

SYSTÈMES DE NUMÉRATION ADDITIFS








par: André Ross
 professeur de mathématiques
 Cégep de Lévis-Lauzon

INTRODUCTION

Dans certains systèmes de numération, on n'a pas recours à des valeurs de positions. C'est seulement la répétition des symboles qui permet de représenter un nombre. Le système hiéroglyphique égyptien, les système ionique (grec) et le système romain sont des exemples de systèmes additifs. Nous présenterons maintenant ces systèmes et en verrons les différences et les inconvénients.

SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉGYPTIEN

En Égypte, il y avait deux systèmes de numération. Le système hiéroglyphique et le système hiératique qui était utilisé par les prêtres. Nous ne présentons ici que le système hiéroglyphique qui était un système additif non positionnel de base 10. Les premiers symboles sont :

NUMÉRATION HIÉROGLYPHIQUE	
Valeur des symboles	
	L'unité est représentée par le bâton.
	La dizaine par l'anse de panier.
	La centaine par le rouleau de papyrus.
	Le millier par la fleur de lotus.
	Dix mille par le doigt désignant les étoiles.
	Cent mille par le têtard, sans doute à cause du grand nombre de grenouilles sur les bords du Nil.
	Le million par un dieu agenouillé soutenant le monde entier.

Chacun de ces symboles peut être répété jusqu'à 9 fois. Ainsi, le nombre 32 s'écrit :



En réalité, puisque les Égyptiens écrivaient de droite à gauche, il faut écrire :



Dans ce système, chaque symbole est répété le nombre de fois requis. Ainsi, le nombre 349 s'écrit :

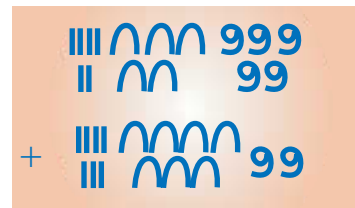


ADDITION

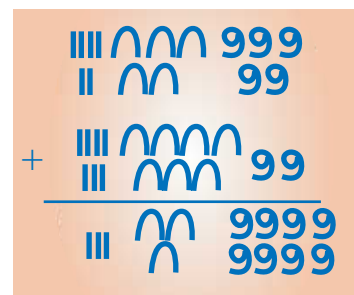
L'addition est simple à effectuer, compte tenu de la structure additive du système de numération. Il suffit de regrouper les symboles et remplacer chaque regroupement de dix symboles par le symbole supérieur.

Exemple

Effectuer l'addition suivante :



Solution



Dans cet exemple, on a additionné 556 et 277 et on a obtenu 833.

On remarque que la lecture de ce système est très facile, comparé à un système mixte.

Pour soustraire, il suffit de retrancher les symboles qui se répètent en empruntant au besoin.

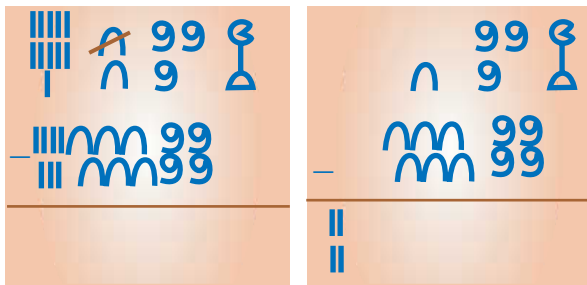
Exemple

Effectuer la soustraction suivante :

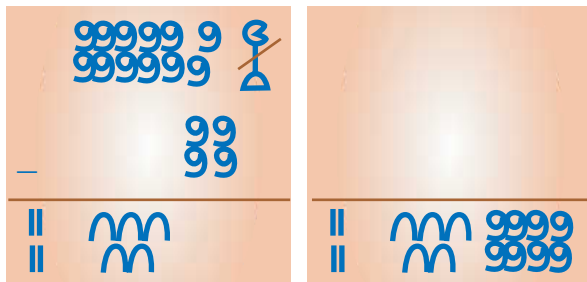
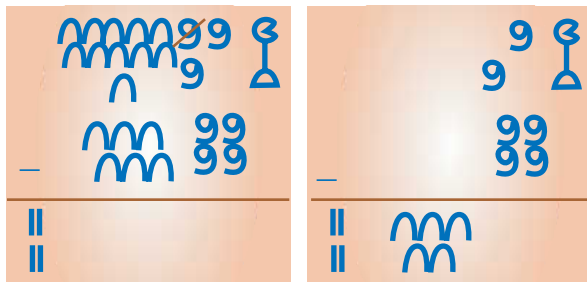


Solution

Il y a plus de bâtons dans le nombre à soustraire, il faut donc convertir une anse de panier en dix bâtons pour effectuer la soustraction des symboles de l'unité. Puis en retranchant les symboles qui se répètent, on obtient :



On poursuit de la même façon.



Dans cet exemple, on a effectué l'opération :
 $1\ 321 - 467 = 854$

MULTIPLICATION

L'opération de multiplication est basée sur le fait qu'il est très simple de multiplier un nombre par 2. Il suffit de doubler le nombre de symboles et d'effectuer les regroupements en remplaçant tout groupe de 10 symboles iden-

tiques par le symbole supérieur. De plus, tout nombre peut s'exprimer comme somme de puissances de 2.

Exemple

Effectuer le produit suivant :



Solution

On associe le plus grand des deux nombres à l'unité et on double pour obtenir dans une colonne les puissances successives de 2 et dans l'autre les multiples du plus grand des nombres à multiplier. On obtient alors :

I	^ ^
II	^ ^ ^ ^
III	II ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^
IIII	IIII ^ ^ ^ ^ 9 ^ ^ ^ ^ 9
IIII ^	IIII ^ ^ ^ ^ 99 IIII ^ ^ ^ 9

Lorsque l'on obtient dans la colonne de gauche la plus grande puissance de 2 inférieure au plus petit des deux nombres à multiplier, on arrête de doubler. On repère alors dans la colonne de gauche les nombres qui additionnés donnent le plus petit des nombres à multiplier. On a alors :

$$I + II + III \wedge = IIII \wedge$$

Pour compléter l'opération, il suffit d'additionner les résultats des lignes dont la somme donne ce multiplicateur. On obtient alors :

I	^ ^
II	^ ^ ^ ^
III ^	IIII ^ ^ ^ 99 IIII ^ ^ ^ 9
IIII ^	IIII ^ ^ ^ 99 IIII ^ 99

Le produit est donc 437.

DIVISION

La division s'effectue en déterminant la somme des multiples du diviseur qui donne le nombre à diviser ou le nombre le plus rapproché.

Exemple

Effectuer la division suivante :

$$\begin{array}{r} 359 \\ \div 27 \end{array}$$

Solution

On associe le diviseur à l'unité et on double successivement jusqu'à obtenir le plus grand multiple du diviseur inférieur au nombre à diviser. Cela donne :

	I
	II
	III
	IIII
	IIII I
	IIII II

Le nombre de la colonne de gauche est plus grand que le nombre à diviser. On cesse donc de doubler les nombres. Le nombre de l'avant dernière ligne dans la colonne de gauche est alors le plus grand multiple du diviseur inférieur au nombre à diviser. On le soustrait de ce dernier. Cela donne :

On repère alors dans le tableau le plus grand multiple du diviseur inférieur au reste et on soustrait à nouveau. On poursuit le processus jusqu'à ce que le reste soit inférieur au diviseur.

On obtient le quotient en faisant la somme des puissances associées aux multiples que l'on a soustrait du nombre à diviser. Cela donne :

Première soustraction		
Deuxième soustraction		
Troisième soustraction		I
	Reste	Quotient

Dans cet exemple, on a divisé 359 par 27, et on a obtenu 13 avec un reste de 8.

Si on interprète dans notre système le déroulement de cette division, le nombre à diviser est plus petit que 16 fois 27 (432) et plus grand que 8 fois 27 (216). Le scribe soustrait donc 216 au nombre à diviser. Cela donne :

$$\begin{array}{r} 359 \\ -216 \\ \hline 143 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ 8 \end{array}$$

Le reste de cette soustraction est plus grand que 4 fois 27 (108), le scribe soustrait alors ce nombre du reste et obtient :

$$\begin{array}{r} 359 \\ -216 \\ \hline 143 \\ -108 \\ \hline 37 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ 8 \\ 4 \end{array}$$

On remarque que sous le diviseur, on a noté les multiples du diviseur qui sont soustraits du nombre à diviser. Encore une fois, il existe un multiple du diviseur (1 fois 27) qui est inférieur au reste. Le scribe soustrait à nouveau et obtient :

Première soustraction	359	27
	<u>-216</u>	8
	143	
Deuxième soustraction	<u>-108</u>	4
	37	
Troisième soustraction	<u>-27</u>	1
	8	

Le reste de la soustraction est maintenant inférieur au diviseur. C'est également le reste de la division. Pour connaître le quotient, le scribe additionne les valeurs notées sous le diviseur.

Première soustraction	359	27
	<u>-216</u>	8
	143	
Deuxième soustraction	<u>-108</u>	4
	37	
Troisième soustraction	<u>-27</u>	1
	8	13
	Reste	Quotient

En pratique, le scribe exprime le nombre à diviser comme somme des multiples de 27. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 359 &= 216 + 143 \\
 &= 216 + 108 + 35 \\
 &= 216 + 108 + 27 + 8 \\
 &= 27 \times 8 + 27 \times 4 + 27 \times 1 + 8 \\
 &= 27 \times (8 + 4 + 1) + 8 \\
 &= 27 \times 13 + 8.
 \end{aligned}$$

Dans cette dernière représentation de la division, on utilise la propriété de distributivité du produit sur une somme. Les scribes utilisaient cette propriété sans que celle-ci soit explicitement formulée. Ils n'étaient pas en mesure de formuler une telle propriété, mais par la manipulation des nombres, ils peuvent avoir détecté une façon de simplifier les calculs et ces « trucs du métier » ont été transmis de génération en génération.

SYSTÈME DE NUMÉRATION GREC

Les Grecs de l'Antiquité ont développé plusieurs systèmes de numération dont deux furent principalement utilisés. Le système attique et le système ionique. Ce sont deux systèmes additifs à base 10. Le système attique étant assez semblable au système romain, sauf pour les symbo-

les utilisés, nous ne présenterons que le système ionique. Pour écrire les nombres, ils se servaient des lettres de leur alphabet qui pouvaient être accentuées ou accompagnées de signes complémentaires. La représentation d'une valeur numérique nécessitait un codage savant et l'utilisation de nombreux symboles.

Puisque les lettres étaient utilisés pour écrire les nombres il fallait pouvoir distinguer les mots des nombres, c'est pourquoi les nombres étaient parfois surlignés pour éviter toute confusion. Le tableau suivant indique les valeurs représentées par les lettres de l'alphabet grec et quelques symboles spéciaux.

NUMÉRATION GRECQUE (Ionique)							
α	1	ι	10	ρ	100	´α	1 000
β	2	κ	20	σ	200	´β	2 000
γ	3	λ	30	τ	300	´γ	3 000
δ	4	μ	40	υ	400	´δ	4 000
ε	5	ν	50	φ	500	´ε	5 000
Ϝ	6	ξ	60	χ	600	´Ϝ	6 000
ς	7	ο	70	ψ	700	´ς	7 000
η	8	π	80	ω	800	´η	8 000
θ	9	ζ	90	ϗ	900	´θ	9 000

Le nombre 35 s'écrit alors λε. De la même façon,

$$\kappa\alpha = 21 \text{ et } \mu\eta = 48$$

Certains nombres sont représentés par un symbole spécial, c'est le cas de 900. De plus, en faisant précéder un nombre d'un symbole qui ressemble à une virgule en haut et à gauche du nombre, on indique que sa valeur est multipliée par 1 000. Ainsi,

$$´\gamma = 3\,000$$

$$´\pi\delta = 84\,000$$

La myriade (10 000) est notée M. On peut l'indiquer après le chiffre, soit :

$$\gamma M = 30\,000$$

$$\pi\delta M = 840\,000$$

Ainsi, le nombre 847 541 s'écrit :

$$\pi\delta M' \zeta\phi\mu\alpha$$

On constate facilement la complexité d'un tel système de numération comparé au nôtre. Le nombre de symboles augmente avec les nombres à représenter. Il y a une série de dix symboles pour les unités, une autre série de dix symboles pour les dizaines, dix symboles pour les centaines. Pour les milliers, on reprend les symboles des unités

en ajoutant un élément graphique, la virgule en haut et à gauche. Un autre élément graphique, le M, s'ajoute lorsqu'on représente les myriades et le système s'alourdit sans cesse.

Ce système a bien sûr évolué au cours des siècles et chaque mathématicien semble avoir apporté des modifications personnelles aux notations. Ainsi, Archimède (~287 à ~212) a proposé un système pour représenter les grands nombres en distinguant ce qu'il appelle les « premiers nombres » qui vont de 1 à 99 999 999 (1 à $10^8 - 1$). Il compose alors une deuxième série, les « seconds nombres » allant de 10^8 à $10^{16} - 1$, puis les « nombres troisièmes », et ainsi de suite, jusqu'aux myriades de myriades.

Apollonius de Perga (~262 à ~180) a proposé l'utilisation d'une notation des grands nombres qui est transmise par Pappus d'Alexandrie (vers 300 apr. J.-C.). Le système utilise les nombres de 1 à 9 999 comme classe élémentaire. La classe élémentaire est suivie des myriades premières, soit les nombres de 10 000 à 99 990 000. La classe des myriades premières est :

$$\overset{\alpha}{M} = 10\ 000$$

On a alors : $\overset{\alpha}{M} \phi \kappa \alpha = 521 \times 10\ 000 = 5\ 210\ 000$

La classe des myriades secondes est :

$$\overset{\beta}{M} = (10\ 000)^2 = 100\ 000\ 000,$$

celles des myriades troisièmes $\overset{\gamma}{M} = (10\ 000)^3$, ainsi de suite.

Diophante d'Alexandrie (325 à 410) utilisait une version modifiée en utilisant un point pour séparer les myriades des multiples de mille. Ce qui donne :

$$\pi \delta . ' \zeta \phi \mu \alpha = 847\ 541$$

Ce système avait des limites, la notation ne pouvait dépasser 99 999 999 qui s'écrit :

$$' \theta \gamma \zeta \theta M ' \theta \gamma \zeta \theta$$

Ce système était difficile à utiliser même pour effectuer des opérations élémentaires comme l'addition. Pour les multiplications et les divisions, il fallait utiliser des tables assez difficiles à maîtriser. Le système de numération grec

était peu propice à une représentation mentale adéquate des nombres aussi les Grecs eurent-ils recours à des représentations concrètes en utilisant des points, des cailloux ou des segments rectilignes.

Curieusement, les Grecs ont adopté le système babylonien en astronomie et n'ont pas vu les avantages d'un système positionnel.

SYSTÈME DE NUMÉRATION ROMAINE

Le système romain est également un système additif de base 10. Ce système comporte des symboles principaux et des symboles secondaires. Les symboles principaux représentent l'unité et les multiples de 10, ce sont I, X, C et M. Les symboles secondaires représentent les multiples de 5, ce sont V, L et D. Le tableau suivant donne la valeur de chacun des symboles.

NUMÉRATION ROMAINE						
I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Pour effectuer les calculs, ils utilisaient des casiers réunis en damiers dans lesquels ils mettaient des petits cailloux pour représenter les unités, les dizaines, les centaines des nombres sur lesquels ils effectuaient des opérations. De cette pratique, nous vient le mot calcul dérivé du latin *calculus* qui signifie *petit caillou*.

La valeur du nombre écrit est obtenue par la somme ou la soustraction des caractères juxtaposés. Lorsqu'un des symboles principaux est à gauche d'un symbole plus grand, la valeur est obtenue par soustraction. Ainsi,

$$IX \text{ signifie } 10 - 1 = 9$$

$$CM \text{ signifie } 1000 - 100 = 900$$

$$XIV \text{ signifie } 10 + 5 - 1 = 14.$$

Le système comporte certaines règles d'écriture. Il n'est pas permis d'écrire un symbole secondaire ou plusieurs symboles principaux à gauche d'un symbole plus grand. De plus, on ne peut répéter un même symbole plus de trois fois de suite. Ces améliorations ainsi que le symbole M pour représenter 1000 datent cependant du Moyen-Âge.

Ce système présente un autre désavantage, commun à tous les systèmes additifs, la longueur du nombre ne représente pas sa grandeur. Ainsi, 1999 s'écrit :

MCMXCVIV

alors que 2000 s'écrit :

MM.

CONCLUSION

On peut difficilement avoir des certitudes quant aux raisons qui ont mené au choix de la base dix. Une hypothèse est liée au fait que les doigts ont été les premiers instruments de calcul. Quoiqu'il en soit, on constate de grandes différences entre les systèmes présentés ici, même s'ils sont tous les trois de base 10.

Dans le système égyptien, la caractéristique fondamentale d'un système additif est respectée. On utilise un nouveau symbole pour chaque puissance de la base et les valeurs intermédiaires sont représentées par la répétition du symbole marquant la puissance de la base.



Dans le système grec et dans le système romain, on introduit d'autres symboles pour des multiples des puissances de la base. Dans le système romain, les symboles secondaires ainsi introduits sont V (5×1), L (5×10) et D (5×100). Les symboles secondaires sont utilisés pour représenter cinq fois la puissance de la base afin de limiter la répétition d'un même symbole dans l'écriture.





Dans le système grec, on a un symbole pour chaque multiple des puissances de la base. Cela évite d'avoir à répéter plusieurs fois un même symbole en écrivant le nombre, mais cette profusion de symboles rend le système très complexes à utiliser lorsque l'on veut effectuer des opérations. Il faut garder à portée de la main le tableau de conversion. Dans notre système, nous avons également un mot pour certains multiples des puissances de la base, par exemple dix, vingt, trente, quarante, ... ou encore, cent, deux cent, ..., trente mille, quarante mille, ... Cependant, l'écriture de tous ces nombres se fait avec peu de symboles.



EXERCICES : NUMÉRATION 02

- Exprimer les nombres suivants dans le système égyptien hiéroglyphique.

a) 14	b) 21
c) 39	d) 397
e) 532	f) 314
- Exprimer les nombres suivants dans le système décimal moderne.

a) 	b) 
---	--
- Donner, dans le système égyptien, les 3 premiers nombres obtenus en doublant successivement les nombres suivants. Traduire les résultats en écriture moderne.

a) 	b) 
c) 	d) 
- Effectuer les additions suivantes dans le système égyptien hiéroglyphique. Traduire les résultats en écriture moderne.

a) 
b) 
- Construire la table de multiplication par 8 des nombres de 1 à 16 dans le système égyptien hiéroglyphique.
- Utiliser le procédé égyptien pour effectuer les multiplications suivantes en écriture moderne:

a) 15×27	b) 23×38
c) 28×37	d) 33×58
- Utiliser le procédé égyptien pour effectuer les divisions suivantes en écriture moderne :

a) $232 \div 29$	b) $435 \div 37$
c) $634 \div 58$	d) $914 \div 89$
- Exprimer les nombres suivants dans le système grec antique.

a) 14	b) 21
c) 39	d) 235
e) 562	f) 2 534
- Exprimer les nombres suivants dans le système décimal moderne.

a) κϵ	b) μδ
c) ,ε	d) ,γδ

