

SYSTÈMES DE NUMÉRATION POSITIONNELS

INTRODUCTION

Dans un système positionnel, le nombre de symboles est fixe. On représente par un symbole chaque chiffre inférieur à la base, incluant zéro. L'utilisation des chiffres se fait de façon cyclique et chaque fois qu'un cycle est complété, on ajoute une nouvelle colonne à gauche du nombre. Notre système positionnel est bien connu du lecteur, mais il existe d'autres systèmes, comme le système binaire (base 2), octal (base 8) et hexadécimal (base 16) qui sont utilisés dans les ordinateurs et en programmation.

CARACTÉRISTIQUES

Un système de numération est un système d'écriture des nombres à l'aide de symboles appelés *chiffres*. Il est dit *positionnel* lorsque la valeur des symboles ne dépend pas seulement de la forme des chiffres mais également de leur position dans le nombre.

La *base* d'un système de numération positionnel est le nombre de symboles (ou de chiffres) utilisés pour représenter les nombres dans ce système de numération.

Notre système de numération est un système positionnel de base dix. Cela signifie que nous utilisons dix symboles ou chiffres; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et que la valeur d'un chiffre dépend de la position qu'il occupe dans un nombre. Ainsi, dans le nombre 534, chaque symbole ou chiffre a une valeur qui dépend de sa position

$$534 = 500 + 30 + 4$$

ou encore
$$534 = 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Cette dernière expression est appelée *la représentation polynomiale* du nombre 534. Dans un système positionnel, les nombres fractionnaires s'expriment également comme somme de puissances successives de la base, cependant les exposants sont négatifs. Ainsi, le nombre 0,752 sous forme polynomiale donne :

$$\begin{aligned} 0,752 &= 0,7 + 0,05 + 0,002 \\ &= 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

On peut également exprimer ce nombre sous la forme équivalente suivante :

$$0,752 = \frac{7}{10^1} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3}$$

En faisant la somme du développement de la partie entière et du développement de la partie fractionnaire on obtient la représentation polynomiale de n'importe quel nombre réel. Ainsi, la représentation polynomiale du nombre 253,67 est :

$$253,67 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2}.$$

Définition

Système de numération positionnel

On appelle *système de numération positionnel* un système de numération dont la valeur des symboles ne dépend pas seulement de la forme des chiffres mais également de leur position dans le nombre.

Parmi les avantages des systèmes positionnels, notons que les nombres rationnels s'expriment comme suite décimale finie ou comme suite décimale périodique alors que les nombres irrationnels s'expriment comme suite décimale illimitée et non périodique.

CONVERSION BINAIRE-DÉCIMAL

Le système binaire est un système positionnel qui ne comporte que deux symboles : 0 et 1. Ainsi, le nombre 101101 est un nombre en système binaire. La représentation polynomiale de ce nombre nous permet de trouver son équivalent dans le système décimal. On trouve alors

$$\begin{aligned} 101101 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Pour convertir en décimal un nombre fractionnaire exprimé en binaire, nous utilisons également la représentation polynomiale. Ainsi, le nombre binaire 0,1011 peut être converti en décimal de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 0,1011 &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\
 &= 0,5 + 0,125 + 0,0625 \\
 &= 0,6875
 \end{aligned}$$

De façon générale, dans la représentation d'un nombre dans une base b , chaque chiffre a une valeur de position exprimée par les puissances successives de b , ces puissances étant négatives à droite de la virgule et non négatives à gauche. Un nombre de base b s'écrit comme suit :

$$(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_b$$

où les a_i sont les chiffres utilisés en base b . La valeur de l'indice i représente la *position* (ou le *rang*) du chiffre dans le nombre. Pour convertir un nombre de base b en nombre décimal, il suffit d'utiliser la représentation polynomiale du nombre, soit :

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \dots + a_{-m} b^{-m}$$

Procédure

pour convertir un nombre binaire en décimal

1. Multiplier chacun des chiffres du nombre par la puissance de la base correspondant à sa position dans le nombre.
2. Faire la somme des produits obtenus pour obtenir le nombre dans le système décimal.

Exemple

Trouver la valeur des nombres suivants dans la base dix.

- a) 110110 b) 0,0111
c) 1110,1101

Solution

- a) En écrivant le nombre 110110 sous forme polynomiale, on a :

$$\begin{aligned}
 110110 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\
 &= 32 + 16 + 4 + 2 = 54
 \end{aligned}$$

On peut donc écrire: $(110110)_2 = (54)_{10}$.

- b) $0,0111 = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$
 $= 0 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 0,4375$

On peut donc écrire: $(0,0111)_2 = (0,4375)_{10}$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 1110,1101 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\
 &\quad + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\
 &= 8 + 4 + 2 + 0,5 + 0,25 + 0,0625 \\
 &= 14,8125
 \end{aligned}$$

On peut donc écrire: $(1110,1101)_2 = (14,8125)_{10}$.

CONVERSION DÉCIMAL-BINAIRE

CONVERSION D'UN NOMBRE ENTIER

Écrire un nombre en binaire revient à l'exprimer comme une somme de puissances de 2. Les puissances successives de 2 sont $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $64 = 2^6$. Les coefficients de ces puissances successives sont les chiffres servant à écrire le nombre dans le système binaire. Ainsi, pour convertir $(51)_{10}$ en binaire, on peut développer comme suit :

$$\begin{aligned}
 51 &= 32 + 19 \\
 &= 32 + 16 + 3 \\
 &= 32 + 16 + 2 + 1 \\
 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0
 \end{aligned}$$

Les coefficients de la représentation polynomiale permettent alors d'écrire le nombre 51 en binaire, ce qui donne 110011.

Exemple

Exprimer le nombre $(83)_{10}$ comme somme de puissances de 2 pour l'écrire en binaire.

Solution

On identifie d'abord la plus grande puissance de 2 inférieure à 83; cette puissance est 64. On peut alors écrire $83 = 64 + 19$. La plus grande puissance de 2 inférieure à 19 est 16; on a donc :

$$83 = 64 + 16 + 3.$$

En poursuivant le processus, on obtient

$$\begin{aligned}
 83 &= 64 + 19 \\
 &= 64 + 16 + 3 \\
 &= 64 + 16 + 2 + 1 \\
 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0
 \end{aligned}$$

Les coefficients de la représentation polynomiale sont dans l'ordre 1010011. On peut donc écrire :

$$(83)_{10} = (1010011)_2.$$

Évidemment le processus de développement d'un nombre comme somme de puissances de la base peut se révéler long et fastidieux lorsque le nombre à convertir en binaire est assez grand. Illustrons comment on peut parvenir au même résultat plus efficacement. Pour convertir le nombre décimal 83 en base 2, on divise successivement le nombre à convertir par 2, et on trouve :

- 83 ÷ 2 donne 41 reste 1
- 41 ÷ 2 donne 20 reste 1
- 20 ÷ 2 donne 10 reste 0
- 10 ÷ 2 donne 5 reste 0
- 5 ÷ 2 donne 2 reste 1
- 2 ÷ 2 donne 1 reste 0
- 1 ÷ 2 donne 0 reste 1

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 83 &= 2 \times 41 + 1 = 2 \times 41 + 1 \times 2^0 \\
 &= 2 \times (2 \times 20 + 1) + 1 \times 2^0 \\
 &= 2^2 \times 20 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 2^2 \times (2 \times 10 + 0) + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 2^3 \times 10 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 2^3 \times (2 \times 5 + 0) + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 2^4 \times 5 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 2^4 \times (2 \times 2 + 1) + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 1011101
 \end{aligned}$$

Par conséquent, les restes des divisions successives sont les coefficients de la représentation polynomiale, le reste de la première division effectuée étant le chiffre de rang nul. En pratique, il nous suffit donc de rechercher les restes des divisions successives par 2. Voici un tableau permettant de le faire rapidement :

Quotient	Reste
83	2
41	1
20	1
10	0
5	0
2	1
1	0
0	1

Chiffre de rang nul

d'où $(83)_{10} = (1010011)_2$

La représentation du nombre 83 en binaire est alors donnée dans la colonne de droite, le chiffre de rang nul étant au sommet de la colonne.

Procédure

pour convertir un nombre entier en binaire

1. Diviser le nombre à convertir par 2 et noter le quotient et le reste de la division.
2. Diviser par 2 le quotient obtenu à l'étape précédente et noter à nouveau le quotient et le reste.
3. Poursuivre le processus jusqu'à ce que le quotient soit 0.
4. Utiliser les restes successifs pour écrire le nombre en binaire, le dernier reste obtenu étant le coefficient de la plus grande puissance de la base.

Exemple

Écrire en binaire le nombre décimal 61 en utilisant la méthode des divisions successives par la base 2.

Solution

Pour exprimer ce nombre en binaire, il faut procéder par divisions successives, ce qui donne le tableau ci-contre dans lequel la colonne de droite représente à la fois les restes des divisions et les coefficients de la représentation polynomiale, le coefficient de la plus grande puissance

Quotient	Reste
61	2
30	1
15	0
7	1
3	1
1	1
0	1

de 2 étant au bas de la colonne et le coefficient de la plus petite puissance, qui est le chiffre de rang nul, est au sommet de la colonne. Le nombre s'écrit donc $(111101)_2$.

CONVERSION D'UN NOMBRE FRACTIONNAIRE

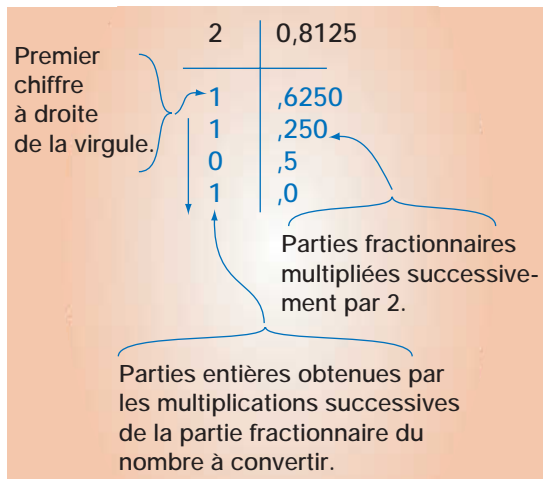
Pour exprimer un nombre fractionnaire (ou la partie fractionnaire d'un nombre) en binaire, nous procédons par multiplications successives par la base 2. Considérons le nombre fractionnaire $(0,8125)_{10}$; en multipliant successivement le numérateur et le dénominateur de ce nombre par 2, on obtient :

$$\begin{aligned}
 0,8125 &= \frac{1,6250}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{0,6250}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1,250}{2^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0,250}{2^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0,50}{2^3} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0,50}{2^3} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} \\
 &= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}
 \end{aligned}$$

On obtient donc la représentation polynomiale du nombre en base 2 et les coefficients des puissances successives nous donnent la représentation du nombre en binaire, soit :

$$(0,8125)_{10} = (0,1101)_2$$

On peut effectuer le même travail de façon synthétique. Puisque les chiffres cherchés sont les parties entières obtenues lors des multiplications successives, nous procéderons comme suit :



Pour écrire le nombre fractionnaire, le chiffre du sommet de la colonne est le premier à droite de la virgule et on écrit les autres dans l'ordre.

Procédure

pour convertir un nombre fractionnaire en binaire

1. Multiplier le nombre fractionnaire par 2 et noter la partie entière et la partie fractionnaire obtenues.
2. Multiplier à nouveau la partie fractionnaire du produit par 2, et noter le résultat.
3. Poursuivre le processus jusqu'à ce que la partie fractionnaire soit nulle.
4. Utiliser les parties entières successives pour écrire le nombre en binaire, la première partie entière étant le premier chiffre après la virgule.

REMARQUE

La conversion en binaire d'un nombre décimal ne donne pas toujours une suite décimale finie. On peut également obtenir une suite périodique infinie ou une suite infinie non périodique.

Exemple

Écrire le nombre $(0,2)_{10}$ en binaire.

Solution

Les multiplications successives par 2 donnent les résultats consignés dans le tableau ci-contre. On constate que les chiffres se répètent périodiquement. On indiquera la période en plaçant un trait horizontal au-dessus des nombres de la période. Le nombre s'écrit donc :

$$(0,\overline{0011})_2.$$

	2	0,2	
}	0	,4	
	0	,8	
	1	,6	
}	1	,2	
	0	,4	
	0	,8	
	.	.	
	.	.	

REMARQUE

Dans les situations pratiques, il faut tenir compte du contexte du problème pour déterminer le nombre de chiffres à calculer dans la partie fractionnaire.



Procédure

pour convertir en binaire un nombre comportant une partie entière et une partie fractionnaire

1. Convertir en binaire la partie entière par la procédure des divisions successives par 2.
2. Convertir en binaire la partie fractionnaire par la procédure des multiplications successives par 2.
3. Écrire chacune des parties du nombre selon la procédure appropriée.

Exemple

Écrire le nombre $(321,3125)_{10}$ en binaire.

Solution

Pour exprimer ce nombre en système binaire, il faut convertir séparément la partie entière et la partie fractionnaire. On exprime la partie entière par divisions successives par 2 et la partie fractionnaire par multiplications successives par 2, ce qui donne :

Partie entière (division par 2)		Partie fractionnaire (multiplication par 2)	
Quotient	Reste		
321	2	2	,3125
160	1	0	,625
80	0	1	,25
40	0	0	,5
20	0	1	,0
10	0		
5	0		
2	1		
1	0		
0	1		

$(101000001,0101)_2$

donc $(321,3125)_{10} = (1\ 0100\ 0001,0101)_2$.

REMARQUE

Les procédures présentées pour convertir un nombre du binaire au décimal et du décimal au binaire sont utilisables pour toutes les conversions d'un système positionnel dans un autre. Par exemple, dans le système octal, les symboles sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. On a alors :

$$(10)_8 = (8)_{10}$$

En effet, $(10)_8 = 1 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 8 + 0 = 8$. De la même façon, on a :

$$(11)_8 = (9)_{10}$$

$$(12)_8 = (10)_{10}$$

Pour exprimer 23 en base 8, on le décompose en une somme de puissances de 8, ce qui donne :

$$(23)_{10} = 16 + 7 = 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = (27)_8$$

De la même façon, on a :

$$(226)_{10} = 3 \times 64 + 5 \times 8 + 4$$

$$= 3 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 4 \times 8^0$$

$$= (354)_8$$

En pratique, on effectue les divisions et on note les valeurs obtenues.

EXERCICES : NUMÉRATION 03

1. Convertir en binaire les nombres décimaux suivants à l'aide de la procédure des divisions ou des multiplications successives.

a) 77	b) 187
f) 0,15	g) 0,125

3. Convertir en décimal les nombres binaires suivants à l'aide de la procédure appropriée.

a) 10011	b) 11011
c) 0,00101	d) 0,11101
e) 0,1101	f) 0,0011

3. Convertir en binaire les nombres décimaux suivants à l'aide de la procédure appropriée.

a) 51,375	b) 132,85
-----------	-----------

4. Convertir en décimal les nombres binaires suivants à l'aide de la procédure appropriée.

a) 1101,10011	b) 11001,001
---------------	--------------

5. Convertir en octal les nombres décimaux suivants :

a) 241	b) 153
c) 0,176	d) 0,341
e) 35,75	f) 127,45

6. Convertir en décimal les nombres octaux suivants :

a) 22	b) 157
c) 126,371	d) 0,413