k^4} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2/k+1/k^2}{1+1/k^3-7/k^4} \right) = 1 \end{aligned}$$

Puisque $L > 0$ et que la série- p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^4+k-7}$ converge également.

28. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{1}{k}$. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3k+5}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3k+5} \times \frac{k}{1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{3+5/k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3+5/k} \right) = \frac{1}{3}$$

Puisque $L > 0$ et que la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k+5}$ diverge également.

29. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{k}{\sqrt{k^5}} = \frac{k^{2/2}}{k^{5/2}} = \frac{1}{k^{3/2}}$. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k+3}{\sqrt{k^5-2k}}}{\frac{1}{k^{3/2}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+3}{\sqrt{k^5-2k}} \times \frac{k^{3/2}}{1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^{5/2}}{k^{5/2}} \times \frac{1+3/k^{3/2}}{\sqrt{1-2/k^{3/2}}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3/k^{3/2}}{\sqrt{1-2/k^{3/2}}} \right) = 1$$

Puisque $L > 0$ et que la série- p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{\sqrt{k^5-2k}}$ converge également.

30. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{k-1}}{2^k+5}}{\frac{1}{2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k}{2^k+5} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k}{2^k} \times \frac{1}{1+5/2^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+5/2^k} \right) = 1$$

Puisque $L > 0$ et que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{2^k+5}$ diverge également.

31. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{3k}{k^3} = \frac{3}{k^2}$. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{3k}{k^3+3k+2}}{\frac{3}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3k}{k^3+3k+2} \times \frac{k^2}{1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3k^3}{k^3+3k+2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{1+3/k^2+2/k^3} \right) = 3$$

Puisque $L > 0$ et que la série- p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k^3+3k+2}$ converge également.

32. Effectuons un test de comparaison avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{1}{3^k}$. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^k+4}}{\frac{1}{3^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^k+4} \times \frac{3^k}{1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3^k}{3^k+4} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3^k}{3^k} \times \frac{1}{1+4/3^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+4/3^k} \right) = 1$$

Puisque $L > 0$ et que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$, la série géométrique de raison $1/3$, converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+4}$ converge également.

33. En effectuant un test du rapport de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{2^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k+1} \right) = 0$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

34. En effectuant un test du rapport de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1}}{k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+3}{2^{k+1}} \times \frac{2^k}{k+2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+3}{2(k+2)} \right) = \frac{1}{2}$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

35. En effectuant un test du rapport de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{3^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)!}{3^{k+1}} \times \frac{3^k}{k!} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{3} \right) = \infty$$

Puisque $Q = \infty$, la série diverge.

36. En effectuant un test du rapport de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5}{2k+3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2k+3} \times \frac{2k+1}{5} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2k+1}{2k+3} \right) = 1$$

Puisque $Q = 1$, le test ne permet pas de conclure.

Effectuons un test de comparaison à l'aide de la limite avec la série dont le terme général est $b_k = \frac{1}{k}$. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5}{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2k+1} \times \frac{k}{1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{5k}{2k+1} \right) = \frac{5}{2}$$

Puisque $L > 0$ et que la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2k+1}$ diverge également.

37. En effectuant un test du rapport de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)3^{k+1}}{5^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)3^{k+1}}{5^{k+1}} \times \frac{5^k}{k3^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3(k+1)}{5k} \right) = \frac{3}{5}$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

38. En effectuant un test du rapport de d'Alembert, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^2+3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)!}{k^2+2k+4} \times \frac{k^2+3}{k!} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)(k^2+3)}{k^2+2k+4} \right) = \infty$$

Puisque $Q = \infty$, la série diverge.

39. En effectuant un test de la racine k^{e} de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{4^k}} = \frac{1}{4} < 1$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

40. En effectuant un test de la racine k^{e} de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

41. En effectuant un test de la racine k^{e} de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{5}{k^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[k]{5}}{k}\right) = 0 < 1$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

42. En effectuant un test de la racine k^{e} de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{4^k}{2^{k+2}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{(2^2)^k}{2^k \times 2^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^2}{2^k \sqrt[k]{2^2}}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^2}{2^{k/2}}\right) = 2 > 1$$

Puisque $R > 1$, la série diverge.

43. En effectuant un test de la racine k^{e} de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{3}{8}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8} < 1$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

44. En effectuant un test de la racine k^{e} de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{1}{\ln k}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln k}\right) = 0 < 1$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

45. Le numérateur est un polynôme de degré 0 et le dénominateur est un polynôme de degré 2, on a donc $q - p = 2 > 1$. La série converge.

46. Le numérateur est un polynôme de degré 4 et le dénominateur est un polynôme de degré 1, on a donc $q - p = -3 < 1$. La série diverge.

On parvient à la même conclusion en montrant que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^4 - 2k}{k + 2} = \infty$. Puisque le terme général ne tend pas 0, la série diverge.

47. Le numérateur est un polynôme de degré 2 et le dénominateur est un polynôme de degré 3, on a donc $q - p = 1$. La série diverge.

48. Le numérateur est un polynôme de degré 3 et le dénominateur est un polynôme de degré 6, on a donc $q - p = 3 > 1$. La série converge.

49. Effectuons un test de d'Alembert. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)^2}{(k+1)!} \times \frac{k!}{k^2}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)^2}{(k+1)k!} \times \frac{k!}{k^2}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)}{k^2}\right) = 0$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

50. Puisque $\cos 2k\pi = 1$, en écrivant les premiers termes, on obtient :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

C'est une série- p de Riemann avec $p = 2 > 1$. Donc la série converge.

51. En effectuant un test de la racine k^e de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2}{k}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k}\right) = 0 < 1$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

52. Effectuons un test de d'Alembert. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{3^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3^k \times 3}{(k+1)k!} \times \frac{k!}{3^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{k+1} \right) = 0$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

53. Effectuons un test de d'Alembert. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4-k}{2^{k+1}} \times \frac{2^k}{5-k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4-k}{2(5-k)} \right) = \frac{1}{2}$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

54. Appliquons un test de l'intégrale en considérant la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$.

Puisque $\int xe^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$, on a :

$$\int_1^{\infty} xe^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b xe^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-x}(x+1)) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{b+1}{e^b} + \frac{2}{e} \right) = \frac{2}{e} < 1$$

Par conséquent, la série converge.

Remarquons que cela ne signifie pas que la somme de la série est $2/e$, mais simplement que la série converge.

55. Le terme général de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3}{k^3 - 2k + 4}$ est un quotient de polynômes. La différence des degrés est 1, par conséquent la série diverge.

56. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^{3/2}} = 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$. On a une constante fois une série- p de Riemann avec $p > 1$. La série converge.

57. En effectuant un test de la racine k^e de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k^{2/k}} \right)$$

Pour évaluer la limite du dénominateur, considérons $y = x^{2/x}$. En prenant le logarithme des deux membres, on obtient :

$$\ln y = \frac{2}{x} \ln x = \frac{2 \ln x}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{2/H}{1} = 0.$$

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/x} = e^0 = 1$. On trouve donc :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k^{2/k}} \right) = \frac{2}{1} = 2 > 1$$

Puisque $R > 1$, la série diverge.

58. Le terme général de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 7k + 2}{k^5 + k + 1}$ est un quotient de polynômes. La différence des degrés est plus grande que 1, par conséquent la série converge.

59. En effectuant un test de la racine k^e de Cauchy, on obtient :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{5k+1}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{5k+1}\right) = \frac{1}{5} < 1$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

60. Effectuons un test de d'Alembert. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{e^{k+1}} \times \frac{e^k}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{ek}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k} \times \frac{1+1/k}{e}\right) = \frac{1}{e} < 1$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

61. Effectuons un test de d'Alembert. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)!}{e^{k+1}} \times \frac{e^k}{k!}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)k!}{e^{k+1}} \times \frac{e^k}{k!}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)}{e}\right) = \infty$$

Puisque $Q = \infty$, la série diverge.

62. Procédons par comparaison directe. Puisque $\ln k < \sqrt{k}$, on a :

$$\frac{\ln k}{k^2} < \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

Puisque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ est une série- p avec $p > 1$, elle converge et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge également.

63. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + 1}$. Le terme général est $\frac{1}{2^k + 1}$ et il tend vers 0. Par comparaison directe, on a

$\frac{1}{2^k + 1} < \frac{1}{2^k}$. Or, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ est une série géométrique de raison $1/2$, elle converge donc et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + 1}$ converge aussi.

64. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$. Le terme général est $\frac{k}{2k+1}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Par conséquent, la série diverge.

65. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 1}{k^4 + 2}$. C'est un quotient de polynômes et la différence des degrés n'est pas supérieure à 1. Par conséquent, la série diverge.

66. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^3 + 3} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 3}$. Par comparaison, on a $\frac{k}{k^3 + 3} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est

une série- p avec $p = 2 > 1$. elle est donc convergente et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^3 + 3} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 3}$ converge également.

67. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^4 + 1}$. Par le test de d'Alembert, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{k+1}}{(k+1)^4 + 1} \times \frac{k^4}{3^k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3k^4}{(k+1)^4 + 1}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^4}{k^4} \frac{3}{(1+1/k)^4 + 1/k^4}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{(1+1/k)^4 + 1/k^4}\right) = 3$$

Puisque $Q > 1$, la série diverge.

68. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$. Par le test de d'Alembert, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{2^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k+1} \right) = 0$$

Puisque $Q < 1$, la série converge.

69. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{k^3}$. C'est un quotient de polynômes et la différence des degrés est 1. La série diverge.

70. En notation sigma, la série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k \cdot 3^k}$. Par le test de d'Alembert, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4^{k+1}}{(k+1)3^{k+1}} \times \frac{k3^k}{4^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4k}{3(k+1)} \right) = \frac{4}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right) = \frac{4}{3}$$

Puisque $Q > 1$, la série diverge.

71. Le terme général de la série est de la forme $\frac{c_p k^p + c_{p-1} k^{p-1} + c_{p-2} k^{p-2} + \dots}{d_q k^q + d_{q-1} k^{q-1} + d_{q-2} k^{q-2} + \dots}$, où c_p et d_q sont des nombres réels

positifs. Effectuons une comparaison à l'aide de la limite avec les termes de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{q-p}}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{c_p k^p + c_{p-1} k^{p-1} + c_{p-2} k^{p-2} + \dots}{d_q k^q + d_{q-1} k^{q-1} + d_{q-2} k^{q-2} + \dots} \times \frac{k^{q-p}}{1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{c_p k^q + c_{p-1} k^{q-1} + c_{p-2} k^{q-2} + \dots}{d_q k^q + d_{q-1} k^{q-1} + d_{q-2} k^{q-2} + \dots} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^q \times \left(\frac{c_p}{k^q} + \frac{c_{p-1}}{k^{q-1}} + \frac{c_{p-2}}{k^{q-2}} + \dots \right)}{k^q \times \left(\frac{d_q}{k^q} + \frac{d_{q-1}}{k^{q-1}} + \frac{d_{q-2}}{k^{q-2}} + \dots \right)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{c_p + c_{p-1}/k + c_{p-2}/k^2 + \dots}{d_q + d_{q-1}/k + d_{q-2}/k^2 + \dots} \right) = \frac{c_p}{d_q} \end{aligned}$$

Puisque la limite est un nombre positif les séries convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux. Cependant,

la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{q-p}}$ est une série de Riemann qui converge lorsque $q-p > 1$ et qui diverge lorsque $q-p \leq 1$. Lorsque $q-p = 1$, on compare à la série harmonique qui diverge.

72. Puisque $\ln k < \sqrt{k}$, on a par comparaison $\frac{\ln k}{k^2} < \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}$. Puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge également.

73. Puisque $\ln k < \sqrt{k}$, on a $\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\frac{1}{(\ln k)^2} > \frac{1}{k}$. Puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^2}$ diverge également.

EXERCICES 11.4

1. En notation sigma, la série s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+1)}$.

Puisque $\ln(k+1) < \ln(k+2)$, on a $\frac{1}{\ln(k+2)} \leq \frac{1}{\ln(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbf{R}$. De plus, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0$. Le théorème de convergence des séries alternées permet donc de conclure que la série converge, car les deux conditions sont satisfaites.

2. En notation sigma, la série s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{k-1}}{3^{k-1}}$.

Puisque $\frac{2k}{3^k} \leq \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}}$ pour tout $k \in \mathbf{R}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}} = 0$. Le théorème de convergence des séries alternées permet donc de conclure que la série converge, car les deux conditions sont satisfaites.

3. En notation sigma, la série s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{4k+3}$.

Pour comparer $a_{k+1} = \frac{k+1}{4k+7}$ et $a_k = \frac{k}{4k+3}$, mettons ces expressions au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{k+1}{4k+7} = \frac{(k+1)(4k+3)}{(4k+7)(4k+3)} = \frac{4k^2+7k+3}{(4k+7)(4k+3)} \quad \text{et} \quad \frac{k}{4k+3} = \frac{k(4k+7)}{(4k+7)(4k+3)} = \frac{4k^2+7k}{(4k+7)(4k+3)}$$

On a donc $\frac{k+1}{4k+7} \geq \frac{k}{4k+3}$ pour tout $k \in \mathbf{R}$. De plus, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{4k+3} = \frac{1}{4} \neq 0$. Le théorème de convergence des séries alternées permet donc de conclure que la série diverge, aucune des deux conditions n'est satisfaite.

4. En notation sigma, la série s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{k^3+1}$. On constate que l'on peut effectuer la division de polynômes

puisque $k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1)$. On a alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2-k+1}$.

On doit comparer $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2 - (k+1) + 1}$ et $a_k = \frac{1}{k^2 - k + 1}$. En développant, on a :

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2 - (k+1) + 1} = \frac{1}{k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 1} = \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

Puisque $k > 1$, on a $a_{k+1} = \frac{1}{k^2 + k + 1} \leq a_k = \frac{1}{k^2 - k + 1}$ donc pour tout $k \in \mathbf{R}$. De plus, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2 - k + 1} = 0$. Le théorème de convergence des séries alternées permet donc de conclure que la série converge, car les deux conditions sont satisfaites.

5. En notation sigma, la série s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

On a $a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} = a_k$ pour tout $k \in \mathbf{R}$. De plus, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$. Le théorème de convergence des séries alternées permet donc de conclure que la série converge, car les deux conditions sont satisfaites.

6. En notation sigma, la série s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k(k+2)}{3^k}$.

On doit comparer $a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+3)}{3^{k+1}}$ et $a_k = \frac{k(k+2)}{3^k}$. En développant, on a :

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+3)}{3^{k+1}} = \frac{k^2 + 4k + 3}{3^{k+1}} \text{ et } a_k = \frac{k^2 + 2k}{3^k}. \text{ Pour les comparer, mettons au même dénominateur. Cela donne :}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+3)}{3^{k+1}} = \frac{k^2 + 4k + 3}{3^{k+1}} \text{ et } a_k = \frac{k^2 + 2k}{3^k} = \frac{3k^2 + 6k}{3^{k+1}}. \text{ Puisque } k^2 + 4k + 3 \leq 3k^2 + 6k, \text{ pour tout } k \in \mathbf{R}, \text{ on a}$$

donc : $a_{k+1} = \frac{k^2 + 4k + 3}{3^{k+1}} \leq \frac{3k^2 + 6k}{3^{k+1}} = a_k$, pour tout $k \in \mathbf{R}$. De plus, en appliquant la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{3^x} = \lim_{H \ x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{3^x \ln 3} = \lim_{H \ x \rightarrow \infty} \frac{2}{3^x (\ln 3)^2} = 0. \text{ Par conséquent } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 + 2k}{3^k} = 0. \text{ Le théorème de convergence des}$$

séries alternées permet donc de conclure que la série converge, car les deux conditions sont satisfaites.

7. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 6} - \frac{1}{\ln 7} + \frac{1}{\ln 8} - \frac{1}{\ln 9} = 0,702\dots$ L'erreur maximale est $\frac{1}{\ln 10} \approx 0,434$.
8. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \frac{32}{243} + \frac{64}{729} - \frac{128}{2187} = 0,576\dots$ L'erreur maximale est $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \approx 0,039$.
9. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{21} - \frac{1}{31} + \frac{1}{43} - \frac{1}{57} + \frac{1}{72} - \frac{1}{91} = 0,7563\dots$ L'erreur maximale est $\frac{1}{111} \approx 0,009$.
10. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,17066\dots$ L'erreur maximale est $\frac{1}{\sqrt{13}} \approx 0,2773$.
11. $\frac{1 \times 3}{3} - \frac{2 \times 4}{3^2} + \frac{3 \times 5}{3^3} - \frac{4 \times 6}{3^4} + \frac{5 \times 7}{3^5} - \frac{6 \times 8}{3^6} = 0,448559\dots$ L'erreur maximale est $\frac{7 \times 9}{3^7} \approx 0,0288$.
12. La procédure d'estimation de la somme ne s'applique pas puisque la série est divergente. En effet : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.
13. En prenant la valeur absolue des termes, on obtient la série- p de Riemann où $p = 2$. La série est absolument convergente donc la série alternée converge.
14. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+1)}$. En prenant la valeur absolue des termes, on obtient la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$. Or, $\ln(k+1) < \sqrt{k+1}$.
Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\ln(k+1)}$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{1/2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k)^{1/2}}$ est une série- p où $p = 1/2$, elle est donc divergente. Par conséquent, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$ n'est pas absolument convergente. Cependant, elle est convergente comme nous l'avons vu au numéro 1 du présent exercice. Elle est donc conditionnellement convergente.

15. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{k-1}}{3^{k-1}}$. En prenant la valeur absolue des termes, on obtient la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$. C'est une série géométrique de raison $2/3$. Puisque la raison est comprise entre 0 et 1, la série converge. Par conséquent, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{k-1}}{3^{k-1}}$ est absolument convergente.

16. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{k^3+1}$. En prenant la valeur absolue des termes, on obtient la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)}{k^3+1}$. C'est un quotient de polynômes et la différence des degrés est $q-p=2>1$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{k^3+1}$ est donc absolument convergente.

17. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. En prenant la valeur absolue des termes, on obtient la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$. C'est une série- p , où $p=1/2$. Elle est donc divergente. Cependant, nous avons montré au numéro 5 du présent exercice que la série alternée est convergente. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ est donc conditionnellement convergente.

18. La série est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k(k+2)}{3^k}$. En prenant la valeur absolue des termes, on obtient la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{3^k}$. En appliquant le test de d'Alembert pour les séries à termes positifs, on obtient :

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)(k+3)}{3^{k+1}} \times \frac{3^k}{k(k+2)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)(k+3)}{3k(k+2)} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^2}{k^2} \times \frac{(1+1/k)(1+3/k)}{3(1+2/k)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(1+1/k)(1+3/k)}{3(1+2/k)} \right) = \frac{1}{3} < 1 \end{aligned}$$

Puisque $Q < 1$, la série est absolument convergente.

19. Vérifions d'abord si la série est absolument convergente. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Or, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est la série harmonique et elle diverge.

Vérifions maintenant si la série alternée converge. En comparant les termes, on obtient que :

$$a_{k+1} = \frac{1}{4k+4} < \frac{1}{4k} = a_k \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4k} = 0. \text{ Les deux conditions étant satisfaites, la série alternée converge.}$$

Puisque la série alternée converge et que la série formée de la valeur absolue des termes diverge, la série est conditionnellement convergente.

20. Vérifions d'abord si la série est absolument convergente. La série des valeurs absolues est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}}$. C'est une série- p avec $p=4/3 > 1$, Elle est donc convergente. Puisque la série formée de la valeur absolue des termes est convergente, la série alternée l'est également.

21. En développant quelques termes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k} = \frac{\cos \pi}{1} + \frac{\cos 2\pi}{2} + \frac{\cos 3\pi}{3} + \frac{\cos 4\pi}{4} + \frac{\cos 5\pi}{5} + \frac{\cos 6\pi}{6} + \dots = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

C'est le produit de -1 et de la série harmonique alternée. Celle-ci converge, mais elle n'est pas absolument convergente. La série est donc conditionnellement convergente.

22. Vérifions d'abord si la série est absolument convergente en appliquant le test de d'Alembert. Cela donne :

$$Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{2} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{k+1} \right| = 0.$$

Puisque $Q < 1$, la série est absolument convergente. Elle est donc convergente.

23. En appliquant le test de d'Alembert, on obtient :

$$Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{k+1}}{(k+1)^2} \times \frac{k^2}{2^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2k^2}{(k+1)^2} \right| = 2.$$

Puisque $Q > 1$, la série absolue est divergente.

Appliquons le test des séries alternées. Puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k}{k^2} \right) = \lim_{H \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k \ln 2}{2k} \right) = \lim_{H \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k (\ln 2)^2}{2} \right) = \infty$, la série alternée diverge.

24. En considérant la série formée de la valeur absolue des termes, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^k$. C'est une série géométrique de raison $2/5$. Elle converge et la série alternée est absolument convergente.

25. En développant quelques termes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi}{2k+1} = \frac{\cos 1\pi}{3} + \frac{\cos 2\pi}{5} + \frac{\cos 3\pi}{7} + \frac{\cos 4\pi}{9} + \frac{\cos 5\pi}{11} + \dots = \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{-1}{11} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

En considérant la série formée de la valeur absolue des termes, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$.

En appliquant un test de d'Alembert, on obtient : $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2k+3} \times \frac{2k+1}{1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2k+1}{2k+3} \right| = 1$.

Puisque $Q = 1$, on ne peut rien conclure.

Étudions la convergence de cette série par une comparaison avec la série harmonique à l'aide de la limite du rapport.

$$\text{Cela donne : } L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{b_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2k+1}}{\frac{1}{k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k}{2k+1} \right| = \frac{1}{2}.$$

Puisque $L = 1/2 > 0$ et que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ diverge également. La série n'est donc pas absolument convergente.

Cependant, $a_{k+1} = \frac{1}{2k+3} < \frac{1}{2k+1} = a_k$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2k+1} \right| = 0$. Les deux conditions de convergence des séries alternées étant satisfaites, la série converge. Elle est donc conditionnellement convergente.

26. En considérant la série formée de la valeur absolue des termes, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

C'est un quotient de polynômes. Le degré du numérateur est 0 et celui du dénominateur est 2. La différence est donc $q - p = 2$ et la série formée de la valeur absolue des termes est convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+2)}$ est absolument convergente.

27. En considérant la série formée de la valeur absolue des termes, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$.

C'est un quotient de polynômes. Le degré du numérateur est 2 et celui du dénominateur est 3. La différence est donc $q-p=1$ et la série formée de la valeur absolue des termes est divergente.

Étudions la série alternée. Par comparaison des termes, on a :

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1} \text{ et } a_k = \frac{k^2}{k^3+1}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} < a_k &\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1} < \frac{k^2}{k^3+1} \\ &\Leftrightarrow (k+1)^2(k^3+1) < k^2[(k+1)^3+1] \\ &\Leftrightarrow (k^2+2k+1)(k^3+1) < k^2[k^3+3k^2+3k+1+1] \\ &\Leftrightarrow k^5+2k^4+k^3+k^2+2k+1 < k^5+3k^4+3k^3+2k^2 \\ &\Leftrightarrow 2k+1 < k^4+2k^3+k^2 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a $a_{k+1} < a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{De plus, } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^3+1} = 0.$$

Les deux conditions de convergence des séries alternées étant satisfaites, la série converge. Elle est donc conditionnellement convergente.

28. En développant quelques termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots \\ &= 1 + 0 - 1 - 0 + 1 + 0 - 1 - 0 + \dots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \end{aligned}$$

La série alternée diverge par oscillation.

29. En développant quelques termes, on obtient : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^3} = \frac{\sin 1}{1^3} + \frac{\sin 2}{2^3} + \frac{\sin 3}{3^3} + \frac{\sin 4}{4^3} + \dots$

La série va comporter des termes positifs et des termes négatifs, mais ceux-ci ne seront pas en stricte alternance.

Si on considère la série formée des valeurs absolues, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^3} = \frac{|\sin 1|}{1^3} + \frac{|\sin 2|}{2^3} + \frac{|\sin 3|}{3^3} + \frac{|\sin 4|}{4^3} + \dots$$

Puisque $|\sin k| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc $\frac{|\sin k|}{k^3} \leq \frac{1}{k^3}$. Or, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ est une série- p où $p=3$. Elle est donc

convergente et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^3}$ également. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^3}$ est donc absolument convergente.

30. En considérant la série formée de la valeur absolue des termes, on obtient $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)}{k(k+1)}$. C'est un quotient de polynômes dont le degré du numérateur est 1 et celui du dénominateur est 2. La différence des degrés est $q-p=1$. Puisque la différence n'est pas supérieure à 1, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)}{k(k+1)}$ diverge et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+2)}{k(k+1)}$ n'est pas absolument convergente.

Étudions la série alternée. Par comparaison des termes, on a :

$$a_{k+1} = \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} \text{ et } a_k = \frac{k+2}{k(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} < a_k &\Leftrightarrow \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} < \frac{k+2}{k(k+1)} \\
&\Leftrightarrow k(k+1)(k+3) < (k+1)(k+2)^2 \\
&\Leftrightarrow k(k+3) < (k+2)^2 \\
&\Leftrightarrow k^2 + 3k < k^2 + 4k + 4 \\
&\Leftrightarrow 0 < k + 4
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$. Par conséquent, on a $a_{k+1} < a_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

De plus, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+2)}{k(k+1)} = 0$.

Les deux conditions de convergence des séries alternées étant satisfaites, la série converge. Elle est donc conditionnellement convergente.

31. En considérant la série formée de la valeur absolue des termes, on a $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln k}\right)^k$.

Appliquons le test de la racine k^e à cette série. Cela donne : $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{1}{\ln k}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln k} = 0$.

Puisque $R < 1$, la série converge. On a donc convergence absolue.

32. En considérant la série formée de la valeur absolue des termes, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+2}{3k-2}\right)^k$.

Appliquons le test de la racine k^e à cette série. Cela donne : $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+2}{3k-2}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+2}{3k-2}\right) = \frac{1}{3}$.

Puisque $R < 1$, la série converge. On a donc convergence absolue.

33. On cherche la valeur de n pour laquelle $|E_n| = |S - S_n| = a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < 0,01$.

En résolvant l'inéquation $\frac{1}{(n+1)^2} < 0,01$, on obtient $(n+1)^2 > \frac{1}{0,01} = 100$. D'où $n+1 > 10$ et $n > 9$

Il faut donc prendre $n = 10$ pour que l'erreur maximale commise soit inférieure à 0,01.

34. On cherche la valeur de n pour laquelle $|E_n| = |S - S_n| = a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 0,0001$.

Pour le déterminer, écrivons les premiers termes de la série. Ce sont :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} - \frac{1}{40320} + \dots
\end{aligned}$$

La valeur absolue du septième terme est $\frac{1}{5040} = 0,000198\dots$ et celle du huitième est $\frac{1}{40320} = 0,00002481\dots$.

Par conséquent, il suffit de prendre 8 termes pour que $|E_n| < 0,0001$.

35. On cherche la valeur de n pour laquelle $|E_n| = |S - S_n| = a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < 0,0001$.

Pour le déterminer, écrivons les premiers termes de la série. Ce sont :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^k} &= \frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^7} - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \frac{1}{46656} + \frac{1}{823543} - \dots\end{aligned}$$

La valeur absolue du cinquième terme est $\frac{1}{3125} = 0,00032$ et celle du sixième est $\frac{1}{46656} = 0,000092143\dots$.

Par conséquent, il suffit de prendre 6 termes pour que $|E_n| < 0,0001$.

36. On cherche la valeur de n pour laquelle $|E_n| = |S - S_n| = a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} < 0,0001$.

En résolvant l'inéquation $\frac{1}{3^{n+1}} < 0,0001$, on obtient $3^{n+1} > \frac{1}{0,0001} = 10000$. D'où $(n+1) \ln 3 = \ln 10000$ et

$$n+1 > \frac{\ln 10000}{\ln 3} = 8,383\dots \text{ qui donne } n > 7,383\dots$$

Il faut donc prendre $n = 8$ pour que l'erreur maximale commise soit inférieure à 0,0001.

CULTURE SCIENTIFIQUE

1. D'Alembert a rédigé le discours préliminaire et la plupart des articles mathématiques et plusieurs articles scientifiques de l'*Encyclopédie*.
2. Il concevait la dérivée d'une fonction comme la limite du quotient de la variation de la variable dépendante sur la variation de la variable indépendante. Cette façon de concevoir la dérivée d'une fonction en fait le précurseur de Cauchy (Augustin Louis, 1789-1858).
3. Il a rédigé des ouvrages sur la dynamique, l'équilibre et le mouvement des fluides, la théorie générale des vents et plusieurs articles en mathématiques et en philosophie.