ALGÈBRE DES PROPOSITIONS

PAR : ANDRÉ ROSS
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

INTRODUCTION

Par son étude des formes valides du syllogisme, Aristote avait posé les bases de la logique. Pendant plus de deux mille ans, la théorie du syllogisme a constitué l'essentiel de la logique. Cependant, les énoncés que l'on rencontre dans la construction de la connaissance deviennent de plus en plus complexes. Il faut être en mesure de déterminer la valeur de vérité d'énoncés qui contiennent plusieurs énoncés simples reliés par des connectifs. L'algèbre des propositions traite ce type de problèmes. C'est au XIXe siècle que les logiciens ont développé de nouvelles approches. Pour distinguer cette approche de celle d'Aristote, on l'appelle *logique moderne* et celle d'Aristote est appelée *logique classique.*

En logique classique, on étudie les opérations logiques de la pensée, soit la définition, le jugement et le raisonnement. Elle vise à déterminer et codifier les lois logiques du raisonnement humain dans le but de comprendre comment l'humain construit la connaissance.

En logique moderne, l'approche est différente, on étudie les relations entre classes ou entre propositions afin de cerner leurs propriétés logiques comme la commutativité, la distributivité, la transitivité et la symétrie. C'est dans cette approche qu'a été développée la théorie des ensembles et la logique de relations propositionnelles (ou algèbre des propositions). Nous avons déjà eu un premier aperçu de la théorie des ensembles dont la représentation par les diagrammes de Venn a permis de simplifier la recherche des syllogismes valides. Dans cette section, nous allons présenter l'algèbre des propositions.

PROPOSITION

Une *proposition* (ou *énoncé booléen*) est un énoncé dont on peut décider s'il est vrai ou faux. Pour des énoncés simples, cela ne présente aucune difficulté. Pour un énoncé complexe formé en combinant plusieurs énoncés simples la valeur de vérité dépend des énoncés simples en cause et des opérateurs logiques reliant ces énoncés simples. Dans cette section, nous allons présenter les opérateurs logiques ainsi que leur table de vérité.

Définition

Proposition

Une *proposition* (ou *énoncé booléen*) est un énoncé dont on peut décider de la valeur de vérité. Les valeurs de vérité possibles étant « vrai » (représenté par V ou 1) et « faux » (représenté par F ou 0).

REMARQUE

Nous utiliserons dès maintenant l'écriture binaire et noterons la valeur de vérité par le chiffre 1 pour un énoncé vrai et par le chiffre 0 pour un énoncé faux.

• • •

Les phrases suivantes sont des propositions car on peut décider de leur valeur de vérité.

- Paris est la capitale de la France.
- Rome est la capitale de la Belgique.
- 2 + 2 = 7.
- 2 + 2 = 4.

Dans cette liste, le premier et le dernier énoncés sont vrais alors que les deux autres sont faux.

Voici maintenant une deuxième liste de phrases.

- Quelle est la température extérieure?
- Faites tous vos exercices.
- $x + 3 = 5$

Dans cette deuxième liste, il n'y a aucune proposition. Les deux premières phrases ne sont même pas des énoncés et on ne peut décider de la valeur de vérité de la troisième car aucune valeur n'a été assignée à la variable *x*. Dans ce dernier cas, « $x + 3 = 5$ » est appelée *forme booléenne*. Une forme booléenne devient un énoncé lorsqu'on affecte une valeur à chacune variable des variables présente dans la forme.

OPÉRATEURS LOGIQUES (OU BOOLÉENS)

Un énoncé booléen peut être composé de plusieurs énoncés simples reliés par des *opérateurs booléens* (on les appelle également *opérateurs connectifs* ou *opérateurs logiques*). La valeur de vérité d'un énoncé composé dépend à la fois des valeurs de vérité des énoncés simples qui le composent et des opérateurs reliant ces énoncés simples. Les trois opérateurs de base sont la négation, la disjonction et la conjonction. Pour simplifier l'étude de ces opérateurs, nous utiliserons les lettres minuscules p, q et r pour représenter des énoncés booléens.

Définition

Négation

Soit p un énoncé booléen. La *négation de p*, notée $\neg p$, et qui se lit « non p », est également un énoncé booléen qui est vrai lorsque p est faux et qui est faux lorsque p est vrai. La *table de vérité* de la négation est donnée ci-contre. D'autres symboles sont parfois utilisés pour noter la négation; ce sont « p' », « ~ p » et « non p ».

p	$\neg p$
0	1
1	0

Exemple

Trouver la négation des propositions suivantes et donner leur valeur de vérité.

a) p: Ottawa est la capitale de la France.

b) q: Rome est la capitale de l'Italie.

c) r: $2 + 5 = 9$.

Solution

a) $\neg p$: Ottawa n'est pas la capitale de la France. La proposition $\neg p$ est vraie puisque la proposition p est fausse.

b) $\neg q$: Rome n'est pas la capitale de l'Italie. La proposition $\neg q$ est fausse puisque la proposition q est vraie.

c) $\neg r$: $2 + 5 \neq 9$. La proposition $\neg r$ est vraie puisque la proposition r est fausse.

Définition

Conjonction

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \wedge q$, qui se lit « p et q », est vraie si les deux propositions p et q sont vraies et elle est fausse dans les autres cas. Cette proposition composée est appelée la *conjonction* de p et q. La table de vérité de la conjonction est donnée ci-contre.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

REMARQUE

Dans cette table de vérité, les deux premières colonnes sont réservées aux valeurs de vérité des deux propositions simples p et q alors que la dernière colonne est réservée aux valeurs de vérité de la proposition composée $p \wedge q$.

• • •

Exemple

Trouver la conjonction des propositions p et q suivantes et donner sa valeur de vérité.

a) p: Ottawa est la capitale de la France;
q: Rome est la capitale de l'Italie.

b) p: 5 est plus grand que 0;
q: 5 est plus petit que huit.

Solution

a) $p \wedge q$: Ottawa est la capitale de la France et Rome est la capitale de l'Italie. Cette conjonction est fausse car la proposition p est fausse.

b) $p \wedge q$: 5 est plus grand que 0 et 5 est plus petit que huit. Cette conjonction est vraie car les deux propositions sont vraies.

Définition

Disjonction

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \vee q$, qui se lit « p ou q », est vraie si au moins l'une des deux propositions simples est vraie; et elle est fausse lorsque les deux sont fausses. Cette proposition composée est appelée la *disjonction* de p et q. La table de vérité de la disjonction est donnée ci-contre.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemple

Trouver la disjonction des énoncés p et q suivants et donner sa valeur de vérité.

a) p: Ottawa est la capitale de la France;
q: Rome est la capitale de l'Italie.

b) p: 5 est plus petit que 0;
q: 5 est plus grand que 8.

c) p: 5 est plus grand que 0;
q: 5 est plus petit que 6.

Solution

a) Ottawa est la capitale de la France ou Rome est la capitale de l'Italie. Cette disjonction est vraie car la proposition q est vraie.

b) 5 est plus petit que 0 ou 5 est plus grand que 8. Cette disjonction est fausse car la proposition p est fausse et la proposition q est fausse.

c) 5 est plus grand que 0 ou 5 est plus petit que 6. Cette disjonction est vraie car la proposition p est vraie et la proposition q est vraie.

Définition

Disjonction exclusive

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \oplus q$, qui se lit « p ou exclusif q », est vraie si une seule des deux propositions simples est vraie; et elle est fausse dans les autres cas. Cette proposition composée est appelée la *disjonction exclusive* de p et q. La table de vérité de la disjonction exclusive est donnée ci-contre.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Définition

Tautologie

Une *tautologie*, notée t, est un énoncé composé qui est toujours vrai, quelle que soit la valeur de vérité de ses composantes.

L'énoncé $p \vee \neg p$ est une tautologie, comme sa table de vérité, donnée ci-contre, permet de le constater.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

En langage courant, l'énoncé « il pleut ou il ne pleut pas » est une tautologie.

Définition

Contradiction

Une *contradiction*, notée c, est un énoncé composé qui est toujours faux, quelle que soit la valeur de vérité de ses composantes.

L'énoncé $p \wedge \neg p$ est une contradiction comme en témoigne sa table de vérité, donnée ci-contre.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

En langage courant, l'énoncé « il pleut et il ne pleut pas » est une contradiction.

REMARQUE

La négation d'une tautologie est une contradiction et la négation d'une contradiction est une tautologie.

• • •

Définition

Conditionnelle (ou Implication)

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \rightarrow q$, qui se lit, « si p alors q » ou « p implique q », est fausse lorsque la proposition p est vraie et que la proposition q est fausse; et elle est vraie dans tous les autres cas. Cette proposition composée est appelée une conditionnelle ou une *implication*. La table de vérité de l'implication est donnée ci-contre.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dans une implication $p \rightarrow q$, la proposition p est appelée l'*hypothèse* (ou l'*antécédent* ou la *prémisse*) et la proposition q est appelée la *conclusion* (ou la *conséquence*). Il y a différentes terminologies pour désigner l'implication en mathématiques. Les plus utilisées sont « si p alors q » et « p implique q ».

Dans le langage courant, on ne s'intéresse pas à l'implication lorsque l'hypothèse est fausse. En mathématiques, on s'y intéresse et on assigne une valeur de vérité à l'implication même lorsque l'hypothèse est fausse. Cependant, il faut distinguer d'une part la valeur de vérité de l'implication comme lien logique et d'autre part la valeur de vérité de la conclusion. Dire que l'implication est vraie ne signifie pas que la conclusion est vraie, cela signifie que le lien logique est vrai. Cependant, si l'antécédent est vrai et le lien logique est vrai, la conclusion est nécessairement vraie.

Considérons, par exemple, la proposition suivante:

> *Si n* est un nombre impair plus grand ou égal à 3 alors, *n* est la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier.

Cet énoncé composé a la forme d'une conditionnelle. La table de vérité de la conditionnelle nous indique comment procéder pour statuer sur la valeur de vérité d'un tel énoncé.

La proposition est parfois vraie comme l'illustre le tableau ci-contre. On pourrait prolonger cette liste en décomposant d'autres nombres pairs plus grands que 3 comme somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier. Cependant, l'énumération de cas pour lesquels la conditionnelle est vraie ne prouve pas que celle-ci est toujours vraie, même si la liste est très longue,

TABLEAU

n	*Somme*
3	$2 + 1$
5	$2 + 3$
7	$2 + 5$
9	$2^2 + 5$
11	$2^3 + 3$
13	$2^3 + 5$
15	$2^3 + 7$
17	$2^2 + 13$
19	$2^4 + 3$
21	$2^4 + 5$
23	$2^4 + 7$
25	$2^3 + 17$
27	$2^4 + 11$

Si on peut trouver un cas pour lequel l'antécédent est vrai et le conséquent est faux, on pourra dire que la conditionnelle n'est pas toujours vraie.

Un tel cas existe, le nombre 127 est un nombre impair plus grand que 3 et il ne peut s'exprimer comme somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier. En effet, toutes les décompositions de 127 comportant une puissance de 2 sont les suivantes

$127 = 1 + 126 = 2^0 + (2 \times 63)$
$127 = 2 + 125 = 2 + (5 \times 25)$
$127 = 4 + 123 = 2^2 + (3 \times 41)$
$127 = 8 + 119 = 2^3 + (7 \times 17)$
$127 = 16 + 111 = 2^4 + (3 \times 37)$
$127 = 32 + 95 = 2^5 + (5 \times 19)$
$127 = 64 + 63 = 2^6 + (3 \times 21)$.

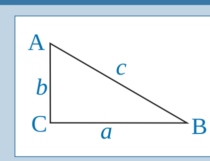
Par conséquent, 127 n'est pas la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier. Ce seul exemple suffit pour conclure que la proposition 1 est fausse. Car, il est possible de trouver un cas où l'antécédent est vrai, 127 est un nombre impair plus grand ou égal à 3, et la conclusion est fausse, 127 n'est pas la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier.

Pour montrer qu'une conditionnelle est toujours vraie, il faut démontrer que, dans tous les cas où l'antécédent est vrai, le conséquent est également vrai.

Considérons la proposition suivante.

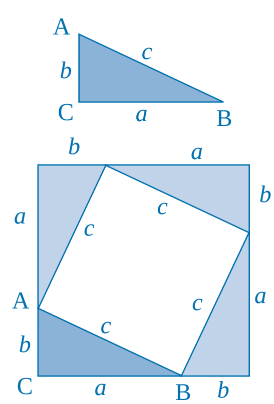
Proposition 2

Si un triangle ABC, de *côtés a, b et c*, est rectangle en C, alors les longueurs des côtés satisfont à la relation $a^2 + b^2 = c^2$.



Démonstration

Soit ABC, un triangle de *côtés a, b et c*, rectangle en C. En reproduisant le triangle ABC, on peut construire le carré CDEF ci-contre. L'aire de ce carré est alors
$A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
L'aire du carré CDEF est également la somme des aires des triangles rectangles et du carré de côté c. Ce qui donne



$$A = 4 \times \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2.$$

On a donc $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$.
D'où l'on tire $a^2 + b^2 = c^2$.
Puisque le triangle ABC est un triangle rectangle quelconque, l'argument est valide pour tous les triangles rectangles. On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tous les triangles rectangles.

Définition

Implication logique

Soit P et Q deux énoncés composés. On dit que P *implique logiquement* Q si l'énoncé $P \to Q$ est une tautologie. On note alors $P \Rightarrow Q$.

La proposition 2 est une implication logique. Puisque la conditionnelle est toujours vraie.

Procédure

pour montrer qu'une proposition conditionnelle est fausse

Construire un contre-exemple. Un contre-exemple est un cas pour lequel l'antécédent de la conditionnelle est vrai et le conséquent est faux.

Procédure

pour démontrer qu'une proposition conditionnelle est une implication logique

1. Considérer un objet quelconque dans l'ensemble des objets sur lesquels porte la conditionnelle.
2. Construire une argumentation, en justifiant chacune des étapes, montrant que, pour l'objet choisi, le conséquent est vrai.
3. Tirer la conclusion particulière (la conditionnelle est vraie pour l'objet choisi).
4. Tirer la conclusion générale (l'objet choisi étant quelconque, l'argument est valide pour tous les objets satisfaisant à l'antécédent).

Définition

Réciproque et contraposée

Soit $p \to q$, une implication. Alors, l'implication $q \to p$ est appelée *implication réciproque* et l'implication $\neg q \to \neg p$ est appelée *contraposée* (ou *implication contraposée*).

La réciproque de la proposition 2 s'énonce comme suit :

Proposition

Si un triangle ABC, de côtés a, b et c, satisfait à la relation $a^2 + b^2 = c^2$, alors le triangle est rectangle en C.

La contraposée de la proposition 2 s'énonce comme suit :

Proposition contraposée

Si un triangle ABC, de côtés a, b et c, ne satisfait à la relation $a^2 + b^2 = c^2$, alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemple

Écrire la réciproque et la contraposée des implications suivantes:

a) $p \to q$: si vous conduisez à plus de 110 km/h alors vous aurez une contravention.

b) $r \to s$: si vous ne faites pas vos exercices alors vous échouerez le cours.

Solution

a) $q \to p$: si vous avez une contravention alors vous conduisiez à plus de 110 km/h.
$\neg q \to \neg p$: si n'avez pas de contravention, alors vous ne vous conduisez pas à plus de 110 km/h

b) $s \to r$: si vous échouez le cours alors vous n'avez pas fait vos exercices.
$\neg s \to \neg r$: si vous n'échouez pas le cours alors vous avez fait vos exercices.

Définition

Biconditionnelle

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée p ´ q, qui se lit « p si et seulement si q », est vraie lorsque les deux propositions ont la même valeur de vérité; elle est fausse dans les autres cas. Cette proposition composée est appelée une *biconditionnelle*. La table de vérité de la biconditionnelle est donnée ci-contre.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Définition

Équivalence logique

Soit P et Q deux énoncés composés. On dit que P et Q sont *logiquement équivalents* si l'énoncé $P \leftrightarrow Q$ est une tautologie. On note alors $P \equiv Q$ ou $P \Leftrightarrow Q$.

On peut identifier certaines équivalences logiques simples par comparaison des tables de vérité.

Exemple

Construire la table de vérité de la proposition composée $p \wedge \neg q$. Comparer cette table à celles déjà présentées dans le chapitre.

Solution

La table de vérité de cette proposition est

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

En comparant cette table de vérité à celles déjà présentées, on constate que la proposition $p \wedge \neg q$ a une relation avec la table de l'implication. En effet, lorsque la proposition $p \wedge \neg q$ est vraie, la proposition $p \rightarrow q$ est fausse et lorsque la proposition $p \wedge \neg q$ est fausse, la proposition $p \rightarrow q$ est vraie.

REMARQUE

La conclusion de l'exemple précédent nous porte à croire qu'il doit être possible de démontrer l'équivalence des propositions $\neg(p \rightarrow q)$ et $p \wedge \neg q$.

• • •

Procédure

pour démontrer l'équivalence logique de deux propositions

1. Construire la table de vérité de la biconditionnelle reliant les deux formes propositionelles.
2. Vérifier que la biconditionnelle est bien une tautologie.

Exemple

Montrer que les propositions $\neg(p \rightarrow q)$ et $p \wedge \neg q$ sont logiquement équivalentes.

Solution

Pour démontrer l'équivalence logique, il faut montrer que la biconditionnelle $[\neg(p \rightarrow q)] \leftrightarrow [p \wedge \neg q]$ est une tautologie.

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$[\neg(p \rightarrow q)]$	$\leftrightarrow$	$[p \wedge \neg q]$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0

On constate que la biconditionnelle est une tautologie; les deux énoncés composés sont donc logiquement équivalents et on peut écrire

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

REMARQUE

Les parenthèses et crochets servent à indiquer les priorités des opérations, il ne faut pas les négliger.

• • •

Exemple

Montrer que les propositions $\neg(p \vee q)$ et $\neg p \wedge \neg q$ sont logiquement équivalentes.

Solution

Pour démontrer l'équivalence logique, il faut montrer que la biconditionnelle $[\neg(p \vee q)] \leftrightarrow [\neg p \wedge \neg q]$ est une tautologie.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$[\neg(p \vee q)]$	$\leftrightarrow$	$[\neg p \wedge \neg q]$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0

On constate que la biconditionnelle est une tautologie; les deux énoncés composés sont donc logiquement équivalents et on peut écrire

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

REMARQUE

Deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles les ont mêmes valeurs de vérité, ce qui signifie que la biconditionnelle reliant ces propositions est une tautologie. Ainsi, l'implication $p \rightarrow q$ et sa contraposée sont logiquement équivalentes.

• • •

Exemple

Montrer que les propositions $(p \rightarrow q)$ et $(\neg q \rightarrow \neg p)$ sont logiquement équivalentes.

Solution

Pour démontrer l'équivalence logique, il faut montrer que la biconditionnelle $[\neg(p \vee q)] \leftrightarrow [\neg p \wedge \neg q]$ est une tautologie.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

On constate que la biconditionnelle est une tautologie. Les deux énoncés composés sont donc logiquement équivalents et on peut écrire :

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

REMARQUE

La conditionnelle $p \rightarrow q$ et sa contraposée sont logiquement équivalentes, ce qui signifie que si on démontre qu'une conditionnelle est une implication logique, alors sa contraposée est également une implication logique. En d'autres mots, il suffit de démontrer l'une des conditionnelles pour conclure à la validité de l'autre.

• • •

Exemple

Montrer que les propositions $(p \rightarrow q)$ et $(q \rightarrow p)$ ne sont pas logiquement équivalentes.

Solution

Construisons la table de vérité de la biconditionnelle $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$. Ce qui donne :

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

La biconditionnelle reliant les propositions $(p \rightarrow q)$ et $(q \rightarrow p)$ n'est pas une tautologie, ce qui signifie que les deux propositions ne sont pas logiquement équivalentes.

REMARQUE

Lorsqu'on peut montrer qu'une conditionnelle est une implication logique, on peut conclure, en vertu de la démonstration de l'exemple 8, que sa contraposée est également une implication logique. Cependant, sa réciproque n'est pas nécessairement une implication logique, comme l'indique l'exemple 9

• • •

Exemple

Montrer que la proposition $(p \leftrightarrow q)$ est logiquement équivalente à la conjonction $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Solution

Construisons la table de vérité de la biconditionnelle $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Ce qui donne :

p	q	$(p\leftrightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(p\rightarrow q)$	$\wedge$	$(q\rightarrow p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

La biconditionnelle $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ est une tautologie, ce qui signifie que les deux propositions sont logiquement équivalentes. On peut écrire $(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$.

REMARQUE

Une biconditionnelle est la conjonction d'une conditionnelle et de sa réciproque. De plus, pour avoir équivalence logique entre deux propositions, il faut que la conditionnelle soit une implication logique et que la réciproque soit également une implication logique. Cette constatation nous indique comment procéder pour démontrer une propriété dont la forme logique est une biconditionnelle.

● ● ●

Procédure
pour démontrer une propriété dont la forme logique est une biconditionnelle

1. Démontrer que la conditionnelle est une implication logique ($\Rightarrow$).
2. Démontrer que la réciproque est une implication logique ($\Leftarrow$).
3. Tirer la conclusion.

DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

La démonstration par l'absurde est un procédé basé sur l'implication logique démontrée dans l'exemple suivant.

Exemple

Montrer que la proposition $(\neg p\rightarrow c)$ implique logiquement la proposition p.

Solution

Construisons la table de vérité de la conditionnelle $(\neg p\rightarrow c)\rightarrow p$. Ce qui donne

p	$\neg p$	c	$(\neg p\rightarrow c)$	$\rightarrow$	p
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1

La conditionnelle reliant les propositions $(\neg p\rightarrow c)$ et p est une tautologie. Ce qui signifie que la proposition $(\neg p\rightarrow c)$ implique logiquement la proposition p. On peut donc écrire

$$(\neg p\rightarrow c)\Rightarrow p.$$

Procédure
pour effectuer une démonstration par l'absurde

1. Introduire comme hypothèse supplémentaire la négation $(\neg p)$ de la proposition à démontrer.
2. Démontrer que cette hypothèse entraîne une contradiction.
3. Tirer la conclusion.

DÉMONSTRATION D'UNICITÉ

On doit parfois montrer qu'un seul élément satisfait à une condition donnée. La démonstration d'unicité consiste à poser en hypothèse qu'il existe deux tels éléments et à démontrer qu'ils sont nécessairement égaux. Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse selon laquelle il existe deux tels éléments. On doit donc conclure qu'il ne peut exister deux éléments distincts satisfaisant à la condition.

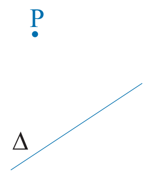
Exemple

Montrer que d'un point P hors d'une droite Δ, on ne peut tracer qu'une et une seule perpendiculaire à la droite Δ.

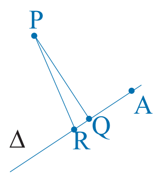
Solution

La démonstration de cette proposition comporte deux parties. Il faut d'abord montrer qu'il existe une perpendiculaire, puis montrer qu'il en existe une seule. La première partie de la démonstration consiste à construire une perpendiculaire à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas. Nous ne présenterons pas cette partie de la démonstration, le lecteur peut facilement trouver cette construction dans un livre de géométrie élémentaire. La démonstration d'unicité se fait comme suit:

Soit Δ, une droite quelconque, et P, un point extérieur à cette droite. Supposons qu'il existe deux perpendiculaires abaissées de P sur la droite Δ et notons Q et R, les pieds de ces perpendiculaires.



Considérons un point A quelconque sur la droite Δ. Les angles ARP et AQP sont des angles droits puisque les droites PQ et PR sont perpendiculaires à la droite Δ. Cependant, puisque tous les angles droits sont congrus, P et Q sont un seul et même point. Ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle il existe deux perpendiculaires à Δ abaissées du point P.



Par conséquent, il existe une et une seule perpendiculaire abaissée de P sur la droite Δ.

Puisque Δ est une droite quelconque et P un point quelconque hors de cette droite, l'argument est valide pour toutes les droites et pour tous les points hors de ces droites. On peut donc conclure que:

D'un point *P* hors d'une droite Δ, on ne peut tracer qu'une et une seule perpendiculaire à la droite Δ.

REMARQUE

Dans la démonstration, on fait appel à une notion commune et à un postulat de la géométrie euclidienne.

La notion commune s'énonce:

> *Les choses qui coïncident entre elles lorsqu'on les superpose sont égales.*

Le postulat s'énonce:

> « *tous les angles droits sont congrus* ».

Dans la démonstration de l'exemple A.6, en superposant les angles droits, les côtés et le sommet se superposent puisque les angles droits sont congrus et P et Q sont un seul et même point.

• • •

Rappelons qu'un *postulat* est un principe d'un système déductif qu'on ne peut utiliser dans une démonstration sans l'assentiment de l'interlocuteur ». Il n'est pas suffisant bien sûr de dire: « je n'accepte pas ce postulat ». Il faut être capable de justifier son refus. Un *axiome* est une propriété simple et évidente pour toute personne qui en comprend le sens.

CONCLUSION

La logique classique se préoccupait des opérations logiques de la pensée, la définition, le jugement et le raisonnement. Elle cherchait les lois logiques du raisonnement humain pour comprendre comment se structurait la connaissance dans l'esprit humain.

La logique moderne a une approche plus mathématique et cherche plutôt à déterminer les relations et opérations abstraites entre les propositions. Cette approche a permis de développer une algèbre des propositions dans laquelle on accorde une attention particulière aux propriétés des opérations logiques.

Cependant, la logique moderne n'invalide pas la logique classique. Au contraire, elle permet de jeter un regard nouveau sur les mécanismes du raisonnement humain.

GEORGE BOOLE

George Boole était un mathématicien anglais né en 1815. Il fut initié aux mathématiques et à la construction d'appareils d'optique par son père. Il s'intéressa aux langues et fut initié au latin par un libraire. Sans avoir obtenu de diplôme, il ouvrit une école en 1835 et se mit résolument à l'étude des mathématiques. Il finit par se rendre compte qu'il avait perdu au moins cinq années à essayer d'apprendre les mathématiques par lui-même au lieu d'avoir un professeur. À cette époque, il étudia les travaux de Laplace et de Lagrange et suivit des cours à Cambridge. Il publia une application de méthodes algébriques à la solution d'équations différentielles dans les *Transactions of the Royal Society*. Pour cet article, il reçut la médaille de la Royal Society.

Il devint professeur de mathématiques au Queens College en 1849 où il enseigna jusqu'à la fin de sa vie. En 1854, il publia *An investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Dans cet ouvrage, il développa une nouvelle approche de la logique dont il fit une algèbre. Il mit en évidence l'analogie entre les symboles algébriques et les symboles logiques.

Boole a également publié *Treatise on Differential Equations* et *Treatise on the Calculus of Finite Differences* ainsi que des méthodes générales sur le calcul des probabilités. En 1864, il attrapa une forte fièvre après avoir fait à pied, et sous la pluie, le trajet de sa résidence au College, un parcours d'environ deux kilomètres. Cette fièvre entraîna des complications pulmonaires dont il est mort à 49 ans.

L'algèbre de Boole a de multiples applications dans la conception des réseaux téléphoniques et dans la conception des ordinateurs. Ses travaux ont contribué de façon importante à l'avènement de l'informatique.

AUGUSTUS DE MORGAN

Augustus DE MORGAN était un mathématicien anglais. Il est né en 1806 à Madura, en Inde, où son père servait comme officier de l'armée britannique. Il perdit un œil peu après sa naissance et, à l'âge de sept mois, sa famille retourna en Angleterre. Orphelin de père à 10 ans, il entra au Trinity College de Cambridge à 16 ans. En 1827, il obtint la chaire de mathématiques au University College de Londres qui venait d'être créée. Il démissionna de ce poste en 1831 pour une question de principe. Il occupa de nouveau cette chaire de 1836 à 1866.

En 1838, il définit le terme « induction mathématique », donnant une assise rigoureuse à un procédé qui était déjà utilisé sans que les fondements n'en aient été posés de façon précise.

De Morgan a écrit plusieurs mémoires sur l'algèbre, s'intéressant aux symboles et aux relations entre ceux-ci. C'est par les ouvrages *Formal logic*, édité en 1847, et *Trigonometry and Double Algebra*, édité en 1849, que DE MORGAN a fait connaître ses idées sur le sujet. Pour lui, l'algèbre est une collection de symboles et d'opérations définies sur ces symboles. L'algèbre comporte des lois, comme la distributivité, la commutativité, les lois des exposants, etc. Il distinguait :

- l'arithmétique universelle, qui traite des nombres naturels;
- l'algèbre simple, dont l'objet est l'étude des nombres négatifs;
- l'algèbre double, qui traite des nombres complexes.

Il fut cofondateur de la London Mathematical Society dont il fut le premier président, en 1866. Il est mort à Londres en 1871.

EMIL POST

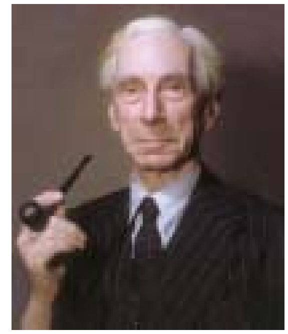
Emil Post est né le 11 février 1897 à Augustow, dans une région de la Pologne qui était à l'époque sous domination russe. La famille émigra aux États-Unis en 1904 à la recherche d'un meilleur avenir.
Étudiant très brillant, il produisit un article alors qu'il était encore étudiant sur la généralisation de la différentiation. Dans sa thèse de doctorat, il démontra la consistance et la complétude du calcul propositionnel décrit dans *Principia Mathematica* en introduisant une méthode nouvelle, celle des tables de vérité. Par la suite, il généralisa cette méthode dans laquelle les valeurs de vérité sont « vrai » et « faux » à une méthode dans laquelle il y a un nombre fini de valeurs de vérité. La contribution la plus remarquable de cette thèse était le fondement de la logique comme système d'inférence basé sur un nombre fini de manipulation de symboles. Ce système produit récursivement un ensemble dénombrable de mots sur un alphabet fini.

Après avoir reçu son doctorat, il se rendit à l'Université de Princeton pour une année d'étude et, de retour à l'Université de Columbia, il subit sa première attaque de maniaco-dépression. Post a souffert de cette maladie toute sa vie car il n'y avait pas à l'époque de médicament pour traiter ce genre d'affections. À partir de 1932 jusqu'à sa mort, il occupa un poste d'enseignant au City College de New York.

Post est décédé le 21 avril 1954 à New York à l'âge de 57 ans, fort probablement des suites des traitements qu'il recevait pour sa maladie mentale. À l'époque, la maniaco-dépression était traitée par des électrochocs, traitement qu'il reçut à plusieurs reprises. C'est peu après avoir subi un tel traitement qu'il fut victime d'un arrêt cardiaque.

Post est surtout connu pour ses travaux sur les groupes polyadiques, les fonctions récursives et l'insolvabilité de problèmes de combinatoire. Il introduisit le concepts de complétude et de consistance dans un article sur les tables de vérité. Les fonctions récursives sont d'usage courant dans les calculs par ordinateur.

BERTRAND RUSSEL



Bertrand Russel est né le 18 mai 1872 à Ravenscroft, en Écosse. Après la mort de sa mère en 1874 et celle de son père en 1876, lui et son frère furent accueillis par leurs grands-parents, malgré les dernières volontés de leur père qui avait souhaité qu'ils soient confiés à des athées, ce à quoi les grands-parents n'ont pu se résoudre. Après la mort, en 1878, de son grand-père qui avait été premier ministre à deux reprises durant le règne de la reine Victoria, il fut éduqué par sa grand-mère, Lady Russel, puis fut admis à Trinity College où il reçut des diplômes en mathématiques et en sciences morales. Malgré son élection à la Royal Society, en 1908, sa carrière à Trinity College fut interrompue en 1916 alors qu'il fut condamné à une amende pour des activités pacifistes. Deux ans plus tard, il fut condamné à nouveau et passa six mois en prison. Durant ce séjour, il écrivit l'ouvrage *Introduction to Mathematical Philosophy*, édité en 1919.

À la fin des années 1930, il occupa un poste d'enseignement au City College de New York, mais son engagement fut révoqué suite à des protestations publiques et à une décision judiciaire à l'effet qu'il n'était pas moralement compétent pour y enseigner. Neuf ans plus tard, il reçut l'Ordre du Mérite et le prix Nobel de littérature en 1950. Durant les années 1950 et 1960, il fut une inspiration pour beaucoup de jeunes à cause de ses multiples protestations conte la guerre et le nucléaire. Il fut, en 1958, président fondateur de la campagne pour le désarmement nucléaire et fut à nouveau emprisonné en 1961.

Par ses travaux, il a apporté des contributions importantes aux fondements des mathématiques et à la logique formelle moderne ainsi qu'à la philosophie. Avec Kurt Gödel, il est un des plus importants logiciens du XX^{e} siècle. Il est l'auteur du paradoxe qui porte son nom et qu'il a formulé en 1901 alors qu'il travaillait sur l'ouvrage *Principles of Mathematics*, *édité* en 1903.

ALAN MATHISON TURING

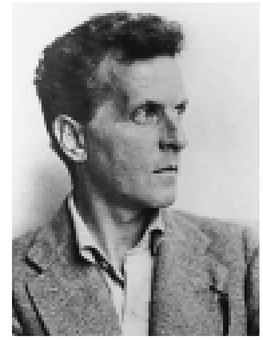
Alan Mathison Turing était un mathématicien anglais, né le 23 juin 1912. Dès ses débuts à l'école, il se démarqua par son intérêt pour les sciences et les mathématiques. Sa carrière de mathématicien débuta au King's College de l'Université de Cambridge en 1931. À sa graduation, il fut fait « fellow » du King's College, puis s'installa à l'Université Princeton. C'est à cet endroit qu'il développa ce qui fut plus tard appelé la « machine de Turing ».

Cette machine était fondée essentiellement sur les mêmes principes que les ordinateurs modernes. Turing, qui avait déjà développé des machines pour résoudre des problèmes spécifiques, a compris qu'il fallait développer des algorithmes qui étaient tous écrits dans un code standard de telle sorte qu'une même machine puisse résoudre toutes sortes de problèmes. Sa machine pouvait lire des séries de 0 et de 1 sur des rubans. Ces uns et ces zéros décrivaient les étapes de résolution de problèmes.

Ce concept était révolutionnaire à l'époque car en 1950, les appareils étaient conçus pour résoudre des problèmes particuliers, ce qui limitait beaucoup leur utilisation. Ce que Turing a conçu, c'est une machine qui effectuait seulement quelques instructions et qui, de ce fait, pouvait réaliser à peu près n'importe quelle tâche. Il suffisait de décomposer la solution du problème en un algorithme dont chaque étape était une instruction simple que la machine pouvait réaliser. Il croyait que tout problème peut se décomposer en un tel algorithme. La partie difficile était cette décomposition des problèmes en étapes successives simples.

Durant la deuxième guerre mondiale, il utilisa ses compétences mathématiques dans le décodage des messages allemands, qui étaient encodés par la machine *Enigma* qui modifiait continuellement la clé d'encodage des messages.

LUDWIG WITTGENSTEIN



Ludwig Wittgenstein est né en à Vienne en Autriche le 26 avril 1889 et est décédé le 29 avril 1951 à Cambridge en Angleterre. Il reçut son éducation à la maison jusqu'à l'âge de 14 ans. Il s'intéressait alors beaucoup à la mécanique et à 10 ans, il construisit une machine à coudre fonctionnelle. En 1903, il s'inscrivit à l'école Realschule à Linz en Autriche, puis, en 1906, il s'installa à Berlin pour étudier le génie mécanique à la Technische Hochschule de Charlottenburg. En 1908, il va en Angleterre dans le but d'obtenir un doctorat en génie et s'inscrit comme étudiant chercheur au laboratoire de génie de l'Université de Manchester. Il fit d'abord des recherches en aéronautique, mais se rendit compte qu'il avait besoin dans celles-ci d'une meilleure formation en mathématiques. Il s'intéressa alors aux travaux de Russel qui avait publié *Principles of Mathematics* en 1903. Délaissant l'aéronautique, il alla étudier la logique à Cambridge avec Russel, qui constatant son génie, le convainquit de délaisser l'aéronautique pour la philosophie mathématique.

En 1912, Wittgenstein présente un article à la Cambridge Philosophical Society, intitulé *What is Philosophy.* Durant son séjour à Cambridge, il poursuivit ses recherches sur les fondements des mathématiques et sur la logique mathématique, mais souffrant de dépression, il fit plusieurs tentatives de suicide. Malgré les objections de Russel, il décida de quitter Cambridge pour s'installer en Norvège afin de bénéficier d'un environnement plus propice à ses recherches. Cette période fut très productive et il développa les idées et le langage qui constituent la base de son ouvrage , *Tractatus Logico-Philosophicus qui traite des relations entre le langage et l'univers.* En 1929, de retour à Cambridge, il soumit cet ouvrage comme thèse de doctorat. Seize ans plus tard, il rédigea *Philosophical Investigations* qui fut publié deux ans après sa mort, en 1953.