EXERCICES : ALGÈBRE DES PROPOSITIONS

1. Dire quels sont les énoncés booléens dans la liste suivante et donner leur valeur de vérité.
   a) 4 est pair *b*) $5 \times 2 = 11$
   c) $x \leq 3$ *d*) $x > y$
   e) Ottawa est la capitale du Mexique.
   f) Quel temps fait-il?
   g) Un triangle a trois côtés.
   h) Un quadrilatère a cinq côtés.

2. Soit p : « il fait froid » et q : « il pleut ». Exprimer en phrases simples les énoncés suivants.
   a) $\neg p$ *b*) $p \wedge q$
   c) $p \vee q$ *d*) $q \vee \neg p$
   e) $\neg p \vee \neg q$ *f*) $\neg \neg p$

3. Écrire sous forme symbolique les énoncés suivants en désignant « je fais mes exercices » par p, « je relis mes notes de cours » par q et « je réussirai mes examens » par r.
   a) Je ne fais pas mes exercices et je ne relis pas mes notes de cours.
   b) Si je fais mes exercices et relis mes notes de cours, je réussirai mes examens.
   c) Si je ne relis pas mes notes de cours, je ne réussirai pas mes examens.
   d) Si je fais mes exercices ou si je relis mes notes de cours, alors je réussirai mes examens.
   e) Je réussirai mes examens si et seulement si je fais mes exercices et relis mes notes de cours.

4. Écrire les propositions suivantes avec la locution « si ... alors ... ». Donner la réciproque et la contraposée et donner leur valeur de vérité.
   a) Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.
   b) Tout nombre plus grand que 8 est plus grand que 3.
   c) Toute droite parallèle à l'axe des x a une pente égale à 0.
   d) Aucun triangle rectangle ne possède trois angles aigus.
   e) Des angles opposés par le sommet sont égaux.
   f) Des triangles sont semblables lorsque les côtés homologues sont proportionnels.
   g) Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.
   h) Dans un triangle isocèle, la hauteur, la médiane, la médiatrice et la bissectrice coïncident.
   i) Tout point de la médiatrice d'un segment de droite est équidistant des extrémités de ce segment.

5. Construire les tables de vérité des propositions suivantes et identifier lesquelles sont logiquement équivalentes.
   a) $\neg p \wedge q$ *b*) $\neg(p \wedge q)$
   c) $p \vee \neg q$ *d*) $\neg(p \vee q)$
   e) $\neg p \vee \neg q$ *f*) $\neg p \wedge \neg q$

6. Construire la table de vérité de chacune des propositions suivantes:
   a) $p \oplus \neg p$ *b*) $p \oplus \neg q$
   c) $\neg p \oplus q$ *d*) $\neg p \oplus \neg q$
   e) $(p \wedge q) \oplus q$ *f*) $(p \oplus q) \vee \neg p$

7. Montrer, à l'aide des tables de vérité, que les propositions suivantes sont des tautologies.
   a) $p \vee \neg p$
   b) $p \vee \neg(p \wedge q)$
   c) $[p \wedge (p \to q)] \to q$
   d) $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
   e) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$
   f) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

8. Montrer que les énoncés suivants ne sont pas des tautologies en choisissant une assignation aux énoncées de base de telle sorte que la valeur de la proposition composée soit 0.
   a) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
   b) $(p \to q) \to (q \to p)$
   c) $[p \to (p \wedge q)] \to q$
   d) $[p \to (p \wedge q)] \vee r$

9. Montrer, à l'aide des tables de vérité, que les propositions suivantes sont des contradictions.
   a) $p \wedge \neg p$ *b*) $\neg p \wedge (p \wedge q)$
   c) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

10. Déterminer les tautologies et les contradictions parmi les énoncés suivants:
   a) $p \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$
   b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
   c) $[(p \rightarrow q) \leftrightarrow q] \rightarrow p$
   d) $p \rightarrow [q \rightarrow (q \rightarrow p)]$
   e) $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
   f) $\neg[p \leftrightarrow (p \vee p)]$
   g) $(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow p$
   h) $\neg(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow p)$

11. Montrer que:
   a) La conjonction de deux contradictions est toujours une contradiction.
   b) La conjonction de deux tautologies est toujours une tautologie.
   c) La disjonction de deux tautologies est toujours une tautologie.
   d) La disjonction de deux contradictions est toujours une contradiction.

12. À l'aide d'une table de vérité, déterminer parmi les biconditionnelles suivantes celles qui sont des équivalences logiques.
   a) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
   b) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
   c) $[\neg(p \vee q)] \leftrightarrow [\neg p \wedge \neg q]$
   d) $[\neg(p \wedge q)] \leftrightarrow [\neg p \vee \neg q]$
   e) $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow q$
   f) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \leftrightarrow q$

13. Les énoncés suivants sont-ils logiquement équivalents?
   a) $p \vee \neg q$ et $q \rightarrow p$
   b) p et $\neg q \rightarrow \neg p$
   c) p et $\neg p \rightarrow p$
   d) p et $\neg p \wedge q$
   e) p et $p \rightarrow \neg p$
   f) $(p \vee \neg q) \rightarrow p$ et $p \rightarrow (\neg p \wedge q)$
   g) p et $(q \vee \neg q) \rightarrow p$
   h) $\neg(p \oplus p)$ et $(p \leftrightarrow p)$

14. À l'aide des tables de vérité construites à l'exercice 7, déterminer si les implications suivantes sont des implications logiques.
   a) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
   b) $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
   c) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$
   d) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$