DE LA COMPARAISON D'AIRES AU CALCUL DE π

par André Ross
professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

INTRODUCTION

Le calcul d'aires et de volumes, qui est une application importante du calcul intégral, a eu très tôt un intérêt pratique dans les sociétés agraires. Le calcul de la superficie d'un terrain pour partager un héritage ou le calcul du volume d'un contenant de denrées en vrac comme le blé ou le vin revêtent un intérêt commercial indiscutable.

Les pythagoriciens se sont intéressés aux longueurs, aux aires et aux volumes pour des raisons bien différentes. Un des credos de la société pythagoricienne était que l'Univers est entièrement régi par les nombres entiers. Les membres de cette société étaient convaincus qu'en découvrant les lois numériques qui gouvernent le monde, ils pourraient prétendre au divin et à l'immortalité. Pour découvrir ces secrets, ils ont déterminé des rapports portant sur les longueurs, les aires et les volumes de figures géométriques semblables. Ces rapports qui n'étaient pas considérés comme des nombres, seuls les entiers étaient des nombres, explicitaient une réalité de l'Univers qui n'est pas immédiatement apparente. Une réalité qui est du monde de l'Idée plutôt que du monde des sens.

Dans cet article, nous allons voir quelques problèmes et quelques méthodes de résolution qui, de la comparaison d'aires, des pythagoriciens vont nous mener au calcul par Archimède, en passant par les premières tentatives de quadrature et par la méthode d'exhaustion développée par Eudoxe et brillamment utilisée par Archimède.

COMPARAISON D'AIRES

La comparaison d'aires visait initialement à déterminer le rapport entre les lignes homologues et les aires dans des figures semblables (de même pour les volumes de solides). Le problème inverse consiste à construire une figure, semblable à une figure donnée, de telle sorte que le rapport de leurs aires soit dans un rapport donné. Par exemple, construire un carré dont l'aire est le double de celui d'un carré donné. On débouche tout naturellement sur la quadrature d'une figure quelconque, c'est-à-dire la construction d'un carré dont l'aire est égale à celle d'une figure donnée. La règle non graduée et le compas étant, selon les conditions imposées par Platon, les seuls instruments dont on peut se servir pour construire une telle figure.

RAPPORTS DE FIGURES SEMBLABLES

Rappelons la définition de figures semblables qui sert de fondement à la comparaison d'aires de telles figures.

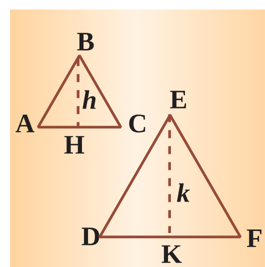
Définition
Figures semblables

Des figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux pris un à un et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

En utilisant cette définition, on peut facilement montrer que :

Théorème 1
Lignes homologues de figures semblables

Les lignes homologues de deux figures semblables sont dans le même rapport.



Les rapports des côtés sont égaux puisque les triangles ABC et DEF sont semblables. On a donc ;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

De plus, en abaissant les hauteurs BH et EK, on forme des triangles semblables BHC et EKF, d'où l'on tire :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{h}{k}$$

On peut alors comparer les aires et obtenir le résultat suivant :

Théorème 2
Aires de figures semblables

Les aires de deux figures semblables sont dans le rapport des carrés des lignes homologues.

En effet,

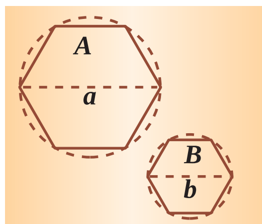
$$\frac{A_{\text{ABC}}}{A_{\text{DEF}}}=\frac{(\overline{AC}\times\overline{BH})/2}{(\overline{DF}\times\overline{EK})/2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{EK}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{DF}^2}=\frac{h^2}{k^2}$$

On a donc : $$\frac{A_{\text{ABC}}}{A_{\text{DEF}}}=\frac{h^2}{k^2}$$

On peut faire de même pour toutes les figures rectilignes semblables. Ainsi, le rapport des aires d'hexagones réguliers est égal au carré des diamètres des cercles circonscrits, soit :

$$\frac{A}{B}=\frac{a^2}{b^2}$$

Les propriétés décrites sous forme de rapports ont donc une portée très générale et rendent visibles à l'intellect des relations qui échappent aux sens. Bien sûr, une telle connaissance affine la perception et rend sensible une réalité qui autrement nous échappe.



Jusqu'où peut-on généraliser? Peut-on dire que le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leur diamètre respectif? À quoi peut-on comparer l'aire d'un cercle? Laissons cette question en suspens pour le moment.

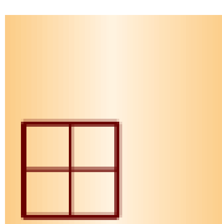
CONSTRUCTION DE FIGURES DANS UN RAPPORT

Le deuxième aspect est celui de la construction d'une figure, semblable à une figure donnée, mais dont l'aire est le double de celui de la figure donnée. Dans le Ménon de Platon (428-348 av.J.-C.), on trouve un problème de cette nature. Il s'énonce de la façon suivante :

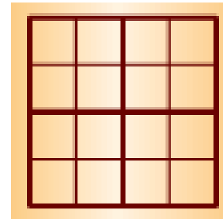
Construire un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné.

Dans son dialogue, Platon met en scène Socrate et un esclave et, pour faciliter la réflexion, il considère un carré de deux unités de côté. Socrate encourage l'esclave à proposer des solutions et à les critiquer.

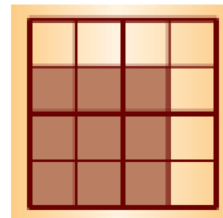
Pour faciliter la réflexion, le carré est subdivisé en quatre carrés. Le carré à construire doit donc comprendre huit de ces subdivisions.



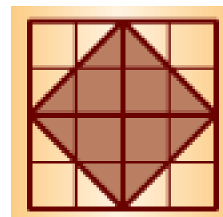
La première solution envisagée par l'esclave est celle de reproduire le carré sur ses côtés. Cela donne la figure ci-contre. Il est assez simple de constater que le nombre de subdivisions est supérieur à huit.



Par ses questions, Socrate amène l'esclave à rejeter cette première solution et l'encourage à en chercher une autre. Il propose alors de construire un carré dont le côté est une fois et demie celle du carré donné. Cela donne la troisième illustration ci-contre.



Encore une fois, les questions de Socrate amènent le rejet de cette solution. La troisième solution proposée qui donne la dernière illustration ci-contre se révèle être la bonne.

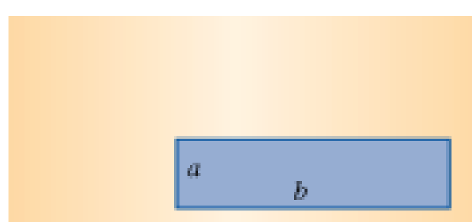


Le but de Platon dans ce dialogue est de nous convaincre de sa théorie de la Réminiscence. Pour lui, l'Âme a contemplé le monde des Idées entre deux réincarnations et c'est ce souvenir du monde des Idées que l'esclave retrouve en découvrant la solution. Acquérir la connaissance consiste à retrouver le souvenir des Idées. L'exemple choisi par Platon illustre l'intérêt qu'il portait à la construction de figures dont on peut comparer les aires par des rapports.

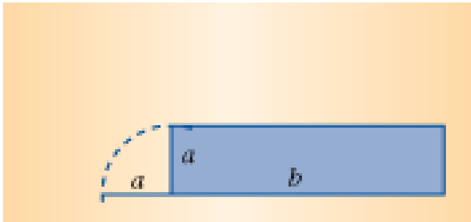
QUADRATURE D'UNE FIGURE

Le troisième aspect est celui de la construction, à la règle et au compas, d'un carré dont l'aire est la même que celle d'une figure géométrique donnée. Par exemple, pour construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle donné, on procède de la façon suivante :

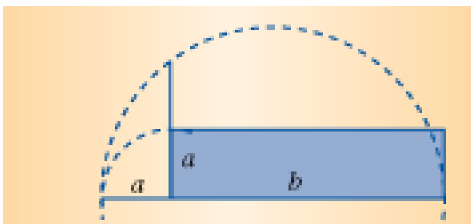
Considérons un rectangle de côtés a et b.



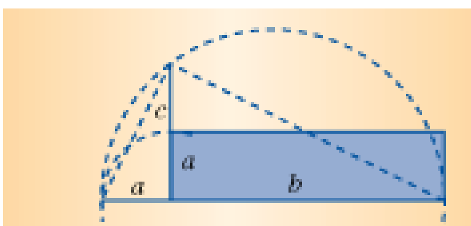
À l’aide du compas, reportons les longueurs des deux segments bout à bout sur une même droite.



Traçons le demi-cercle dont le diamètre est de longueur $a + b$ et élevons la perpendiculaire au point de jonction des segments de longueurs a et b.



En joignant le point d’intersection du demi-cercle et de la perpendiculaire, on forme un triangle rectangle dont le diamètre, $a + b$, est l’hypoténuse.

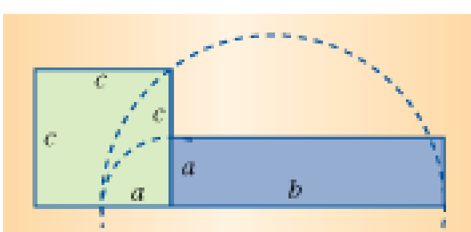


Puisque tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle et que, dans un triangle rectangle la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu’elle détermine sur l’hypoténuse, on a alors :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

d’où l’on obtient : $c^2 = ab$

C’et donc dire que c est la longueur du côté du carré dont l’aire est égale à celle du rectangle de côtés a et b.

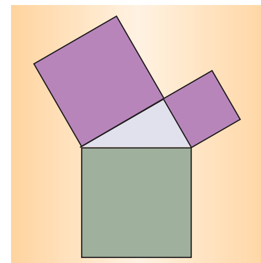


Peut-on réaliser la quadrature de toute figure géométrique?

DU CERCLE AUX LUNULES

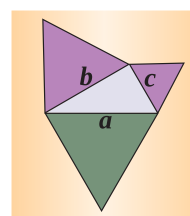
Un problème est resté célèbre, celui de la quadrature du cercle, soit la construction à la règle et au compas d’un carré dont l’aire est la même que celle d’un cercle donné. En cherchant la solution à ce problème, Hippocrate de Chio (vers ~450) a obtenu d’autres résultats, soit la quadrature des lunules. Une lunule est une figure délimitée par des arcs de cercle.

Pour déterminer l’aire de ces figures, Hippocrate se sert d’une généralisation du théorème de Pythagore. Ce théorème, on s’en souvient établit que : l’aire du carré construit sur l’hypoténuse d’un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l’angle droit.



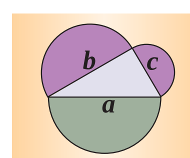
Cependant, le théorème 2 établit que : les aires de deux figures semblables sont dans le rapport des carrés des lignes homologues. Cela signifie que l’on peut interpréter le théorème en utilisant des aires de diverses formes. On obtient alors, par exemple :

L’aire du triangle équilatéral construit sur l’hypoténuse d’un triangle rectangle est égale à la somme des aires des triangles équilatéraux construits sur les côtés de l’angle droit.



ou encore :

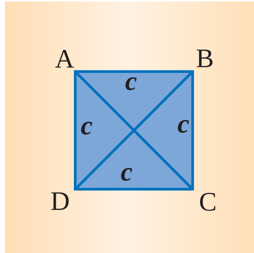
L’aire du demi-cercle construit sur l’hypoténuse d’un triangle rectangle est égale à la somme des aires des demi-cercles construits sur les côtés de l’angle droit.



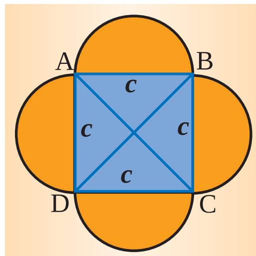
LUNULES DU CARRÉ

Nous allons voir comment Hippocrate a pu, à l’aide de cette dernière formulation, déterminer l’aire des lunules construites sur les côtés d’un carré.

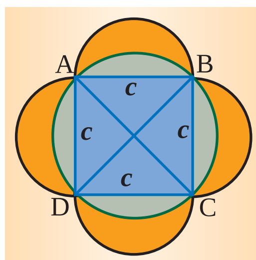
Considérons un carré ABCD de côté c et de diagonale d. Déterminons le point milieu de chacun des côtés et en prenant et traçons un demi-cercle ayant le côté comme diamètre.



Puis, inscrivons le carré dans un cercle. On a alors la troisième figure ci-contre ayant une lunule sur chacun des côtés du carré.



On obtient l'aire de ces quatre lunules en soustrayant de l'aire des quatre demi-cercles de diamètre c (ou des deux cercles de diamètre c) la différence entre l'aire des deux demi-cercles de diamètre d et celle du carré.



Nous modernes, ne sommes pas habitués à raisonner sans le support d'un symbolisme adéquat. Écrivons donc :

$$\begin{aligned} 4A_{\frown c} &= 4A_{\circleddash c} - (2A_{\circleddash d} - A_{\boxed{c}}) \\ &= 4A_{\circleddash c} - 2A_{\circleddash d} + A_{\boxed{c}} \\ &= A_{\boxed{c}}\text{ , car } 4A_{\circleddash c} = 2A_{\circleddash d} \end{aligned}$$

Cela établit le théorème suivant :

Théorème 3

Lunules du carré

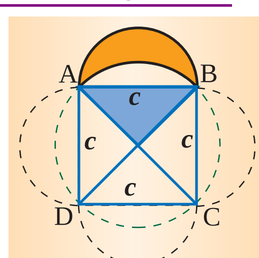
La somme des aires des quatre lunules construites sur les côtés d'un carré est égale à l'aire du carré.

On peut obtenir différents corollaires de ce théorème. Il suffit d'interpréter les figures pour voir comment on peut les déduire. Ainsi, on obtient :

Théorème 4

Lunules du triangle isocèle rectangle

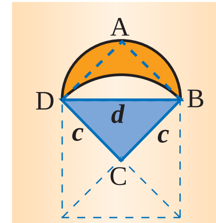
L'aire de la lunule construite sur l'hypoténuse d'un triangle isocèle rectangle est égale à l'aire de ce triangle.



Théorème 5

Lunule de la diagonale du carré

L'aire de la lunule construite sur la diagonale d'un carré est égale à la moitié de l'aire du carré (ou au quart de l'aire du carré construit sur la diagonale).

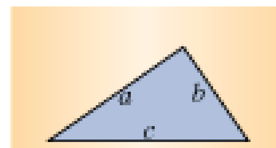


LUNULES D'UN TRIANGLE RECTANGLE

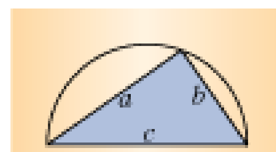
Établissons maintenant la relation entre la somme des aires des lunules construites sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et ces côtés.

Considérons un triangle rectangle dont les côtés sont de longueurs a, b et c. Par le théorème de Pythagore, et en écriture moderne, on a :

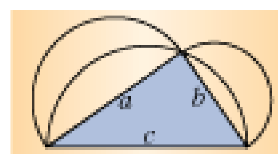
$$a^2 + b^2 = c^2$$



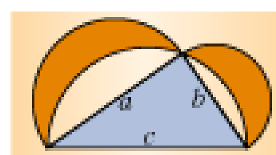
Traçons un demi-cercle en prenant l'hypoténuse c comme diamètre.



Puis traçons deux autres demi-cercles en prenant les côtés a et b de l'angle droit comme diamètres.



On forme ainsi les deux lunules ombrées de la figure ci-contre.



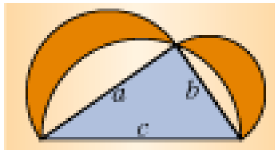
On constate que l'aire des lunules est obtenue en soustrayant de la somme des aires des demi-cercles construits sur les côtés de l'angle droit la différence de l'aire du demi-cercle construit sur l'hypoténuse et de celle du triangle. Symboliquement, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma A_{\frown} &= A_{\circleddash a} + A_{\circleddash b} - (A_{\circleddash c} - A_{\triangle}) \\ &= A_{\circleddash a} + A_{\circleddash b} - A_{\circleddash c} + A_{\triangle} \\ &= A_{\triangle}\text{ , car } A_{\circleddash a} + A_{\circleddash b} = A_{\circleddash c} \end{aligned}$$

Théorème 6

Lunules du triangle rectangle

La somme des aires des lunules construites sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égale à l'aire du triangle.

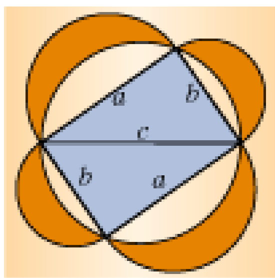


En reproduisant la figure ci-dessus et en faisant une copie avec une rotation de 180°. On obtient alors la figure suivante du théorème suivant[1] :

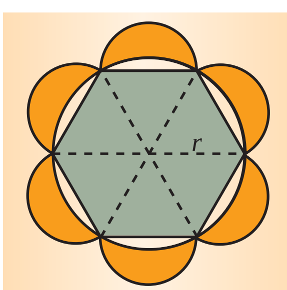
Théorème 7

Lunules du rectangle

La somme des aires des lunules construites sur les côtés d'un rectangle est égale à l'aire du rectangle.



On remarque la beauté de ces résultats qui sont les premiers établissant une relation entre une figure délimitée par des courbes et un figure rectiligne. Hippocrate est le premier à avoir déterminé de tels résultats qui manifestent une bonne connaissance de la géométrie. On peut étendre l'étude des lunules en déterminant, par exemple, la relation entre l'aire d'un hexagone et la somme des aires des lunules construites sur ces côtés et déduire en corollaire une relation entre l'aire d'un triangle équilatéral et la lunule construite sur un de ses côtés.



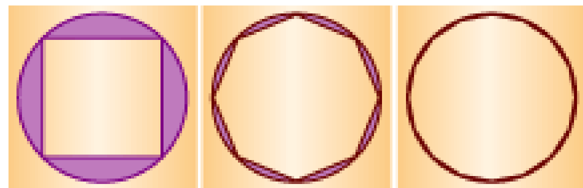
D'autres développements sur le calcul d'aires seront obtenus en explorant une autre piste pour obtenir la quadrature du cercle. Cette piste est ce que l'on appelle aujourd'hui la *méthode d'exhaustion*.

MÉTHODE D'EXHAUSTION

C'est Antiphon le sophiste (~480 à ~411), contemporain de Socrate (~470 à ~399), qui a énoncé l'idée qui constitue le fondement de la méthode d'exhaustion. Cherchant une nouvelle approche pour trouver l'aire d'un cercle, il a énoncé le postulat suivant :

Postulat d'Antiphon

En doublant le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant successivement l'opération, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



Avant d'aller plus loin, il faut rappeler que le mot « postulat » signifie une « demande ». Avant de présenter l'argumentation, on demande si l'interlocuteur accepte sans démonstration un principe qui sera utilisé comme argument.

Définition

Postulat

Un *postulat* est un principe d'un système déductif qui ne peut être utilisé sans l'accord de l'interlocuteur.

L'enjeu est de taille. Si l'interlocuteur accepte le postulat, il doit accepter les conclusions des théorèmes et démonstrations auxquels il sert de justification. Si l'interlocuteur n'accepte pas le postulat, il rejette toutes les conclusions qui en découlent.

Est-il envisageable de ne pas accepter ce postulat? À l'époque, il fut critiqué par les tenants de la thèse selon laquelle les grandeurs sont infiniment divisibles. Ils en concluaient que le procédé d'Antiphon ne pourrait jamais donner l'aire du cercle. Car, en acceptant ce principe, il est toujours possible de diviser la différence entre l'aire d'un cercle et l'aire d'un polygone inscrit quel que soit son nombre de côtés. Il est donc impossible que l'aire du polygone puisse être égale au cercle. Cette critique est similaire à celle du paradoxe de la flèche de Zénon. Puisqu'une longueur est infiniment divisible, la flèche d'Achille ne peut jamais atteindre la cible car il reste toujours une demi-longueur à parcourir. De la même façon, puisqu'une aire est infiniment divisible, l'aire du polygone ne peut jamais égaler celle du cercle, il y a toujours une différence non nulle.

Le postulat d'Antiphon reconnaît implicitement l'existence d'une valeur limite, ce qui revient à reconnaître un infini actuel alors qu'il s'agit d'un infini potentiel, d'un processus qui n'a jamais de fin.

Pour contourner les critiques et énoncer un principe utilisable dans un argument déductif, il fallait formuler l'idée autrement. C'est Eudoxe de Cnide (~406 à ~355) qui va reprendre cette idée et la développer. Eudoxe semble s'être spécialisé dans la reformulation de concepts pour éviter les paradoxes. La découverte des irrationnels par les pythagoriciens avait sapé les fondements de leur théorie des proportions. Pour préserver les résultats obtenus par les pythagoriciens, en particulier sur les figures semblables, Eudoxe a donné à la théorie des proportions de nouveaux fondements qui sont repris par Euclide dans le livre V des Éléments. Eudoxe reformule le postulat d'Antiphon de la façon suivante :

Postulat d'Eudoxe

Si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste, on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié et ainsi de suite, à la longue, la grandeur restante peut être rendue plus petite que n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature.

Ce postulat est très intéressant, il reconnaît la divisibilité infinie des grandeurs et l'exploite. La divisibilité infinie étant possible, on peut rendre une grandeur donnée aussi petite que l'on voudra en lui soustrayant itérativement une partie supérieure ou égale à la moitié de la partie restante.

En utilisant la notation moderne, on peut illustrer numériquement ce postulat en considérant une grandeur a dont on soustrait les deux tiers de la valeur. On a alors :

$$a - \frac{2}{3}a = \frac{3a}{3} - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$$

En soustrayant du reste les deux tiers de sa valeur, on obtient :

$$\frac{a}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{a}{3} = \frac{3a}{9} - \frac{2a}{9} = \frac{a}{9}$$

En soustrayant à nouveau les deux tiers du reste, on obtient :

$$\frac{a}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{a}{9} = \frac{3a}{27} - \frac{2a}{27} = \frac{a}{27}$$

Le postulat affirme qu'en poursuivant le processus, on peut rendre le reste plus petit que toute grandeur prédéfinie. Par exemple, on peut le rendre plus petit que $a/1000$. Il suffit de remarquer que le reste est $a \times (1/3)^n$, où n est le nombre d'itérations. On doit donc déterminer n tel que :

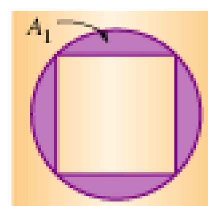
$$a\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{a}{1000}$$

d'où : $$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{1000}$$

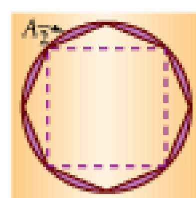
et : $$3^n > 1000$$

On trouve alors qu'il suffit de 7 itérations pour que le reste soit rendu plus petit que $a/1000$. Le postulat affirme que quelle que soit la grandeur prédéfinie, il est toujours possible de rendre le reste plus petit que cette grandeur en effectuant ces soustractions successives.

Considérons à nouveau le cercle et le carré inscrit. L'aire du carré inscrit est supérieure à la moitié de l'aire du cercle. La différence de ces aires donne l'aire A_1 de la partie ombrée de la figure ci-contre.



En doublant le nombre de côtés, on obtient un octogone inscrit. On constate que sur chaque côté du carré, on a construit un triangle dont l'aire est supérieure à la moitié de l'aire comprise entre le côté du carré et l'arc de cercle ayant ce côté comme corde. La somme des aires des quatre triangles est supérieure à la moitié de A_1. Si on soustrait cette somme de A_1, on obtient A_2, l'aire entre le cercle et l'octogone inscrit.



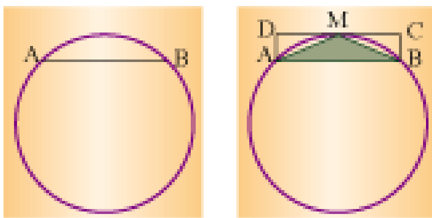
En poursuivant le processus, on peut rendre la différence entre l'aire du cercle et celle du polygone aussi petite que l'on voudra. Cette illustration à partir d'un carré dont on double le côté n'a pas un caractère très général. Dans son postulat, Antiphon doublait le nombre de côtés d'un polygone régulier, pas seulement d'un carré. Cependant, à l'aide du postulat d'Eudoxe on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 8

Aire du cercle et du polygone régulier inscrit

La différence entre l'aire d'un cercle et l'aire d'un polygone régulier inscrit peut être rendue aussi petite que toute aire prédéfinie.

Voici l'idée de la preuve. Soit un cercle, AB un côté d'un polygone régulier inscrit et A la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



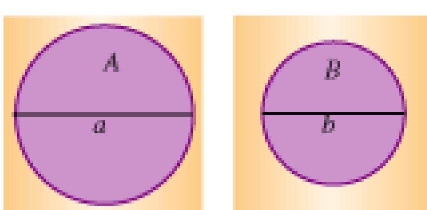
Sur AB comme côté, construisons le rectangle ABCD tel que le côté CD soit tangent au cercle et déterminons le point M milieu de CD. L'aire du triangle AMB est alors la moitié de l'aire du rectangle ABCD. Elle est donc supérieure à la moitié de l'aire du segment circulaire AMB. En soustrayant de A le produit de l'aire du triangle par le nombre de côtés du polygone régulier, on obtient la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone obtenu en doublant le nombre de côtés. En poursuivant le processus, on peut rendre la différence entre ces aires plus petite que toute grandeur d'aire prédéfinie. Voyons maintenant comment le postulat d'Eudoxe est utilisé dans une démonstration.

Théorème 9

Aire du cercle et diamètre

Le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres.

Voici l'idée de la preuve[2]. Soit deux cercles de diamètres a et b et dont les aires sont A et B respectivement.

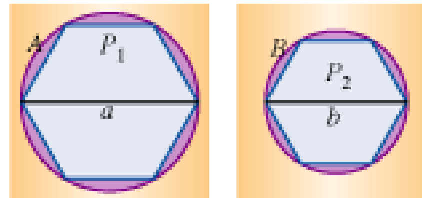


Supposons que le rapport des aires est plus grand que le rapport des carrés des diamètres, soit :

$$\frac{A}{B} > \frac{a^2}{b^2}$$

Dans le premier cercle, inscrivons un polygone régulier dont l'aire diffère si peu de A que l'on a :

$$\frac{A}{B} > \frac{P_1}{B} > \frac{a^2}{b^2}$$



Cela est possible en vertu du théorème précédent. Considérons de plus le polygone régulier semblable inscrit dans le deuxième cercle et notons P_2 son aire. Alors, puisque les polygones sont semblables, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

On a donc : $$\frac{A}{B} > \frac{P_1}{B} > \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

et : $$\frac{P_1}{B} > \frac{P_1}{P_2}$$

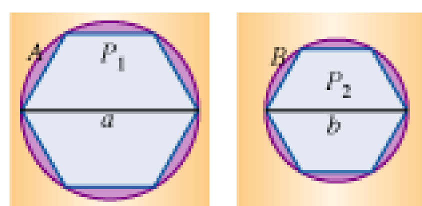
Puisque les numérateurs sont égaux, on obtient $P_2 > B$, ce qui est une contradiction puisque l'aire du polygone régulier ne peut excéder l'aire du cercle circonscrit. Par conséquent, le rapport des aires ne peut être plus grand que le rapport des carrés des diamètres.

Supposons donc que le rapport des aires est plus petit que le rapport des carrés des diamètres, soit :

$$\frac{A}{B} < \frac{a^2}{b^2}$$

Dans le second cercle, inscrivons un polygone régulier dont l'aire diffère si peu de B que l'on a :

$$\frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2}$$



Cela est possible en vertu du théorème précédent. Considérons de plus le polygone régulier semblable inscrit dans le premier cercle dont l'aire est P_1. Alors, puisque les polygones sont semblables, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Cela donne : $$\frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

et : $$\frac{A}{P_2} < \frac{P_1}{P_2}$$

Puisque les dénominateurs sont égaux, on obtient $P_1 > A$, ce qui est une contradiction puisque l'aire du polygone régulier ne peut excéder l'aire du cercle circonscrit. Par conséquent, le rapport des aires ne peut être ni plus grand ni plus petit que le rapport des carrés des diamètres. Cette double *réduction à l'absurde* permet alors de conclure que le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres.

ARCHIMÈDE ET LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

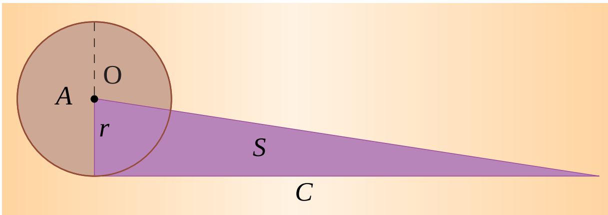
Le flambeau est repris par Archimède (~287 à ~212). Il utilise la méthode d'exhaustion pour montrer que l'aire d'un cercle est égale à l'aire du triangle dont la longueur de la base est égale à la circonférence du cercle et dont la hauteur est le rayon du cercle.

Théorème 10

Aire du cercle

L'aire d'un cercle est égale à l'aire d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence.

Soit un cercle de rayon r. Construisons un triangle dont la hauteur est le rayon du cercle et la base est la longueur C de la circonférence. Représentons par A l'aire du cercle et par S l'aire du triangle.



Pour démontrer le résultat par exhaustion, il faut faire deux démonstrations par l'absurde de façon à pouvoir conclure que l'aire du cercle ne peut être ni plus grande ni plus petite que l'aire du triangle.

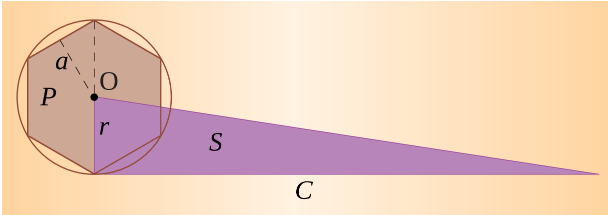
Supposons que l'aire du cercle est plus grande que l'aire du triangle, c'est-à-dire, supposons que :

$$A > S$$

Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $A = S + \varepsilon$, d'où $A - S = \varepsilon$. On peut construire un polygone inscrit dans le cercle de telle sorte que la différence entre l'aire A du cercle et l'aire P du polygone soit plus petite que ε. On a alors la condition suivante :

$$A > P > S$$

Il suffit, au besoin, de doubler le nombre de côtés pour trouver le polygone qui satisfait à cette condition (voir Eudoxe et la méthode d'exhaustion).



Puisque le polygone est inscrit dans le cercle, son périmètre p est plus petit que la circonférence du cercle et son apothème est plus petite que le rayon du cercle. On a donc :

$$p < C \text{ et } a < r$$

Par conséquent :

$$pa < Cr$$

Or, par construction, l'aire du triangle est donnée par :

$$S = \frac{Cr}{2}$$

et l'aire du polygone est le demi-produit de son périmètre par son apothème, soit :

$$P = \frac{pa}{2}$$

D'où $P < S$. Ce qui vient en contradiction avec le fait que $A > P > S$. Cette contradiction est engendrée par l'hypothèse $A > S$. Il faut en conclure que l'hypothèse est fausse et l'aire du cercle ne peut être plus grande que celle du triangle. De façon analogue, on démontre que l'aire du cercle ne peut être plus petite que celle du triangle. Puisque l'aire du triangle ne peut être ni plus grande ni plus petite que celle du cercle, elles sont égales. C'est-à-dire :

$$A = \frac{Cr}{2}$$

Ce qui complète la démonstration.

Les théorèmes 9 et 10 nous mettent sur une piste intéressante. En utilisant une écriture moderne, le théorème 9 établit que :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

où A_i est l'aire de la surface du cercle i et d_i, son diamètre. Mais, puisque $d_i = 2r_i$, où r_i est le rayon du cercle i, on a :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2} = \frac{4r_1^2}{4r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Et, par les propriétés des proportions, on obtient :

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$$

Cette proposition étant vraie pour tous les cercles, cela signifie que le rapport de l'aire d'un cercle sur le carré de son rayon donne une constante[3]. On peut donc écrire :

$$\frac{A}{r^2} = \text{constante}$$

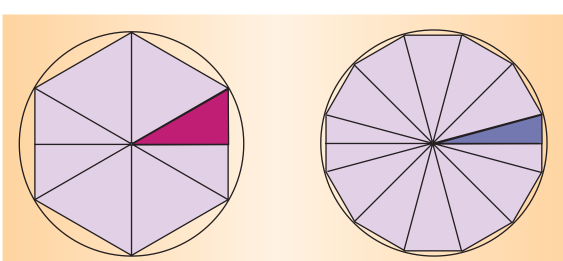
De plus, en jumelant ce résultat et celui du théorème 10, on déduit que :

$$\frac{A}{r^2} = \frac{Cr/2}{r^2} = \frac{Cr}{2r^2} = \frac{C}{2r} = \text{constante}$$

CALCUL DU RAPPORT CONSTANT (π)

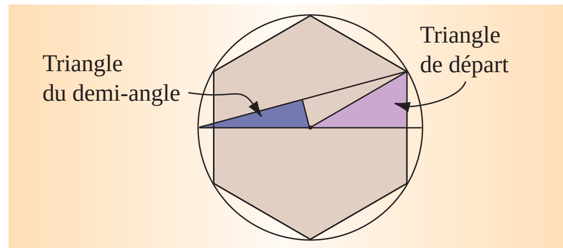
Archimède va utiliser le postulat d'Eudoxe pour tenter de calculer la valeur de ce rapport. Que doit-il faire? Considérer un polygone inscrit et un polygone circonscrit à un cercle de rayon connu. Calculer les périmètres de ces polygones et les diviser par le diamètre du cercle pour obtenir une valeur plus petite et une valeur plus grande que la constante cherchée. Doubler le nombre de côtés de ces polygones, et calculer à nouveau le rapports des périmètres sur le diamètre pour obtenir des valeurs plus proches de la constante cherchée. Poursuivre le processus pour obtenir plus de précision.

Comme premier polygone, Archimède choisit l'hexagone dont on peut facilement déterminer le périmètre. De plus, il doit établir les relations entre les côtés de deux triangles rectangles ayant même hypoténuse mais dont la mesure d'un angle aigu de l'un des triangles est la moitié de celle d'un angle aigu de l'autre triangle. Il avait constaté qu'en doublant le nombre de côtés, on divise par 2 l'angle au centre interceptant le demi-côté du polygone, comme l'illustre la figure suivante.

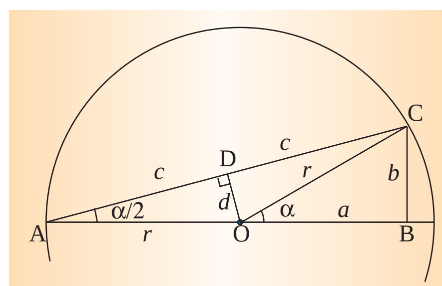


RELATIONS DU DEMI-ANGLE

Il est possible d'établir une relation entre ces angles puisque la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc. On peut donc disposer le triangle du polygone de départ et celui du polygone obtenu en doublant le nombre de côtés comme dans la figure suivante.



En utilisant cette représentation, on peut établir une relation entre les côtés du triangle du demi-angle et les côtés du triangle de l'angle complet. Pour simplifier ce qui va suivre, nous allons utiliser la notation moderne de la racine carrée[4]. De plus, dans la figure ci-dessous, notons r, le rayon du cercle, a et b, les côtés de l'angle droit du triangle rectangle OBC et, c et d, les côtés de l'angle droit du triangle rectangle AOD.



Dans un cercle, le rayon perpendiculaire à une corde divise celle-ci en deux parties égales. Par conséquent, le point D divise le côté AC en deux parties égales. La mesure de DC est donc égale à c. De plus, les triangles AOD et ABC sont semblables puisque ce sont des triangles rectangles ayant un angle aigu commun, soit l'angle en A dont la mesure est $\alpha/2$. Les côtés homologues de ces triangles sont donc proportionnels et on a :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OD}}$$

D'où :

$$\frac{2c}{r} = \frac{r+a}{c} = \frac{b}{d}$$

En égalant les deux premiers rapports, on obtient :

$$\frac{2c}{r} = \frac{r+a}{c}$$

Par le produit des extrêmes et le produit des moyens, on obtient :

$$2c^2 = r^2 + ar$$

d'où : $$c=\sqrt{\frac{r^2+ra}{2}}$$

En considérant les deux derniers rapports et en isolant d, on obtient :

$$d=\frac{bc}{r+a}$$

Cependant, par le théorème de Pythagore, on a :

$$a^2 + b^2 = r^2$$

d'où : $$b=\sqrt{r^2-a^2}=\sqrt{(r-a)(r+a)}$$

En substituant, on a alors :

$$d=\frac{\sqrt{(r-a)(r+a)}}{r+a}\sqrt{\frac{r(r+a)}{2}}=\sqrt{\frac{r(r-a)}{2}}=\sqrt{\frac{r^2-ra}{2}}$$

On obtient donc la description des côtés du triangle du demi-angle en fonction du côté adjacent du triangle de départ, soit :

$$c=\sqrt{\frac{r^2+ra}{2}} \quad \text{et} \quad d=\sqrt{\frac{r^2-ra}{2}},$$

où r est le rayon du cercle et a, l'apothème du polygone inscrit[5].

VALEUR APPROCHÉE PAR EXHAUSTION

En utilisant la relation des côtés dans le triangle du demi-angle, on peut donc établir des formules de récurrence définissant la longueur des côtés des triangles obtenus en doublant successivement le nombre de côtés. On a alors :

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{r^2+ra_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1}=\sqrt{\frac{r^2-ra_n}{2}}$$

où a_n est l'apothème du polygone inscrit de rang n et b_n, le demi-côté de ce polygone. À l'aide de ces formules de récurrence, on peut calculer une valeur approchée de la circonférence d'un cercle en calculant le périmètre du polygone. On peut alors, par un simple calcul obtenir une valeur approchée de l'aire du cercle, puisque :

$$A=\frac{C}{2r}\approx\frac{P}{2}$$

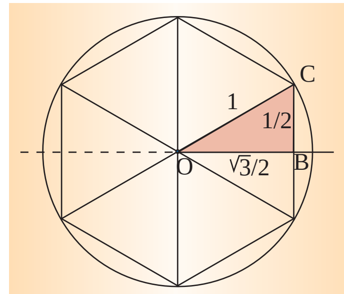
Le périmètre du polygone est donné par :

$$P_n = 2^n k b_n,$$

où n est le rang du terme, k, le nombre de côtés du premier polygone considéré et b_n, le demi-côté du polygone inscrit de rang n. Il suffit donc en pratique de calculer les b_i.

En considérant un cercle de rayon unitaire et un hexagone inscrit comme premier polygone, on a :

$$a_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad b_1=\frac{1}{2}$$



Le périmètre de l'hexagone inscrit dans le cercle de rayon unitaire est alors :

$$P_{i1}=2^1\times 6\times\frac{1}{2}=6$$

Puisque le rayon est unitaire, il suffit de diviser ce périmètre par 2 pour obtenir une première valeur approchée de la valeur cherchée, soit $k_1 = 3$.

En doublant le nombre de côtés, on a alors :

$$b_2=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Le périmètre du polygone à 12 cotés inscrit dans le cercle de rayon unitaire est alors :

$$P_{i2}=2^2\times 6\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=6{,}211657...$$

En doublant à nouveau le nombre de côtés, on obtient :

$$b_3=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

qui donne la valeur approchée k_2 = 3,105828...
Le périmètre du polygone à 24 cotés inscrit dans le cercle de rayon unitaire est alors :

$$P_{i3}=2^3\times 6\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}=6{,}265257...$$

qui donne la valeur approchée k_3 = 3,132628...

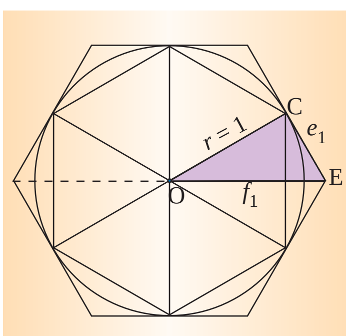
En poursuivant ainsi, Archimède obtient une suite croissante de termes dont la valeur limite est la circonférence du cercle de rayon unitaire et en divisant les termes de cette suite par 2, il obtient une suite croissante de termes dont la valeur limite est la valeur de la constante :

$$\frac{A}{r^2}=\text{constante}$$

Le rayon du cercle étant unitaire, les termes de la suite donnent également l'aire des polygones inscrits selon le nombre de côtés. Ces termes sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre de côtés	Aire du polygone inscrit
6	3
12	$6\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3{,}105828...$
24	$12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 3{,}132628...$
48	$24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 3{,}139350...$
96	$48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = 3{,}1410319...$

On constate facilement que la valeur obtenue augmente à mesure que l'on double le nombre de côtés. En procédant d'une façon analogue, à partir d'un hexagone circonscrit, Archimède calcule l'aire des polygones circonscrits, obtenant une suite décroissante dont les termes sont toujours plus grands que le rapport de l'aire du cercle au carré de son rayon.



Comme résultat de ses compilations, Archimède obtient deux suites de nombres. En considérant les polygones inscrits, il obtient une suite croissante dont les termes s'approchent du rapport de l'aire du cercle au carré de son rayon à mesure que le nombre de côtés du polygone augmente. En considérant les polygones circonscrits, il obtient une suite décroissante dont les termes s'approchent du rapport de l'aire du cercle au carré de son rayon à mesure que le nombre de côtés du polygone augmente.

Pour bien saisir l'ampleur du travail réalisé, rappelons que, dans cette présentation, nous avons utilisé des notations modernes. La notation des radicaux, d'abord, qui nous permet de détecter une régularité dans les expressions donnant la circonférence et l'aire du polygone inscrit. Nous avons également utilisé la notation décimale et une calculatrice.

Archimède devait utiliser une méthode pour calculer la valeur approchée d'un radical par des nombres fractionnaires, le système de numération décimale[6] lui était inconnu. Ainsi, il donne sans explications que :

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Ce qui signifie, en notation décimale, que :

$$1{,}732026144... < \sqrt{3} < 1{,}732051282...$$

En utilisant une calculatrice moderne, on trouve :

$$\sqrt{3} = 1{,}73205080...$$

Archimède a calculé les aires A_n des polygones inscrits de 96 côtés et les aires B_n des polygones circonscrits de 96 côtés. Il obtient, pour ces derniers polygones, que :

$$A_n < \pi < B_n$$
$$223/71 < \pi < 22/7$$

Ce qui, en notation décimale, donne :

$$3{,}14084507... < \pi < 3{,}142857143...$$

Entre les mains habiles d'Archimède, la méthode d'exhaustion a permis d'établir plusieurs résultats intéressants que l'on obtient maintenant avec le calcul intégral. Il a utilisé cette méthode de deux façons : pour calculer une valeur approchée et pour démontrer des formules d'aires (et de volumes). Le calcul de π est un exemple du premier type d'utilisation. La démonstration par exhaustion est en fait une double réduction à l'absurde.

CONCLUSION

La construction de la connaissance est un long cheminement. Tous les étudiants, à la fin du secondaire, savent que l'aire d'un cercle est donnée par la relation $A = \pi r^2$. Cette relation est un des fruits d'un vaste champ de connaissances qui va de l'étude des figures semblables par les pythagoriciens aux travaux d'Archimède, en passant par ceux d'Hippocrate, d'Eudoxe et d'Euclide.

Cette découverte a produit d'autres résultats intéressants. Ératosthène qui était correspondant et ami d'Archimède, a déterminé la circonférence de la Terre en utilisant les connaissances géométriques accumulées par ses prédécesseurs. Le calcul approché de π par Archimède permettait d'estimer le rayon de la Terre. L'Homme a commencé à prendre conscience de dimensions de son Univers.

NOTES

1. Une démonstration moderne s'écrirait peut-être de la façon suivante :

   $2\ \Sigma A_{\text{lunules}} = \pi a^2/4 + \pi b^2/4 - (\pi c^2/4 - ab)$

   $= \pi a^2/4 + \pi b^2/4 - \pi c^2/4 + ab$

   $= \pi(a^2 + b^2 - c^2)/4 + ab$, par distributivité;

   $= \pi(0) + ab$, car $a^2 + b^2 = c^2$ par Pythagore;

   $= ab$.

   Cependant, à l'époque d'Hippocrate, on ne connaissait pas encore la relation entre l'aire d'un cercle et son rayon. Le présent article relate comment on est parvenu à ce résultat.

2. Ce théorème fait l'objet de la proposition 2 du livre XII des *Éléments* d'Euclide.

3. William Oughtred (1574-1660) fut le premier à désigner cette constante par la lettre grecque π (pi). Leonhard Euler (1707-1783), en utilisant cette désignation à partir de 1748, contribua à en généraliser l'usage.

4. Le symbole moderne pour les radicaux fut introduit en 1637 par René Descartes (1596-1650) et repris par Oughtred en 1647 pour s'imposer par la suite. Un symbole analogue mais sans barre supérieure avait été utilisée par l'allemand Christoff Rudolph dans son ouvrage *Die coss* (la chose, l'inconnue) écrit en 1525. Ce dernier symbolisme fut également utilisé par Michael Stifel (1487-1567).

5. La description des côtés du demi-angle en fonction du côté adjacent à l'angle est encore en usage sous forme d'identités trigonométriques. Ce sont :

   $$\cos\ \theta = \sqrt{\frac{1+\cos\ 2\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \sin\ \theta = \sqrt{\frac{1-\cos\ 2\theta}{2}}$$

   Ces identités ont servi dans la construction de tables trigonométriques. Connaissant, par exemple le cosinus de l'angle de 30°, on peut, en considérant 2θ = 30°, calculer les rapports trigonométriques pou un angle de 15°, 7,5°, etc.

   On les utilise également pour intégrer des expressions comme $\sin^2\theta$ ou $\cos^2\theta$.

6. Au cours d'un voyage en Espagne de 972-982, Gerbert d'Aurillac qui deviendra pape en 999 sous le nom de Sylvestre II, s'initie aux chifres arabes, issus de la notation indienne *Brâhmî*, et les introduit en Europe. En 1592, le mathématicien et horloger Jost Bürgie introdit une notation pour indiquer les fractions décimales, il surmonte le chiffre des unités d'un petit cercle. Cette notation sera perfectionnée par l'italien Magini qui remplace le petit cercle par un point séparant la partie entière et la partie décimale. Cette notation est encore en usage dans les pays anglo-saxons. La notation avec une virgule a été introduite par le néerlandais Willebord Snellius en 1594.

BIBLIOGRAPHIE

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc.,1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Caratini, Roger, *Les Mathématiques*, Paris, Bordas, 1985.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Cuomo, S. *Ancient Mathematics, London and New York, Routledge, Taylor and Francis Group, 2001, 290 p.*

Davis, Philip J, Hersh, Reuben, Marchisotto, Elena Anne. *The Mathematical Experience*, Study edition, Boston, Birkhäuser, 1995, 485 p.

Dhombres, Jean, *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. Publications de l'Irem de Nantes, Paris, Cedic/ Fernand Nathan, 1978, 338 p.

Dunham, William. *The Mathematical Universe*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1994, 314 p.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*, New-York, Holt Rinehart and Winston, 1976, 588 p.

Fowler, D.H. *The Mathematics of Plato's Academy, a New Reconstruction*, Oxford, Oxford University Press, 1990, 401 p.

Guedj, Denis, *Le Théorème du Perroquet*, Paris, Éditions du Seuil, 1998, 520 p.

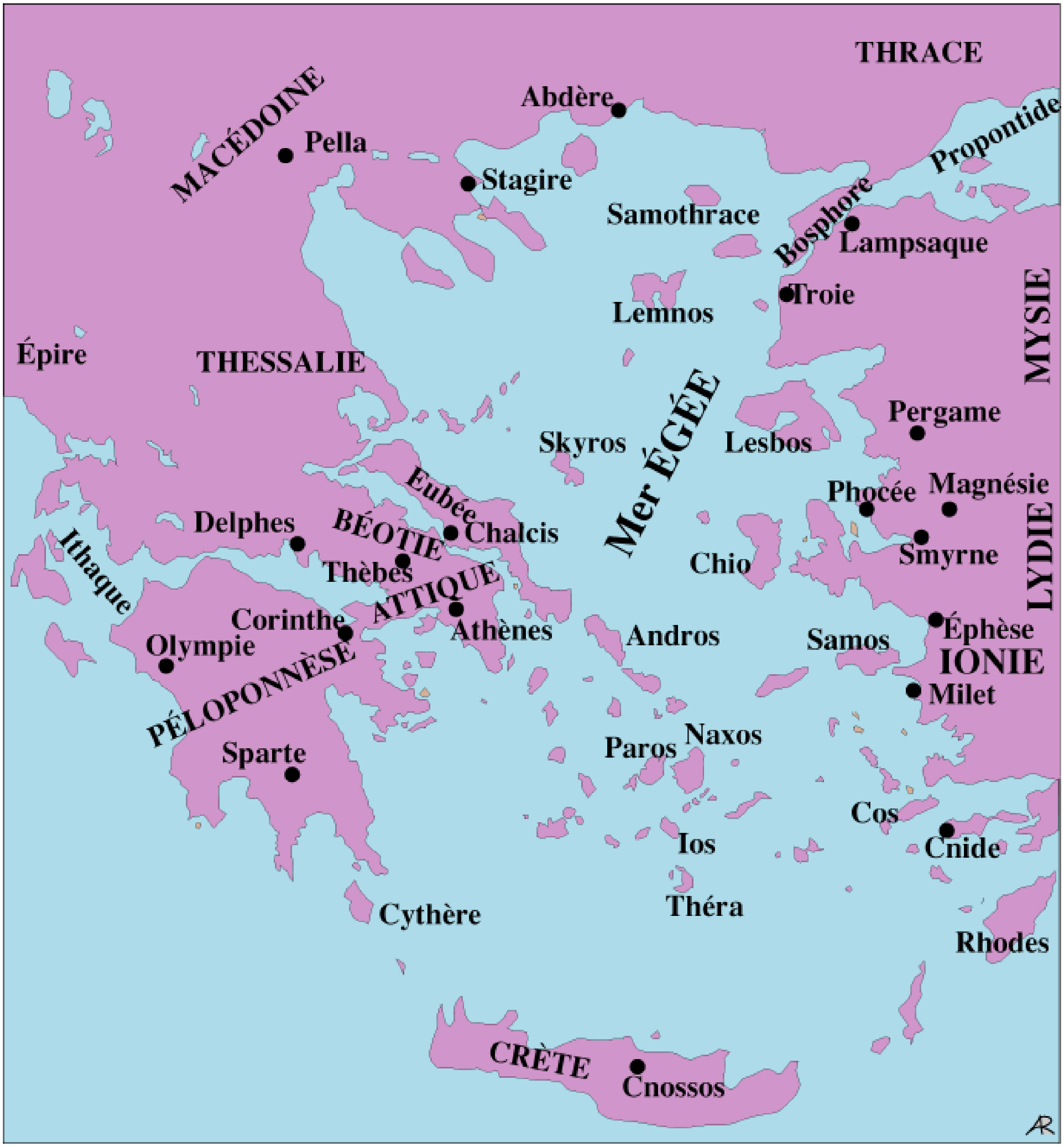
Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972, 1238 p.

Kramer, Edna E. *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, New York, Hawthorn Books, Inc. Publishers, 1970, 758 p.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc. 1958, 2 vol. 1 299 p.

Struik, David. *A Concise History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc. 1967, 195 p.

POUR SE SITUER DANS LE TEMPS ET DANS L'ESPACE



~600 **~500** **~400** **~300** **~200**

Pythagore (~581 à ~497)
Antiphon (~480 à ~411)
Socrate (~470 à ~399)
Hippocrate (vers ~450)
Platon (~428 à ~347)
Euclide (vers ~300)
Archimède (~287 à ~212)
Érathostène (~276 à ~194)