ÉVOLUTION DU SYSTÈME DÉCIMAL

QUELQUES NOTES HISTORIQUES

Le système positionnel que nous utilisons vient de l'Inde, mais d'autres civilisations ont développé des systèmes positionnels et ont utilisé le zéro. Les Indiens ont été les premiers à utiliser un système décimal «positionnel » comportant un zéro qu'ils représentaient par le symbole que l'on utilise encore aujourd'hui. Le plus vieux document qu'on a retrouvé contenant une trace de leur système « positionnel » date de 595, et le plus vieux dans lequel on retrouve le symbole « 0 » date de 876. On croit cependant que ce symbole était utilisé avant cette date. Il aurait été introduit pour éliminer les confusions causées par une place vide dans l'écriture d'un nombre. Les Indiens se sont intéressés au problème de la division par zéro et ont été les premiers à admettre qu'un nombre irrationnel était bel et bien un nombre.

La civilisation Arabe a joué, elle aussi, un rô1e dominant dans l'évolution du système numérique. Les activités de production et de commerce de la civilisation arabe a facilité la propagation du système de numération qu'ils utilisaient. C'est effectivement à travers la civilisation arabique que le système indien a été découvert, au point que nos chiffres sont aujourd'hui communément appelés « chiffres arabes », alors que leur origine se situe en Inde. Leur empire comportait de grands centres ou se retrouvaient des scientifiques de tous les coins du monde. C'est grâce à ces centres que l'Europe a été en contact avec les connaissances de d'autres peuples. Les Arabes ont contribué énormément à établir un « standard » et à le faire accepter presque partout.

Un des mathématiciens arabes les plus connus est Al Khwarizmi (? - 850). De son nom découle le terme algorithme. Son premier ouvrage portait sur le système indien et c'est en grande partie à cause de cet ouvrage que notre système est appelé « arabe ». Son deuxième ouvrage, peut-être plus important encore, nous a également donné un terme que nous connaissons : algèbre. Son livre, *Al-jabr wa 'l muqabalah,* se rapproche beaucoup de l'algèbre élémentaire que l'on connaît. On remarque que les Arabes s'intéressaient à des questions beaucoup plus pratiques que leurs prédécesseurs. Al Khwarizmi lui-même a écrit dans la préface de son deuxième livre qu'il s'agissait de calcul élémentaire nécessaire dans la vie de tous les jours pour le commerce, les questions d'héritages, etc.

DE L'ARABIE À L'EUROPE

Beaucoup de mathématiciens européens ont également contribué au développement du système positionnel de base 10. La première personne à avoir tenté d'implanter ce système en Europe est Gerbert d'Aurillac (940-1003), plus tard devenu le Pape Sylvestre II. Ses efforts ne furent pas couronnés de succès puisque ce système ne fut véritablement utilisé que deux siècles plus tard. Plusieurs personnes se sont consacrées à la traduction des écrits arabes et grecs, ce qui a permis à l'Europe d'assimiler les connaissances de ces civilisations. Le plus important traducteur fut sans doute Gérard de Cremona (1114-1187).

La période de la Renaissance a été florissante également dans le domaine des mathématiques. Un marchand italien, Leonardo de Pise (1180-1250), aussi connu sous le nom de Fibonacci, qui signifie « fils de Bonaccio », a écrit un livre en 1202 qui a contribué énormément à populariser le système indien dans lequel le calcul était appliqué au commerce. Il utilisait déjà la notation actuelle pour les fractions, c'est-à-dire le numérateur au-dessus du dénominateur et séparé de ce dernier par une barre horizontale. Malheureusement, personne encore n'avait songé à l'un des plus beaux avantages de ce système : les décimales!

En Normandie, Nicole d'Oresme (1323?-1382) a travaillé les exposants, les irrationnels, les proportions, mais sa plus grande contribution se situe dans le vocabulaire. Il a inventé de nombreux termes, comme « irrationnel », par exemple. Nicolas Chuquet (?-1484) a, quant à lui, développé un symbolisme qui ressemble beaucoup à celui que l'on utilise aujourd'hui. Dans un ouvrage portant sur l'arithmétique commerciale, l'Allemand Johann Widman utilise pour la première fois, les symboles « + » et « – » et la notation décimale des fractions. Adam Riese nous a donné le symbole pour indiquer la racine $n^{ème}$ et Michael Stifel (1487-1567) a introduit les nombres négatifs dans un ouvrage intitulé *Numeri absurdi!*

François Viète *(1540-1603)* a prêché pour l'utilisation exclusive des décimales. À l'époque, certains n'utilisaient encore que des fractions en base 60. D'autres symboles que nous utilisons couramment ont également été introduit à cette époque par des mathématiciens anglais. C'est le cas notamment du symbole de l'égalité, présenté en 1557 par Robert Recorde *(1510-1558)*, des symboles d'inégalité « < » et « > » proposés par Thomas Hariot (1560-1621), en 1621, et du symbole de la multiplication, contribution de l'Anglais William Oughtred (1574-1660) qui date de 1632.

Un domaine des mathématiques très important fut celui des logarithmes. John Napier (ou Neper), le « père » des logarithmes, un lord écossais, Baron de Murchiston, publia en 1594 un ouvrage portant sur le sujet. Assez âgé, il ne vécut pas suffisamment longtemps pour développer son idée. Henry Briggs, qui l'avait rencontré, a publié un ouvrage continuant le travail de Napier. Beaucoup d'autres ont travaillé ce sujet passionnant et le logarithme n'est pas, ainsi qu'on pourrait le croire, l'invention d'une seule personne.

Aujourd'hui, on classe les nombres dans différents ensembles. Tout d'abord, on a les réels (**R**) dans lesquels sont inclus les irrationnels et les rationnels (**Q**). Dans cet ensemble sont inclus les entiers relatifs (**Z**) ainsi que les entiers naturels (**N**). Malheureusement, on ne peut situer de façon précise l'origine de ces symboles et notations dans l'histoire. On sait par contre que le Français H.C.R. (Charles) Méray (1835-1911) de Bourgogne, ainsi que les Allemands Karl Weierstrass (1815-1897) de l'Université de Berlin, H.E. Heine (1821-1881) de Halle, Georg Cantor (1815-1918) de Halle et J.W.R. Dedekind (1831-1916) de Brunswick ont tous contribué, en 1872, à définir clairement les différents ensembles et leurs relations, particulièrement les irrationnels. De plus, on doit aux mathématiciens italiens Gerolamo Cardano (1501-1576) et Raffaele Bombelli (1526-1573) l'introduction des nombres imaginaires, aujourd'hui appelés « nombres complexes ». On situe ce développement dans les années 1545-1560. Les nombres complexes sont représentés par la lettre **C**, cette notation fut introduite par Gauss, en 1831,

En conclusion de ces quelques notes historiques, on constate que l'arithmétique, telle que nous la pratiquons aujourd'hui, tire ses origines d'un passé fort lointain. Elle a été développée laborieusement au fil du temps par plusieurs civilisations en vue de satisfaire à des besoins toujours en évolution.

ÉVOLUTION DU SYSTÈME

PUISSANCE ET EXPOSANT

Un système de numération n'est pas un langage statique. Le développement de notations nouvelles ou de concepts nouveaux doit se faire en s'assurant que les règles d'utilisation de ces notations et concepts respectent la cohérence du système.

Nous allons voir comment, à partir de la définition de puissance entière d'un nombre, on peut dégager des propriétés et généraliser la définition de départ en ayant un souci constant de cohérence. À l'origine, la notion de puissance d'un nombre a été introduite pour simplifier l'écriture d'expressions comportant plusieurs fois le même facteur. C'est ce qu'indique la définition suivante :

Définition

Puissance d'un nombre

On appelle *puissance $n^{ème}$ d'un nombre a* le produit de n facteurs égaux de ce nombre, soit :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Après avoir défini une telle notation, il faut déterminer comment effectuer des opérations sur des expressions et des nombres affectés d'exposants. Pour y parvenir, il faut explorer, énoncer des conjectures et les démontrer pour obtenir des règles générales. C'est une démarche de construction qui se fait dans le respect des règles de la logique parce que les définitions qu'il faudra poser ne doivent pas introduire de contradiction et que les propriétés seront démontrées par déduction.

Considérons le produit suivant :

$$3^2 \times 3^4$$

pour effectuer ce produit, nous devons avoir recours à la définition de puissance et poser :

$$3^2 \times 3^4 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$$

Un simple calcul nous permet de constater que le facteur 3 se répète six fois et on peut écrire :

$$3^2 \times 3^4 = 3^6$$

L'observation de ce cas particulier nous suggère une conjecture obtenue par abstraction en représentant substituant des lettres aux chiffres, cela donne $a^m a^n = a^{m+n}$ et notre exploration suggère comment procéder pour en effectuer la démonstration.

Propriété 1

Si m et n sont des nombres entiers positifs et a, un nombre réel non nul quelconque alors :

$$a^m \, a^n = a^{m+n}$$

Démonstration

Par définition de la puissance d'un nombre, on a :

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ facteurs}} \text{ et } a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m+n \text{ facteurs}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

On obtient donc $a^m \, a^n = a^{m+n}$.

REMARQUE

L'hypothèse spécifie que m et n sont des nombres entiers positifs, ce qui est utilisé en exprimant $a^m a^n$ comme produits de m facteurs de a et de n facteurs de a.

VALEURS PARTICULIÈRES

Pour bien connaître la portée d'une définition comme celle de puissance d'un nombre, il faut s'assurer que la notion est bien définie pour des valeurs particulières. Considérons le cas où $a \neq 0$, $m \neq 0$ et $n = 0$. On a alors :

$$a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$$

Par conséquent :

$$a^m a^0 = a^m$$

Puisque $a \neq 0$, on a $a^m \neq 0$ et on peut diviser les deux membres de cette égalité par a^m, ce qui donne :

$$a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Ce résultat nous indique qu'il faut poser $a^0 = 1$ pour assurer la cohérence

Définition

Exposant nul

Soit a, un nombre réel non-nul alors on définit l'expression a^0 par l'égalité suivante :

$$a^0 = 1.$$

GÉNÉRALISATION

Il y a plusieurs propriétés des exposants entiers positifs qui peuvent être démontrés en se basant sur la définition de puissance d'un nombre. Le lecteur aura la possibilité d'en démontrer quelques-unes en exercices. Pour le moment, nous allons nous intéresser à une autre facette de la démarche mathématique, la généralisation d'un concept ou d'une définition.

Lorsqu'on procède à la généralisation d'une notion, d'un concept ou d'une théorie, il faut s'assurer que les propriétés de cette notion, de ce concept ou de cette théorie demeurent valides après la généralisation pour assurer la cohérence de la théorie. Les définitions généralisant la notion d'exposant doivent donc être posées en conformité avec les propriétés des exposants entiers positifs. Le recours à l'expérimentation et à l'observation nous sera d'un précieux secours.

La première étape de généralisation est de voir comment donner un sens aux exposants négatifs. Il nous faut donc déterminer comment définir l'expression a^{-n}, où $a > 0$ et $a \neq 1$. Si on multiplie a^{-n} par a^n on trouve :

$$a^n a^{-n}$$

On a alors une expression de la même forme que :

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

En appliquant la propriété, c'est-à-dire en faisant la somme des exposants, on obtient :

$$a^n a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

On constate que le résultat du produit de a^{-n} par a^n doit donner 1 pour que les propriétés des exposants entiers soient préservées par la généralisation. Cependant, on connaît une autre expression qui multipliée par a^n donne 1, soit :

$$a^n \times \frac{1}{a^n} = 1$$

On a donc :

$$a^n a^{-n} = a^n \times \frac{1}{a^n}$$

Puisque $a \neq 0$, on a $a^n \neq 0$ et on peut diviser les deux membres de l'égalité par a^n, ce qui donne :

$$a^n a^{-n} = a^n \times \frac{1}{a^n}$$

Les propriétés des exposants entiers positifs resteront donc valides si on pose la définition suivante :

Définition

Exposant négatif

Soit $a \neq 0$, un nombre réel et n, un entier positif. Alors l'expression a^{-n} est définie par l'égalité suivante :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES

Pour définir les exposants fractionnaires, on doit donner un sens aux expressions de la forme $a^{1/n}$ où n est un entier.

En élevant l'expression $a^{1/n}$ à l'exposant n, en vertu de la propriété $(a^m)^p = a^{mp}$, on trouve :

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\times n} = a^1 = a$$

Par conséquent, l'expression $a^{1/n}$ est un nombre qui élevé à la puissance n donne le nombre a. Cependant, on représente également ce nombre par :

$$\sqrt[n]{a}$$

appelé la *racine n^ème^* de a. On a donc :

$$\left(a^{1/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Il faut noter, à cause de la règle des signes, que si n est pair, la racine est définie seulement si $a \geq 0$. Les propriétés des exposants entiers positifs resteront donc valides si on pose la définition suivante :

Définition

Exposant fractionnaire

Soit a, un nombre réel et n, un entier alors on définit l'expression $a^{1/n}$ par l'égalité suivante :

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \text{ sauf si } a < 0 \text{ et } n \text{ pair.}$$

REMARQUE

L'expression $a^{1/n}$ représente la racine positive de a lorsque n est pair

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES ET RADICAUX

La définition des exposants fractionnaires permet de démontrer des propriétés des radicaux.

Théorème

Radical d'un produit

Soit a et b deux nombres réels positifs et n, un nombre entier positif alors :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= (ab)^{1/n}, && \text{définition d'exposant fractionnaire;} \\ &= a^{1/n}b^{1/n}, && \text{produit de nombres affectés d'un même exposant;} \end{aligned}$$

$= \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$, définition d'exposant fractionnaire.

Par conséquent, on a :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$$

CONCLUSION

Les propriétés que nous venons de démontrer vous étaient déjà connues. L'objectif visé n'était cependant pas d'apprendre de nouvelles propriétés mais de voir comment la logique est prise en compte dans l'évolution des notations comme celles du système de numération.

Nous avons voulu montrer comment on procède à la généralisation d'une notion en s'assurant que la cohérence est préservée. La généralisation de la notion de puissance d'un nombre pour définir les exposants négatifs et les exposants fractionnaires nous a permis d'illustrer ce propos sans avoir à présenter des notions trop complexes. C'est en ayant recours aux propriétés préalablement démontrées que l'on a déterminé comment donner un sens à ces exposants.

Dans la généralisation et le développement de notions nouvelles, il faut s'assurer que l'on introduit pas de contradictions ni de paradoxes. Le principe de non-contradiction est un des principes fondamentaux de la logique . Pour que les théories respectent ce principe, il faut que leur développement se fasse dans un souci constant de cohérence. C'est ce que nous avons illustré en généralisant la notion de puissance positive d'un nombre pour obtenir la notion d'exposant, entier et fractionnaire.

La notion d'exposant a connu une autre généralisation avec l'introduction des exposants réels et de la notion de logarithme. De la même façon, les règles d'utilisation des logarithmes en s'assurant de la cohérence avec les composantes déjà connues du système des nombres.

EXERCICES : NUMÉRATION 05

1. Démontrer la propriété suivante. Si m et n sont des nombres entiers positifs et a un nombre réel non-nul quelconque alors:
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

2. Démontrer que : si m et n, sont des nombres entiers positifs et a un nombre réel non-nul quelconque alors :
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ \text{si } m > n \text{ et } a \neq 0,$$
$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}},\ \text{si } m < n \text{ et } a \neq 0.$$

3. Démontrer que: si m et n, sont des nombres entiers positifs et $a \neq 0$ et $b \neq 0$, deux nombres réels quelconques alors :
$$a^n b^n = (ab)^n$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

4. Démontrer la propriété suivante: si n est un nombre entier positif et a et b, des nombres réels positifs, alors :
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

5. Démontrer la propriété suivante: Si n et m sont des nombres entiers positifs et a, un nombre réel positif, alors:
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

6. Démontrer la propriété suivante: si n et m sont des nombres entiers positifs et a, un nombre réel positif, alors :
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

7. Démontrer la propriété suivante: si n, m et p sont des nombres entiers positifs et a, un nombre réel positif, alors :
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[np]{a^{mp}}$$