

## OPÉRATIONS DANS UN SYSTÈME POSITIONNEL

### INTRODUCTION

Dans tout système de numération positionnel, les symboles sont utilisés de façon cyclique et la longueur du cycle correspond à la base du système de numération. Ainsi, lorsqu'on compte dans le système décimal, on utilise d'abord les symboles de 0 à 9 dans la position des unités. Lorsqu'un cycle est complété, on inscrit 1 dans la colonne des dizaines et on amorce un deuxième cycle dans la colonne des unités, et ainsi de suite.

0	}	Premier cycle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10	}	Deuxième cycle
11		
12		
13		
14		
.		
.		
.		
.		
19		

Pour additionner des nombres dans le système décimal, il suffit de connaître le résultat de l'addition des chiffres du système entre eux. On superpose alors les nombres à additionner en colonnes, en alignant les chiffres de même position. On effectue la somme des chiffres, colonne par colonne, à partir de la colonne la plus à droite. Lorsqu'un cycle est complété dans une colonne, on effectue un report dans la colonne immédiatement à sa gauche.

Ainsi, pour additionner les nombres 124,7 et 82,8, on superpose les nombres en colonnes, en alignant les chiffres de même position. En effectuant la somme des chiffres de la colonne la plus à droite, on obtient  $7 + 8 = 15$ . On indique donc 5 dans cette colonne et on effectue un report de 1 dans la colonne immédiatement à sa gauche. En poursuivant ce processus, on obtient 207,5, tel qu'observé ci-contre.

Reports →	1	1	
	1	2	4,7
	+	8	2,8
			207,5

En binaire, on a seulement deux chiffres et les sommes possibles avec les chiffres sont :

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$ (ou 0 avec un report de 1)

Ces renseignements pourraient également être donnés sous forme de table d'opération, soit :

+	0	1
0	0	1
1	1	10

On procédera donc comme dans le système décimal, mais en utilisant les symboles 0 et 1 et en tenant compte de la longueur des cycles. Le nombre qui suit 1 est 10; on commence alors un deuxième cycle dans la position des unités (ou la colonne de droite, et ainsi de suite.

0	}	Premier cycle
1		
10	}	Deuxième cycle
11		
100	}	Troisième cycle
101		
110	}	
111		
1000	}	
1001		
1010	}	
1011		
1100	}	
.		
.	}	
.		

La procédure pour effectuer l'addition de deux nombres en binaire est donc la même que dans le système décimal, on peut la décrire comme suit :

### Procédure

#### pour additionner des nombres en binaire

1. Superposer les nombres en colonne de telle sorte que les chiffres de même position soient alignés verticalement.
2. Additionner colonne par colonne, à partir de la droite, en effectuant les reports appropriés.

### Exemple

Effectuer la somme des deux nombres binaires suivants  $1011,011 + 110,01$ .

- a) en binaire
- b) en décimal afin de comparer les procédures et les résultats.

**Solution**

**a) Opération en binaire**

On doit superposer les nombres en colonne en alignant les chiffres de même position, puis on additionne en tenant compte que la somme 1 + 1 dans une colonne donne un zéro dans cette colonne et un report de 1 dans la colonne immédiatement à gauche. En poursuivant le processus, on obtient 10001,101. En exprimant ce nombre en base 10, on obtient :

Reports  

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1011,011 \\ + 110,01 \\ \hline 10001,101 \end{array}$$

$$(10001,101)_2 = (17,625)_{10}$$

**b) Opération en décimal**

En exprimant les nombres à additionner dans le système décimal, on a :

$(1011,011)_2 = (11,375)_{10}$   
 et  $(110,01)_2 = (6,25)_{10}$   
 dont la somme est effectuée ci-contre. On obtient encore 17,625.

Équivalent en décimal  

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11,375 \\ + 6,25 \\ \hline 17,625 \end{array}$$

**REMARQUE**

Dans l'exemple qui précède, l'addition a été effectuée dans les deux bases pour bien constater que la procédure est équivalente et donne le même résultat mais dans des bases différentes. En pratique, on effectuera la somme dans la base demandée.

**SOUSTRACTION**

Pour soustraire deux nombres dans le système décimal, on les superpose en alignant les chiffres de même position. Le nombre à soustraire est placé sur la deuxième ligne. On soustrait alors colonne par colonne en partant de la colonne de droite. Si le nombre de la deuxième ligne d'une colonne est plus petit que celui de la première ligne de la même colonne, on fait la soustraction directe des chiffres impliqués. Lorsque le chiffre de la deuxième ligne d'une colonne est plus grand que celui de la première ligne, on effectue un emprunt pour pouvoir soustraire.

$$\begin{array}{r} 524,13 \\ - 142,8 \\ \hline 1,5 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 424,13 \\ - 512,8 \\ \hline 381,5 \end{array}$$

Ainsi, pour soustraire 142,8 de 524,3, on superpose les nombres en plaçant 142,8 sous 524,3. Dans la colonne de droite, le chiffre de la deuxième ligne est plus grand que celui de la première ligne, on effectue donc un emprunt. Le chiffre de la première ligne devient alors 13 et on peut soustraire 8 de 13, ce qui donne 5. En effectuant l'emprunt, le chiffre 4 de la deuxième colonne est devenu 3 et ce chiffre étant plus grand que le chiffre 2 de la deuxième ligne, on peut soustraire directement, ce qui donne 1. On passe alors à la colonne suivante jusqu'à ce que la soustraction soit complétée dans chacune des colonnes.

Dans le système binaire, quatre situations peuvent être rencontrées lors d'une soustraction colonne par colonne.

$$\begin{array}{l} 0 - 0 = 0 \\ 1 - 0 = 1 \\ 0 - 1 = 1, \text{ avec emprunt de } 1 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}$$

Lorsqu'on emprunte, c'est que l'on doit effectuer 0 - 1 dans une colonne. En empruntant, deux cas peuvent se produire. S'il y a un 1 dans la colonne immédiatement à gauche,

$$\begin{array}{r} - 0 1 \\ 0 0 1 \\ \hline 1 1 0 \end{array}$$

ce 1 devient un 0 et le 0 devient 10 (ou 2), d'où 10 - 1 = 1. Par contre, si lorsqu'on emprunte le chiffre de la colonne (ou des colonnes) de gauche est un zéro (ou sont des zéros), ce zéro (ou ces zéros) devient un 1 (ou deviennent des 1) jusqu'à ce que l'on rencontre un 1 qui devient 0.

• • •  
**Procédure**

**pour soustraire des nombres en binaire**

1. Superposer les nombres en colonnes, de telle sorte que les chiffres de même position soient alignés verticalement.
2. Soustraire colonne par colonne, à partir de la droite, en effectuant les emprunts appropriés.

**Exemple**

Effectuer la soustraction des nombres binaires suivants. Donner l'équivalent de cette opération dans le système décimal.

$$100010 - 110$$

**Solution**

On superpose les nombres de façon à aligner les chiffres de même position. Dans la première colonne à partir de la droite, on a  $0 - 0$  qui donne 0. Dans la deuxième colonne, on a  $1 - 1$  qui donne 0. Dans la troisième colonne, on doit effectuer  $0 - 1$ , il faut donc emprunter.

$$\begin{array}{r} 100010 \\ - 110 \\ \hline 00 \end{array}$$

Le chiffre de la troisième colonne devient alors 10, les zéros des quatrième et cinquième colonnes deviennent des 1, le 1 de la sixième colonne devient un zéro. En effet, il fallait emprunter 1 à 100. Le nombre de la deuxième colonne devient alors 10 et le nombre représenté dans les colonnes restantes à gauche est alors  $100 - 1 = 11$  en binaire.

$$\begin{array}{r} 0111 \\ \cancel{1}00010 \\ - 110 \\ \hline 00 \end{array}$$

On poursuit alors la soustraction colonne par colonne. Dans la troisième colonne, on a  $10 - 1 = 1$  et dans les quatrième et cinquième colonnes, on obtient  $1 - 0 = 1$ .

$$\begin{array}{r} 0111 \\ \cancel{1}00010 \\ - 110 \\ \hline 11100 \end{array}$$

En exprimant chacun des nombres de départ dans le système décimal, on constate que l'opération effectuée est

$$34 - 6 = 28.$$

Or,  $(11100)_2 = (28)_{10}$ .

**REMARQUE**

Lorsque le nombre à soustraire est le plus grand des deux, on change l'ordre de la soustraction, comme dans le système décimal, on effectue l'opération puis on change le signe de la réponse.

**COMPLÉMENTATION**

Nous venons de voir comment additionner et soustraire en binaire en suivant les mêmes principes que dans le système décimal. Techniquement, ces opérations sont effectuées par un même circuit qui ne fait qu'additionner. C'est-à-dire que la soustraction est effectuée en addition-

nant. C'est ce qu'on appelle *soustraire par complément*. Nous allons illustrer le principe de cette méthode en décimal puisque le lecteur est plus familier avec ce système; par la suite, nous l'utiliserons en binaire.

**COMPLÉMENTATION EN DÉCIMAL**

Dans le système décimal, le *complément à 10* d'un nombre est obtenu en soustrayant ce nombre de la puissance de 10 qui lui est immédiatement supérieure. Ainsi, pour trouver le complément à 10 du nombre 5 327, on le soustrait de  $10^4$  puisque le nombre dont on cherche le complément comporte quatre chiffres. Pour effectuer cette opération, on doit emprunter et on trouve 4673.

$$\begin{array}{r} 09991 \\ \cancel{1}0000 \\ - 5327 \\ \hline 4673 \end{array}$$

En pratique, on soustrait de 10 le premier chiffre à partir de la droite et on a soustrait les autres de 9. Si les premiers chiffres à partir de la droite sont des zéros, ils demeurent inchangés. Le premier chiffre non nul est soustrait de 10 et les autres de 9. La démarche est la même lorsque le nombre a une partie fractionnaire.

**Exemple**

Trouver le complément à 10 des nombres 5 800 et 27,38.

**Solution**

La partie entière du nombre 5 800 a quatre chiffres, on le soustrait donc de  $10^4$ , ce qui, en pratique, revient à laisser inchangés les zéros à droite du nombre, à soustraire le premier chiffre non nul de 10 et à soustraire les autres de 9. Le complément de 5 800 est donc 4 200.

$$\begin{array}{r} 09 \\ \cancel{1}0000 \\ - 5800 \\ \hline 4200 \end{array}$$

La partie entière du nombre 27,38 a deux chiffres; on le soustrait donc de  $10^2$ , ce qui, en pratique, revient à soustraire le premier chiffre de 10 et à soustraire les autres de 9. Le complément de 27,38 est donc 72,62.

$$\begin{array}{r} 0999 \\ \cancel{1}00,00 \\ - 27,38 \\ \hline 72,62 \end{array}$$

Voyons maintenant comment la complémentation peut être utilisée pour effectuer une soustraction dans le système décimal. Supposons que l'on veuille effectuer  $81 - 32$ . Illustrons à l'aide d'une règle graduée comment s'effectue cette opération par complémentation.



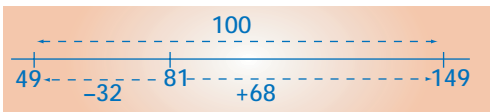
Pour soustraire 32 de 81, on se déplace de 32 unités vers la gauche, ce qui nous amène à 49.



Lorsqu'on effectue cette opération par la complémentation à 10, on ajoute à 81 le complément de 32, soit 68. On se déplace donc vers la droite de 68 unités pour parvenir à 149.



La différence entre le résultat de l'addition et le résultat de la soustraction est alors de 100, soit la somme de 32 et de son complément.



En soustrayant 100 de 149, c'est-à-dire en retranchant le chiffre 1 de la colonne des centaines, on obtient le résultat de la soustraction. C'est donc dire qu'au lieu de soustraire, on additionne le complément et on efface le 1 à gauche du nombre obtenu en effectuant cette addition, ce qui donne le résultat de la soustraction.

### Exemple

Effectuer la soustraction suivante dans le système décimal, par complémentation à 10.

$$247,36 - 147,73$$

#### Solution

Le complément à 10 de 147,73 est 852,27. En effectuant l'addition de ces deux nombres, on obtient 1 099,63. En retranchant le 1 de la colonne de gauche, on obtient le résultat de la soustraction, soit 99,63.

$$\begin{array}{r} 247,36 \\ + 852,27 \\ \hline 1099,63 \end{array}$$

### REMARQUE

Dans le système décimal, il n'est pas nécessaire d'utiliser la complémentation pour soustraire. Cependant, lorsque la soustraction est effectuée par un circuit électrique, comme dans un ordinateur, la complémentation permet d'effectuer la soustraction en utilisant le même circuit que pour l'addition.

### COMPLÉMENTATION À DEUX $(10)_2$ EN BINAIRE

En binaire, le complément est communément appelé *complément à 2*. Rappelons que les chiffres d'un nombre binaire sont appelés *bits*. Ce mot vient d'une contraction du terme anglais *binary digit* qui signifie *symbole binaire*. Ce terme décrit le fait qu'il y a deux états possibles, 0 et 1. Dans le système binaire, le complément à 2 d'un nombre est obtenu en soustrayant ce nombre de la puissance immédiatement supérieure de 2. Ainsi, le complément à 2 de 1101101 est obtenu de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} 1000000 \text{ et en empruntant } 0111111 \\ - 1101101 \\ \hline 0010011 \end{array}$$

On constate que le premier bit est soustrait de 10 et les autres de 1. En pratique, pour trouver le complément à 2, on laisse inchangés tous les bits à droite du nombre jusqu'au premier 1 inclusivement et on change tous les autres bits qui précèdent, en remplaçant les 0 par des 1 et les 1 par des 0. Cette procédure s'applique de la même façon pour les nombres fractionnaires finis. Dans une mémoire d'ordinateur, un nombre fractionnaire à développement infini n'existe pas car le nombre de bits des mémoires est toujours un nombre fini.

### Procédure

#### pour déterminer le complément à deux $(10)_2$ d'un nombre en binaire

1. Laisser inchangés les 0 à droite du nombre.
2. Laisser inchangé le premier 1 à partir de la droite du nombre.
3. Changer tous les autres chiffres qui précèdent, les 0 par des 1 et les 1 par des 0.





## MULTIPLICATION

La procédure pour effectuer le produit de deux nombres en décimal est basée sur la distributivité de la multiplication sur l'addition. Ainsi, pour effectuer le produit  $324 \times 35$ , on peut exprimer 35 comme somme, soit  $30 + 5$ . Le produit s'écrit alors  $324 \times (30 + 5)$  et par distributivité, on a :

$$\begin{aligned} 324 \times 35 &= 324 \times (30 + 5) \\ &= (324 \times 30) + (324 \times 5) \\ &= 9720 + 1\,620 \\ &= 11\,340 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 35 \\ \hline 1620 \\ + 972 \\ \hline 11340 \end{array}$$

En pratique, on applique cette propriété de la façon suivante. On superpose les deux nombres et on multiplie le nombre de la première ligne par chacun des chiffres du deuxième nombre en partant de la droite, en tenant compte des retenues et en décalant d'une colonne à chaque chiffre pour tenir compte de la position.

En binaire, on procède de la même façon et les situations que l'on peut rencontrer en effectuant le produit sont données ci-contre.

$$\begin{array}{l} 0 \times 0 = 0 \\ 1 \times 0 = 0 \\ 0 \times 1 = 0 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$$

La table d'opération permet de constater que lors d'une multiplication par 1, on répète le nombre multiplié et, lorsqu'on multiplie par zéro, on obtient 0. En pratique, on procède comme dans le système décimal.

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

### Procédure

#### pour multiplier des nombres en binaire naturel

1. Superposer les deux nombres.
2. Multiplier le nombre de la première ligne par chacun des chiffres de la deuxième ligne (répéter la première ligne pour multiplier par 1 et décaler d'une colonne vers la gauche pour multiplier par 0).
3. Additionner les produits obtenus.

## Exemple

Effectuer la multiplication des nombres binaires suivants :

$$111011001 \times 101011$$

*Solution*

On superpose les deux nombres, puis on multiplie le nombre de la première ligne par les chiffres de la deuxième ligne. Pour multiplier par 1, il suffit de réécrire le nombre de la première ligne.

$$\begin{array}{r} 111011001 \\ \times 101011 \\ \hline 111011001 \\ 111011001 \\ 1110110010 \\ 1110110010 \\ \hline 100111101110011 \end{array}$$

ajout d'un 0 dû à la multiplication par 0.

Pour multiplier par 0, on indique un 0 pour décaler d'une colonne, puis on effectue le produit par le chiffre suivant. Il ne reste qu'à additionner pour trouver le résultat de la multiplication.

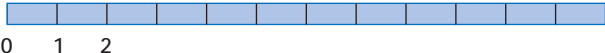
### REMARQUE

Pour multiplier par  $(10)_2$ , un nombre binaire ne comportant pas de partie fractionnaire, il suffit d'ajouter un 0 à droite du nombre. Si le nombre comporte une partie fractionnaire, il suffit de déplacer la virgule d'une position vers la droite. De la même façon, pour multiplier un nombre binaire par  $(100)_2$ , on lui ajoute deux zéros à droite s'il ne comporte pas de partie fractionnaire et on déplace la virgule de deux positions vers la droite lorsque le nombre comporte une partie fractionnaire.

La procédure pour effectuer la division en binaire est analogue à celle utilisée en décimal. Nous ne présenterons pas d'exemple de cette procédure ici. Le lecteur intéressé peut consulter l'ouvrage *Mathématiques appliquées à l'informatique eu même auteur*.

Les procédures d'opérations que nous avons présentées ici sont valides dans tous les systèmes positionnels, binaire, octal, décimal, hexadécimal ou autre.

**EXERCICES : NUMÉRATION 04**

1. Effectuer les opérations suivantes en binaire, sans utiliser la complémentation pour les soustractions.
  - a)  $100110 + 11101$     b)  $11001 + 1100$
  - c)  $1110011 - 111111$     d)  $1100,01 - 101,11$
  - e)  $1101 \times 111$     f)  $111011 \times 1101$
2. Trouver le complément à  $(10)_2$  des nombres binaires suivants
  - a) 11001    b) 11010
  - c) 11100    d) 10,001
  - e) 110000    f) 1001,01
3. Effectuer les soustractions suivantes par complémentation à  $(10)_2$ .
  - a)  $111001 - 101100$
  - b)  $110011 - 1100$
  - c)  $110000 - 10000$
  - d)  $111,0011 - 10,0101$
  - e)  $10011,01 - 110,1001$
  - f)  $1001,001 - 110,101$
4. Trouver le complément à  $(1)_2$  des nombres binaires suivants :
  - a) 110011    b) 11110101
  - c) 1010011    d) 110,001
  - e) 1100,0111    f) 1001,01
5. Effectuer les soustractions suivantes par complémentation à  $(1)_2$ .
  - a)  $110011 - 100101$
  - b)  $111011 - 1101$
  - c)  $110110,001 - 10011,1$
  - d)  $1110,0011 - 10,01$
6. Convertir en octal les nombres décimaux suivants :
  - a) 241    b) 153
  - c) 35,75    d) 127,45
7. Convertir en décimal les nombres octaux suivants :
  - a) 22    b) 157
  - c) 27,35    d) 126,371
  - e)  $243,1\bar{2}$     f)  $0,1\bar{25}$
8. Effectuer les additions suivantes en octal:
  - a)  $45 + 37$     b)  $257 + 176$
  - c)  $574 + 652$     d)  $7635 + 376$
  - e)  $5143 + 456$     f)  $467 + 325$
9. Trouver le complément à 8  $(10)_8$  des nombres suivants :
  - a) 54    b) 347
  - c) 4752    d) 15640
10. Effectuer les soustractions suivantes par complémentation à 8  $(10)_8$ :
  - a)  $452 - 344$     b)  $7642 - 354$
  - c)  $153,54 - 27,32$     d)  $7563 - 3100$
11. Écrire les nombres octaux manquants dans les séquences croissantes suivantes:
  - a) 56, 57, —, —, —, —, —.
  - b) 75, 76, —, —, —, —, —.
12. Écrire les nombres octaux entiers compris entre
  - a)  $(0)_8$  et  $(50)_8$ , par intervalle de 4.
  - b)  $(0)_8$  et  $(50)_8$ , par intervalle de 3.
13. Qu'est-ce que la représentation polynomiale d'un nombre?
14. En signe d'amitié, un émir arabe a fait parvenir au prince de chacun des trois pays voisins un nombre égal de chevaux. Chacun lui a fait parvenir ses remerciements; le premier pour 400 chevaux, le deuxième pour 121 chevaux et le troisième pour 202 chevaux. Sachant que les princes des pays voisins ne comptent pas dans le même système de numération (bien que la base de chaque système soit inférieure ou égale à 10), déterminer le nombre exact de chevaux dont l'émir a fait don et les bases utilisées par chacun des princes.
15. Numérotez chacune des divisions de la règle en base 4.
 

## NOUVEAU SYSTÈME PLANÉTAIRE

On a découvert un nouveau système planétaire composé de cinq planètes. Les habitants de ces planètes ont un même alphabet mais des systèmes de numération différents. Les planètes de ce système et leur système de numération sont présentés ci-dessous.



La première planète, nommée « Tétria », est formée de quatre côtés qui sont des triangles équilatéraux. Les habitants de cette planète ont adopté un système de numération positionnel de base 4 appelé « système tétraédral » dont les chiffres sont 0, 1, 2 et 3.

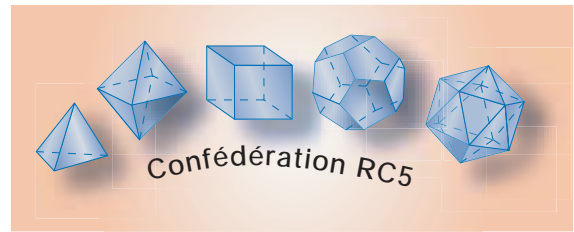
La deuxième planète, nommée « Hexalia », est formée de six côtés qui sont des carrés. Les habitants de cette planète ont adopté un système de numération positionnel de base 6 appelé « système hexaédral » dont les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

La troisième planète, nommée « Octalia », est formée de huit côtés qui sont des triangles équilatéraux. Les habitants de cette planète ont adopté un système de numération positionnel de base 8 appelé « système octal » dont les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

La quatrième planète, nommée « Dodécaédria », est formée de 12 côtés qui sont des pentagones. Les habitants de cette planète ont adopté un système de numération positionnel de base 12 appelé « système dodécaédral » dont les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A et B.

La cinquième planète, nommée « Icosaédria » est formée de 20 côtés qui sont des triangles équilatéraux. Les habitants de cette planète ont adopté un système de numération positionnel de base 20 appelé « système icosaédral » dont les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.

Les habitants de ces planètes ont décidé de former une confédération à laquelle on a donné le nom « Quinque Regularis Corpus » ou « RC5 ».



Le nombre de systèmes de numération sera réduit, on ne conservera que les systèmes en usage sur Tétria et Hexalia. Pour en faciliter l'apprentissage, il a été décidé de faire produire des tables pour les opérations d'addition et de multiplication dans chacun de ces systèmes. On vous en a confié la tâche. Compléter ces tables d'opérations.

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

×	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

×	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						