

## VOUS AVEZ DIT CONJECTURE ?

PAR: ANDRÉ ROSS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

### INTRODUCTION

Cet article vise à illustrer ce qu'est une conjecture et le rôle qu'elle joue dans la construction des connaissances. Les conjectures présentées ici portent sur les nombres. L'observation de résultats d'opérations sur des nombres va nous permettre de déceler des comportements réguliers. En généralisant ces comportements à l'ensemble des nombres, nous allons formuler des conjectures décrivant cette régularité et l'étendant à l'ensemble des nombres. Nous allons ensuite tester la conjecture en vérifiant d'autres cas particuliers que ceux à partir desquels la conjecture a été énoncée. Cette vérification ne constituera pas une preuve même si chaque cas pour lequel la conjecture est vraie rendra celle-ci plus plausible ou plus crédible. La dernière étape de la démarche sera la recherche d'une preuve. Nous tenterons alors de démontrer la validité des conjectures énoncées.

### OBSERVATION, INDUCTION ET CONJECTURE

En s'amusant à exprimer les nombres entiers par des sommes de nombres entiers, on peut obtenir, entre autres, les expressions du tableau I ci-contre.

En observant ces expressions, on constate que chacun des entiers impairs de 3 à 27 peut s'exprimer comme la somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier. C'est une constatation intéressante qui soulève la question suivante :

*Est-ce que tous les nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 sont décomposables en somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier ?*

TABLEAU I

| $n$ | Somme      |
|-----|------------|
| 3   | $2^1 + 1$  |
| 5   | $2^1 + 3$  |
| 7   | $2^1 + 5$  |
| 9   | $2^2 + 5$  |
| 11  | $2^3 + 3$  |
| 13  | $2^3 + 5$  |
| 15  | $2^3 + 7$  |
| 17  | $2^2 + 13$ |
| 19  | $2^4 + 3$  |
| 21  | $2^4 + 5$  |
| 23  | $2^4 + 7$  |
| 25  | $2^3 + 17$ |
| 27  | $2^4 + 11$ |

Poursuivons nos investigations, en tentant d'exprimer les nombres impairs de 29 à 49 comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier. On obtient alors les décompositions du tableau II et on constate que ces nombres impairs sont également décomposables en une somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier. C'est assez exaltant! En se basant sur des calculs de cette nature, le mathématicien français A. de Polignac a fait une généralisation par induction pour énoncer la conjecture suivante sur les nombres impairs.

TABLEAU II

| $n$ | Somme      |
|-----|------------|
| 29  | $2^4 + 13$ |
| 31  | $2^3 + 23$ |
| 33  | $2^4 + 17$ |
| 35  | $2^5 + 3$  |
| 37  | $2^5 + 5$  |
| 39  | $2^5 + 7$  |
| 41  | $2^2 + 37$ |
| 43  | $2^5 + 11$ |
| 45  | $2^5 + 13$ |
| 47  | $2^4 + 31$ |
| 49  | $2^5 + 17$ |

*Tout nombre impair supérieur ou égal à 3 est la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier.*

Une conjecture est l'énoncé d'une propriété qui semble plausible, compte tenu des observations effectuées. Cet énoncé de Polignac semble tout à fait plausible, compte tenu des observations réalisées. Cependant, énoncer une conjecture ne signifie pas que l'on a découvert une vérité. La conjecture peut être vraie, mais elle peut aussi être fautive, comment savoir ? Un sceptique peut toujours nous dire « vous n'avez pas essayé tous les cas! Il existe peut-être un nombre impair qui n'est pas décomposable de cette façon. Qui peut savoir ? »

TABLEAU III

| $n$ | Somme      |
|-----|------------|
| 51  | $2^5 + 19$ |
| 51  | $2^3 + 43$ |
| 53  | $2^4 + 37$ |
| 55  | $2^3 + 47$ |
| 57  | $2^4 + 41$ |
| 59  | $2^4 + 43$ |
| 61  | $2^5 + 29$ |
| 63  | $2^5 + 31$ |
| 65  | $2^2 + 61$ |
| 67  | $2^6 + 3$  |
| 69  | $2^6 + 5$  |
| 71  | $2^6 + 7$  |
| 73  | $2^5 + 41$ |

On peut être tenté, pour répondre aux critiques, de faire un plus grand nombre de vérifications. Par exemple, on peut faire les décompositions du tableau III. On constate que

certaines nombres impairs peuvent s'exprimer de deux façons comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier, c'est le cas du nombre 51. Mais que peut-on dire de plus sur la validité de la conjecture après avoir fait ces vérifications ? Plus le nombre de cas vérifiant la conjecture est grand, plus on est porté à considérer que la propriété est plausible mais l'accumulation des cas particuliers vérifiant l'énoncé ne constituent pas une démonstration.

Lors de la présentation de sa conjecture, Polignac déclara avoir fait la vérification pour tous les nombres impairs inférieurs à 3 millions. Il s'est donc donné la peine de faire un grand nombre de vérifications et tenait la conjecture pour très plausible. Il aurait souhaité que sa conjecture puisse être acceptée comme propriété générale des nombres impairs, mais toutes ces vérifications ne démontrent pas que la propriété énoncée dans la conjecture est vraie. En mathématiques, le nombre de vérifications effectuées ne constitue pas une preuve. Et si Polignac s'était trompé ?

Dans ses calculs, Polignac avait certainement oublié le nombre 127 dont les décompositions comme somme de nombres comportant une puissance de 2 sont les suivantes :

$$127 = 1 + 126 = 2^0 + (2 \times 63)$$

$$127 = 2 + 125 = 2 + (5 \times 25)$$

$$127 = 4 + 123 = 2^2 + (3 \times 41)$$

$$127 = 8 + 119 = 2^3 + (7 \times 17)$$

$$127 = 16 + 111 = 2^4 + (3 \times 37)$$

$$127 = 32 + 95 = 2^5 + (5 \times 19)$$

$$127 = 64 + 63 = 2^6 + (3 \times 21)$$

Ce sont les seules décompositions du nombre 127 comportant une puissance de deux. Ce nombre, quoiqu'im-pair, ne peut donc s'exprimer comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier. Il nous faut donc conclure que la conjecture de Polignac est fausse, les nombres impairs ne peuvent pas tous s'exprimer comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier.

L'exemple de l'impossibilité d'exprimer 127 comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier

constitue une démonstration mathématique. C'est ce qu'on appelle une *démonstration par contre-exemple*. En effet, cet exemple démontre que la conjecture de Polignac est fausse. Le contre-exemple permet donc de porter un jugement définitif sur cette conjecture. Le nombre 127 est-il le seul nombre impair ne pouvant pas s'exprimer comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier ? Il importe peu de le savoir, car un seul contre-exemple est suffisant pour dire que la conjecture est fausse. Il faut donc conclure que :

*Les nombres impairs ne sont pas tous décomposables en somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier.*

Il est important de remarquer que même si Polignac avait eu raison pour les nombres impairs plus petits que trois millions, l'accumulation des cas particuliers n'aurait pas démontré la validité de sa conjecture. Rien ne permet de conclure qu'il n'y a pas de contre-exemple si on n'a pas essayé tous les cas. C'est la faiblesse d'une proposition obtenue par induction.

## Définition

### Conjecture

Une *conjecture* est une proposition dont la valeur de vérité n'est pas connue.

Pour déterminer la valeur de vérité d'une conjecture il faut :

- construire un contre-exemple, auquel cas on peut conclure que la conjecture est fausse;
- construire une preuve, auquel cas on peut conclure que la conjecture est vraie.

## Définition

### Généralisation par induction

Une *généralisation par induction* est la démarche qui consiste à énoncer une conjecture à partir de l'observation d'un nombre limité de cas particuliers.

## CARRÉ D'UN NOMBRE

Considérons un autre cas en calculant le carré de nombres entiers. (Tableau IV). En observant les résultats, on remarque que, dans les cas considérés, le carré d'un nombre impair est également un nombre impair alors que le carré d'un nombre pair est également un nombre pair. Cette constatation ne vaut cependant que pour les cas considérés.

TABLEAU IV

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 3^2 &= 9 \\ 5^2 &= 25 \\ 7^2 &= 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 4^2 &= 16 \\ 6^2 &= 36 \\ 8^2 &= 64 \end{aligned}$$

Avant d'induire quoi que ce soit, il est pertinent de vérifier d'autres cas, comme les données du tableau V.

Ces nouveaux cas particuliers nous encouragent à procéder à une généralisation par induction. La généralisation aura la forme d'une propriété des nombres entiers et pourrait s'énoncer :

*Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.*

et :

*Le carré d'un nombre entier pair est un nombre entier pair.*

On peut regrouper ces deux énoncés en un seul, ce qui donne :

*Le carré d'un nombre entier a la même parité que le nombre.*

On sait maintenant que l'accumulation des cas vérifiant l'énoncé ne constitue pas une preuve, on ne s'entêtera donc pas à faire d'autres vérifications. On peut chercher un contre-exemple et ne pas en trouver. Cela ne signifie pas qu'il n'en existe pas.

Essayons plutôt de démontrer la conjecture. Que signifie démontrer ? Démontrer signifie construire une argumentation en utilisant des termes clairement définis et des propriétés acceptées avec ou sans démonstration mais reconnues comme évidentes.

Cette conjecture porte sur les nombres pairs et les nombres impairs, mais qu'est-ce qu'un nombre pair ? Qu'est-ce qu'un nombre impair ? Il faut clarifier ces termes pour en avoir une compréhension acceptée par tous. Ce préalable est indispensable pour que les raisonnements et les conclusions de l'argumentation soient également acceptés de tous. Puisqu'un nombre pair est toujours le double d'un autre nombre, on peut poser la définition suivante :

### Définition

#### Nombre pair

Un nombre entier  $n$  est *pair* s'il est de la forme  $n = 2k$  où  $k$  est un nombre entier.

Puisqu'un nombre impair est toujours obtenu en additionnant 1 à un nombre pair, on peut poser la définition suivante :

### Définition

#### Nombre impair

Un *nombre entier*  $n$  est *impair* s'il est de la forme  $n = 2k + 1$  où  $k$  est un nombre entier.

Avant d'aller plus loin, le lecteur doit s'assurer que cette définition décrit bien ce qu'est un nombre pair et un nombre impair. S'il accepte cette définition, si elle distingue bien un nombre pair d'un nombre impair, on peut s'en servir dans une démonstration.

Pour démontrer que le carré d'un nombre impair est également un nombre impair, il faut donc montrer qu'en élevant au carré un nombre de la forme  $n = 2k + 1$ , on obtient un nombre de la même forme, c'est-à-dire un nombre qui peut être obtenu en multipliant un entier par 2 et en additionnant 1 au résultat du produit.

## Théorème

Si  $n$  est un entier impair alors  $n^2$  est un entier impair.

### Démonstration

Soit  $n$  un entier impair quelconque. Par la définition de nombre impair, il existe alors un entier  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ .

En élevant au carré, on a :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Il faut montrer que le nombre obtenu est impair. Or,  $4k^2 + 4k$  est un nombre pair puisque :

$$4k^2 + 4k = 2(2k^2 + 2k)$$

Par conséquent  $4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$  est un nombre impair. Le carré d'un nombre impair quelconque est donc un nombre impair. Puisque  $n$  est un nombre impair quelconque, le résultat est valide pour tous les nombres impairs, c'est-à-dire que le carré de tout nombre impair est un nombre impair.



Une étape de la démonstration mérite qu'on s'y arrête. Nous avons fait appel à une propriété des nombres entiers. C'est le fait que la somme de deux nombres entiers est un nombre entier et le produit de deux nombres entiers est un nombre entier. On y a fait allusion de la façon suivante : « Le nombre  $2k^2 + 2k$  est un nombre entier car le résultat de produits et de sommes de nombres entiers est un nombre entier ».

Il faut également que les propriétés utilisées dans la démonstration soient acceptées de tous. Sinon, la preuve sera rejetée et la conjecture ne sera pas admise comme théorème. Nous croyons que le lecteur n'aura aucune difficulté à démontrer l'autre partie de la conjecture.

### PRODUIT DE NOMBRES CONSÉCUTIFS

Considérons maintenant un autre exemple en théorie des nombres. En effectuant le produit de nombres consécutifs comme au tableau VI, on observe que le résultat est toujours un nombre pair. On peut échafauder une conjecture en généralisant cette constatation par induction. En

représentant les nombres consécutifs par  $n - 1$  et  $n$ , le produit s'écrit  $n^2 - n$ .

La conjecture peut alors s'écrire :

*Si  $n$  est un nombre entier, alors  $n^2 - n$  est un nombre pair.*

**TABLEAU VI**

$$1 \times 2 = 2$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$4 \times 5 = 20$$

$$5 \times 6 = 30$$

$$6 \times 7 = 42$$

$$7 \times 8 = 56$$

$$8 \times 9 = 72$$

$$9 \times 10 = 90$$

$$10 \times 11 = 110$$

## Théorème

Si  $n$  est un nombre entier, alors  $n^2 - n$  est divisible par 2.

### Démonstration

Soit  $n$  un nombre entier alors par factorisation, on a :

$$n^2 - n = n(n - 1)$$

On a alors deux possibilités,  $n$  est pair ou impair.

Si  $n$  est pair, alors il existe un entier  $r$  tel que  $n = 2r$ , on a donc :

$$n^2 - n = n(n - 1) = 2r(n - 1)$$

et puisque  $r(n - 1)$  est un nombre entier, notons-le  $k$ , il existe donc un entier  $k$  tel que :

$$n^2 - n = 2k$$

et  $n^2 - n$  est pair lorsque  $n$  est pair.

Si  $n$  est impair, alors  $n - 1$  est pair et il existe un entier  $s$  tel que  $n - 1 = 2s$ , on a donc :

$$n^2 - n = n(n - 1) = 2ns$$

et puisque  $ns$  est un nombre entier, notons-le  $k$ , il existe donc un entier  $k$  tel que :

$$n^2 - n = 2k$$

et  $n^2 - n$  est pair lorsque  $n$  est impair.

Puisque  $n$  est un entier quelconque, cette propriété est vraie pour tout nombre entier et on peut conclure que : si  $n$  est un nombre entier, alors  $n^2 - n$  est divisible par 2.



**CONJECTURE DE GOLDBACH**

Examinons une autre conjecture. En effectuant la somme de paires de nombres premiers, on a les données du tableau VII. On constate que les nombres pairs de 4 à 14 peuvent être exprimés comme somme de deux nombres premiers. De plus, pour  $n > 4$ , ces deux nombres premiers sont impairs. En généralisant cette observation, Christian Goldbach (1690-1764) a formulé la conjecture suivante :

**TABLEAU VII**

|               |
|---------------|
| $2 + 2 = 4$   |
| $3 + 3 = 6$   |
| $3 + 5 = 8$   |
| $3 + 7 = 10$  |
| $5 + 7 = 12$  |
| $3 + 11 = 14$ |

faire une liste exhaustive. Essayons, par exemple, d'exprimer le nombre 80 comme somme de nombres premiers impairs. On trouve alors :

$$\begin{aligned} 80 &= 3 + 77 \text{ mais } 77 \text{ n'est pas premier} \\ 80 &= 5 + 75 \text{ mais } 75 \text{ n'est pas premier} \\ 80 &= 7 + 73, 7 \text{ et } 73 \text{ sont premiers} \end{aligned}$$

On peut donc exprimer 80 comme somme de deux nombres premiers impairs et la conjecture est vérifiée dans ce cas également. Ce n'est pas la seule façon d'exprimer 80 comme somme de deux nombres impairs premiers, on a également :

$$80 = 13 + 67 = 19 + 61 = 37 + 43$$

Est-il possible de trouver un nombre pair pour lequel la conjecture ne serait pas vraie? Peut-on, par exemple, exprimer 592 comme somme de deux nombres premiers impairs? Par essais et erreurs, on peut trouver :

$$592 = 113 + 479,$$

où 113 et 479 sont des nombres premiers

La conjecture de Goldbach a été formulée il y a plus de 250 ans mais n'a pu être démontrée jusqu'à maintenant. Il n'a pas non plus été possible de trouver un nombre pair pour lequel la conjecture n'est pas vérifiée. Tant que la conjecture n'aura pas été démontrée par un argument déductif, elle ne sera pas admise par les mathématiciens dans le paradis des théorèmes. Elle risque donc d'errer dans les limbes des conjectures pour l'éternité.

**CONJECTURE DE FERMAT**

Examinons une dernière conjecture qui, à elle seule, constitue l'un des problèmes les plus célèbres des mathématiques modernes. Son origine remonte à l'Antiquité et elle vient tout juste d'être démontrée.

Comme vous le savez déjà, dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés: c'est un des résultats dont la démonstration est attribuée à Pythagore (vers ~550). Mais Pythagore n'était certes pas le premier à réfléchir là-dessus. Des

**Conjecture****de Goldbach**

Si  $n$  est un nombre pair plus grand que 4 alors  $n$  est la somme de deux nombres premiers impairs.

Accordons-nous un moment de réflexion pour bien comprendre le sens de cette conjecture. Il est toujours possible d'exprimer un nombre pair comme somme de deux nombres impairs et ce, de plusieurs manières. La conjecture est à l'effet que parmi toutes ces sommes possibles, il en est au moins une impliquant deux nombres impairs premiers. Ainsi le nombre 16 peut s'exprimer de différentes façons comme somme de nombres impairs, en effet :

$$16 = 1 + 15 = 3 + 13 = 5 + 11 = 7 + 9$$

Parmi toutes ces sommes, il en est au moins une comportant deux nombres premiers impairs. En effet,

$$3 + 13 \text{ et } 5 + 11$$

sont des sommes dont les deux termes sont des nombres premiers impairs.

On peut poursuivre la vérification de la conjecture dans d'autres cas particuliers pour lui assurer une plus grande crédibilité. On obtient alors les données du tableau VIII. Ces nouveaux cas particuliers augmentent la plausibilité de la conjecture mais ne constituent pas une démonstration. Poursuivons nos investigations sans

**TABLEAU VIII**

|               |
|---------------|
| $16 = 5 + 11$ |
| $= 3 + 13$    |
| $18 = 5 + 13$ |
| $= 7 + 11$    |
| $20 = 7 + 13$ |
| $= 3 + 17$    |
| $22 = 3 + 19$ |
| $= 5 + 17$    |
| $= 11 + 11$   |

tablettes babyloniennes datant de 1 000 ans avant la naissance de ce célèbre Grec montrent plusieurs triplets pythagoriciens c'est-à-dire des nombres entiers distincts respectant l'équation  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Après Pythagore, plusieurs mathématiciens se sont intéressés aux solutions entières de ce genre d'équations. Le Grec Diophante d'Alexandrie (200-284) en parle dans son volume intitulé *L'Arithmétique*.

À la Renaissance, les travaux de plusieurs Grecs revivent, grâce à des traductions arabes. C'est ainsi, qu'au XVII<sup>e</sup> siècle, le mathématicien français Pierre de Fermat (1601-1665) prend connaissance des écrits de Diophante. Ce fondateur de la théorie des nombres prend plaisir à lire *L'Arithmétique* de Diophante et à l'annoter. En marge d'un problème traitant des triplets pythagoriciens, il écrit : « D'autre part, un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux autres puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à 2 n'est la somme de deux puissances analogues. » Il venait d'énoncer son théorème : il est impossible de trouver des nombres entiers non nuls  $x, y, z$  et  $n, n$  étant supérieur à 2, qui vérifient l'équation  $x^n + y^n = z^n$ . Dans la marge il écrit, en latin, une note qui peut être traduite par : « ... j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge trop étroite ne peut contenir. »

Faute de preuve mathématique, cette proposition demeura conjecture durant trois siècles. Il y eut cependant quelques mathématiciens comme les Allemands Euler (1707-1783) et Kummer (1810-1893) qui la prouvèrent pour certains entiers  $n$ , mais sans pour autant la prouver pour tous les entiers supérieurs à 2. L'avènement des ordinateurs permit de pousser davantage les vérifications pour des entiers de plus en plus grands, mais la proposition n'était pas démontrée pour autant. Ce n'est qu'en juin 1993, que le mathématicien britannique Andrew Wiles présente une preuve de la conjecture de Fermat devant une cinquantaine de spécialistes réunis à l'Université de Cambridge.

## CONCLUSION

La recherche est faite d'essais et d'erreurs et il ne faut pas craindre de remettre en question nos convictions premières à la lumière de faits nouveaux. C'est ce que nous avons fait en rejetant la conjecture de Polignac malgré le grand nombre de cas satisfaisant la conjecture. Il faut se rappeler que la généralisation à partir de cas particuliers ne donne pas automatiquement une propriété ou une théorie vraie. La conjecture de Polignac, comme toutes les autres présentées ici, est le fruit d'une généralisation par induction incomplète. Un grand nombre de vérifications nous permet de dire qu'une conjecture est très plausible mais ne constitue jamais une démonstration. Il suffit d'un cas pour lequel la conjecture n'est pas vérifiée, ou d'un contre-exemple, pour acquérir la conviction que la conjecture est fautive. de plus, le fait de ne pas trouver de contre-exemple ne signifie pas qu'un tel contre-exemple n'existe pas.

Pour qu'une conjecture plausible soit acceptée comme théorème, il faut que celle-ci soit démontrée et l'accumulation des observations satisfaisant la conjecture n'est pas une démonstration car rien ne garantit que le prochain cas considéré respectera la régularité remarquée dans les premières situations observées. Pour démontrer un résultat mathématique, il faut construire une argumentation qui permet de montrer déductivement que la propriété énoncée dans la conjecture découle des caractéristiques propres aux objets sur lesquels porte la conjecture et des propriétés préalablement démontrées de ces objets.

Il y a en mathématiques une démarche de validation appelée « induction mathématique » ou « démonstration par récurrence » qui est un processus utilisable pour les propriétés impliquant les nombres naturels. Cette procédure de démonstration est due à Blaise Pascal (1623-1662). Nous présenterons cette démarche dans le texte intitulé *Pour que tombent les dominos*.

**EXERCICES : CONJECTURE**

1. Comment peut-on savoir si une conjecture est vraie ou fausse?
2. Si on vérifie une conjecture dans un grand nombre de cas et si on ne peut s'imaginer de cas où elle serait fausse, peut-on conclure qu'elle est toujours vraie?
3. Démontrer la conjecture suivante :  
Si  $n$  est un entier pair alors  $n^2$  est un entier pair.
4. Démontrer la conjecture suivante :  
Si  $n$  est un entier pair alors  $n^3$  est un entier pair.
5. Démontrer la conjecture suivante :  
Si  $n$  est un entier impair alors  $n^3$  est un entier impair.
6. Démontrer que :  
Si  $n$  est un multiple de 3 alors  $n^2$  est un multiple de 3.
7. Démontrer que :  
Si  $n$  est un multiple de 3 alors  $n^3$  est un multiple de 3.
8. Montrer que le produit de deux nombres entiers consécutifs est un nombre pair.

9. Soit le tableau suivant :

| $n$ | $n^2$ | $n^2 - 1$                   |
|-----|-------|-----------------------------|
| 3   | 9     | $9 - 1 = 8 = 1 \times 8$    |
| 5   | 25    | $25 - 1 = 24 = 3 \times 8$  |
| 7   | 49    | $49 - 1 = 48 = 6 \times 8$  |
| 9   | 81    | $81 - 1 = 80 = 10 \times 8$ |

- a) Quelle observation faites-vous à partir de ce tableau?
  - b) Échafaudez une conjecture généralisant cette observation.
  - c) Démontrez cette conjecture.
8. Montrer que tous les entiers sont de la forme  $3k$  ou de la forme  $3k + 1$  ou de la forme  $3k + 2$ .
  9. Montrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 6.

10. Montrer que : le produit de quatre nombres entiers consécutifs est divisible par 24.
11. Montrer que : si  $n$  est un nombre entier alors  $n^3 - n$  est divisible par 6.
12. Montrer que tous les entiers sont de la forme  $5k$  ou de la forme  $5k + 1$  ou de la forme  $5k + 2$  ou de la forme  $5k + 3$  ou de la forme  $5k + 4$ .
13. Vérifier la conjecture suivante : si  $n$  est un nombre entier plus grand que 1 alors  $n^2$  est divisible par 5 ou  $n^2 - 1$  est divisible par 5 ou  $n^2 + 1$  est divisible par 5. Démontrer cette conjecture.
14. Montrer que : si  $n$  est un nombre entier alors  $n^5 - n$  est divisible par 30.
15. Montrer que : si  $n$  est de la forme  $6k + 5$  alors il est de la forme  $3k - 1$ . Montrer que la réciproque n'est pas vraie.
16. Montrer que le carré d'un entier est de la forme  $3k$  où  $3k + 1$  mais jamais de la forme  $3k + 2$ .
17. Montrer que le carré de tout nombre entier de la forme  $5k + 1$  est de la même forme.
18. Montrer que : si  $p$  est un nombre premier et que  $p$  divise le produit de nombres entiers  $ab$  alors  $p$  divise  $a$  ou  $p$  divise  $b$ .
19. Déterminez si les nombres suivants sont des carrés de nombres entiers. Justifiez votre réponse.
  - a) 3195671765913
  - b) 1234567654321
  - c) 2483979248397
20. On demande de déterminer les valeurs de chiffres  $a$  et  $b$  dans le nombre de cinq chiffres  $a679b$ , sachant que ce nombre est divisible par 72.