

LOGIQUE ARISTOTÉLICIENNE, DU CONCEPT AU RAISONNEMENT

PAR : ANDRÉ ROSS
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

L'invention de l'alphabet grec a eu un impact majeur sur la construction et l'organisation du savoir.

Le savoir écrit devient un objet d'étude, on peut le relire, l'approfondir, le critiquer, en déceler les contradictions, les paradoxes, les incohérences.

Cette dynamique de la construction du savoir se manifeste dans les paradoxes de Zénon, les démonstrations des pythagoriciens en géométrie, les propriétés des nombres qu'ils obtenaient par induction, la démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré.

Cependant, le développement de la logique comme science autonome devait avoir comme assise une philosophie prenant en compte l'observation du monde sensible. Cette prise en compte de la nature dans la philosophie et la construction d'un savoir comme représentation mentale du réel débute avec Aristote.

TRAITÉS D'ARISTOTE

L'œuvre d'Aristote en logique est regroupée sous le titre d'*Organon* et comprend les textes suivants :

- a) *Les Catégories* (théorie des catégories).
- b) *De l'interprétation* (théorie des oppositions et des syllogismes modaux).
- c) *Premiers Analytiques* (théorie du syllogisme).
- d) *Seconds analytiques* (théorie de la démonstration).
- e) *Les Topiques* (théorie de la dialectique et du syllogisme éristique).
Réfutation des sophistes (dernière partie des Topiques).

Nous présenterons ici quelques aspects de la pensée aristotélicienne avec des illustrations en mathématiques.

Définition

Concept

Le *concept* est le résultat de la perception intellectuelle de la forme par l'esprit.

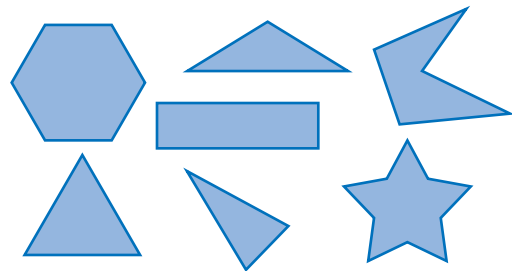
Le concept est la base du système logique d'Aristote, il se traduit dans le langage par un terme qui le désigne.

Définition

Terme

Le *terme* est l'expression verbale du concept, il représente l'idée dans le langage.

Le mot « triangle » est la représentation dans le langage du concept, ou de l'idée, d'une forme géométrique particulière, celle qui est formée de trois segments de droites qui se coupent deux à deux.



Les mots « homme », « animal », « raison » sont également la représentation de concepts dans le langage.

Définition

Extension

L'*extension d'un terme* (ou d'un concept) est l'ensemble des objets auxquels s'applique ce terme, ou désignés par ce terme (ou inclus dans ce concept).

Ainsi, le mot *triangle* ne désigne pas toutes les figures illustrés plus haut. De la même façon, le terme *équilatéral* signifie de côtés égaux. Ce terme ne s'applique donc pas à toutes ces figures géométriques.

Définition

Compréhension

La *compréhension d'un terme* (ou d'un concept) est l'ensemble des propriétés communes aux objets désignés par ce terme.

Un terme qui englobe plusieurs propriétés désigne moins d'objets qu'un terme qui englobe peu de propriétés. Plus le nombre de propriétés est élevé plus le nombre d'objets désignés diminue et réciproquement.

Ainsi, le terme *triangle* désigne toutes les figures formées de trois segments de droites qui se coupent deux à deux.

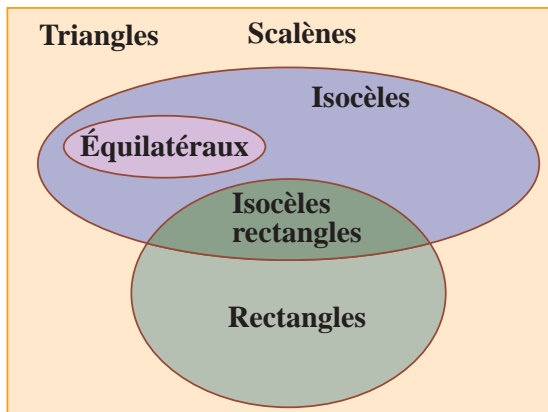
Le terme *triangle scalène* désigne tous les triangles ayant trois côtés inégaux.

Le terme *triangle isocèle* désigne tous les triangles ayant deux côtés égaux.

Le terme *triangle équilatéral* désigne tous les triangles ayant trois côtés égaux.

Le terme *triangle rectangle* désigne tous les triangles ayant un angle droit.

Le terme *triangle isocèle rectangle* désigne tous les triangles ayant deux côtés égaux un angle droit.



Définition

Jugement

Le *jugement* est une relation formelle entre concepts.

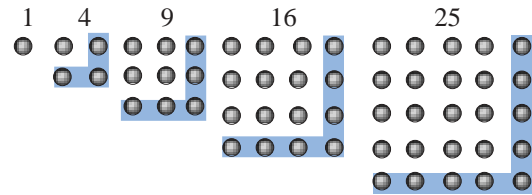
Définition

Proposition

Une *proposition* est la traduction d'un jugement dans le langage.

La phrase « L'homme est un animal raisonnable » est une proposition qui traduit une relation entre concepts.

La phrase « Le nombre carré de rang n est la somme des n premiers entiers impairs » est également une proposition qui traduit une relation entre concepts.



PROPOSITION ATTRIBUTIVE

Pour Aristote, le jugement par excellence est le jugement attributif, ou prédicatif, qui se traduit par une proposition attributive.

Définition

Proposition attributive

Une *proposition attributive* est une proposition composée :

- d'un terme-sujet formé de tous les mots qui constituent le sujet;
- d'une copule (normalement le verbe être) dont le rôle, comme son nom l'indique, est de mettre en relation le terme-sujet et le terme-attribut;
- d'un terme-attribut formé de tous les mots qui constituent l'attribut, qualité ou propriété du terme-sujet.

La phrase « L'homme est un animal raisonnable » est une proposition attributive. Elle attribue au sujet « homme » une propriété « animal raisonnable »

PROPOSITION ET DÉFINITION

Certaines propositions jouent un rôle précieux dans la construction du savoir, ce sont les définitions. Pour Aristote, la première opération de l'esprit a pour but la définition du concept. Il est hasardeux de raisonner sur des concepts qui ne sont pas clairement définis. Une bonne définition doit respecter certaines règles qui ne sont pas

des recettes mais des principes qui découlent de la nature de la définition. Lorsque les règles sont connues, on est conscient des dérogations et des raisons de celles-ci. Nous présentons ces règles en les illustrant à l'aide de définitions dont certaines sont tirées des *Éléments* D'Euclide dans la version de Bernard Vitrac.

Définition

Définition

Une *définition* est une proposition attributive dont le terme-sujet est le terme à définir et dont le terme-attribut est formé de termes connus qui permettent de préciser les caractéristiques du terme-sujet.

Une *bonne* définition doit satisfaire à certaines règles que nous allons maintenant présenter et commenter avec des exemples.

Première règle de la définition

Une définition doit indiquer ce que l'objet défini possède en commun avec d'autres objets et ce qu'il possède en propre.

Exemple

Discuter de la qualité de la définition suivante en vous servant de la première règle de la définition.

Un nombre entier pair est un nombre entier de la forme $n = 2k$, où k est un entier.

Solution

Cette définition respecte la première règle. L'objet est un nombre entier, c'est ce qu'il possède en commun. Ce qu'il possède en propre c'est de pouvoir s'exprimer sous la forme $n = 2k$, où k est un entier.

REMARQUE

Pour expliquer ce qu'un objet possède en propre, une définition ne doit normalement pas être purement négative.



Considérons la définition suivante :

Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
Euclide, Les *Éléments*, Livre I, définition 1

Cette définition est entièrement négative, mais dans ce cas il est difficile de faire autrement.

Deuxième règle de la définition

Une définition doit être plus claire que ce qui est défini.

Exemple

Discuter de la qualité des définitions suivantes en vous servant de la deuxième règle de la définition.

- L'homme est un roseau pensant.
- Une ligne est une longueur sans largeur.
Euclide, Les *Éléments*, Livre I définition 2
- Un *triangle* est une figure plane limitée par trois droites qui se rencontrent deux à deux.
- Un *triangle équilatéral* est un triangle dont les trois côtés sont égaux.

Solution

- Cette définition ne respecte pas la deuxième règle car la définition ne clarifie pas ce qui est défini. Elle ne précise pas ce que représente le terme « homme ».
- Cette définition ne respecte pas la deuxième règle car la définition ne clarifie pas ce qui est défini. Que veut-on dire par « longueur avec ou sans largeur »?
- Cette définition respecte la deuxième règle. Elle donne une idée précise de ce qu'est un triangle.
- Cette définition respecte la deuxième règle. Elle donne une idée précise de ce qu'est un triangle équilatéral.

Troisième règle de la définition

La définition ne doit pas être circulaire. Elle ne doit pas se servir de ce qui doit être défini. Elle doit être équivalente à ce qui est défini.

Exemple

Discuter de la qualité des définitions suivantes en vous servant des trois règles d'une définition.

- Un nombre entier impair est un nombre entier de la forme $n = 2k + 1$, où k est un entier.
- Une *ligne droite* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
Euclide, Les *Éléments*, Livre I définition 4

Solution

- a) La définition de nombre entier impair précise ce que l'objet a en propre, soit de s'exprimer sous la forme $2k + 1$, où k est un entier. Elle clarifie ce qui est défini, n'est pas circulaire et donne une équivalence du terme défini. On peut toujours, dans un énoncé, remplacer le terme défini par l'expression équivalente. Ainsi, si n est un entier impair, on peut toujours le remplacer par $2k + 1$, où k est un entier.
- b) La définition de ligne droite est compliquée parce qu'il n'est pas simple de définir cet objet sans faire intervenir l'idée de rectitude, de direction ou d'alignement. En cherchant à respecter la troisième règle, elle contrevient à la deuxième règle. La définition ne clarifie pas ce qu'est une ligne droite et est même difficile à interpréter.

La définition est le but de la première opération de l'esprit, c'est par la définition que l'on précise dans le langage l'extension et la compréhension d'un concept.

VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE PROPOSITION

Les propositions sont des énoncés, ou phrases simples, qui peuvent être vraies ou fausses. Elles sont composées d'un sujet et d'un prédicat, propriété que l'énoncé attribue au sujet. Le sujet peut être un objet unique ou une classe d'objets.

Exemple

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes.

- Tous les hommes sont immortels.
- Aucun entier impair n'est divisible par 2.
- Certains nombres pairs sont divisibles par 3.
- 11 est un nombre premier.

Solution

- Cette proposition est fausse.
- Cette proposition est vraie.
- Cette proposition est vraie.
- Cette proposition est vraie.

Les propositions de l'exemple précédent ont des formulations différentes qui nous amènent à préciser deux nouveaux termes, la quantité et la qualité d'un jugement et de la proposition qui en est le reflet dans le langage.

Définition**Quantité d'un jugement**

La *quantité d'une proposition* (ou d'un jugement) est déterminée par l'extension de son sujet. La quantité d'une proposition peut être *universelle* lorsqu'elle porte sur tous les objets représentés par le sujet ou *particulière* lorsqu'elle porte sur certains ou un seul des objets représentés par le sujet.

Définition**Qualité d'un jugement**

La *qualité d'une proposition* (ou d'un jugement) est déterminée par la copule selon que celle-ci est affirmative ou négative.

Cela donne quatre types de propositions fondamentales, que l'on peut représenter par des voyelles. Les formes générales de ces quatre types sont les suivantes :

Universelle affirmative, représentée par A :

Tous les ... sont des ...

Universelle négative, représentée par E :

Aucun ... n'est un ...

Particulière affirmative, représentée par I :

Certains ... sont ...

Particulière négative, représentée par O :

Certains ...ne sont pas ...

La valeur de vérité de la proposition dépend à la fois de la quantité et de la qualité.

Exemple

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- Tous les triangles isocèles sont rectangles.
- Aucun triangle isocèle n'est rectangle.
- Certains triangles isocèles sont rectangles.
- Certains triangles isocèles ne sont pas rectangles.

Solution

- a) Cette proposition est universelle affirmative (A).
Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui n'est pas rectangle, on peut conclure que cette proposition est fausse.
- b) Cette proposition est universelle négative (E).
Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui est rectangle, on peut conclure que cette proposition est fausse.
- c) Cette proposition est particulière affirmative (I).
Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui est rectangle, on peut conclure que cette proposition est vraie.
- d) Cette proposition est particulière négative (O).
Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui n'est pas rectangle, on peut conclure que cette proposition est vraie.

REMARQUE

Une proposition universelle n'est pas toujours exprimée sous la forme :

Tous les ... sont des

La caractéristique essentielle d'une proposition universelle est que le terme-sujet représente tous les objets d'une classe. Ainsi, dans la proposition suivante :

La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux angles droits.

Dans ce cas, le terme-sujet englobe tous les triangles. C'est donc une proposition universelle affirmative.

**ACCÈS À LA CONNAISSANCE**

Dans la philosophie aristotélicienne, l'homme dispose de trois outils pour accéder à la connaissance vraie :

- L'observation de phénomènes particuliers qui permet l'élaboration des concepts et des termes.
- Le raisonnement par induction qui procède du particulier à l'universel afin de connaître les formes du réel et les relations qu'elles entretiennent entre elles;
- Le raisonnement par déduction qui procède des formes plus générales aux formes plus particulières pour reproduire la complexité d'ensemble de l'organisation des choses.

Définition**Raisonnement et argumentation**

Un *raisonnement* est l'établissement d'une relation formelle entre jugements. Le raisonnement se traduit dans la langage par une argumentation.

On distingue le raisonnement inductif et le raisonnement déductif. Par ces raisonnements, on construit une connaissance qui est une représentation mentale du réel, représentation qui se traduit dans le langage par les termes, les propositions et l'argumentation.

La science est donc une adéquation entre le réel, la pensée et le langage. C'est la construction d'une représentation mentale et verbale du réel, ou la transposition du réel dans la pensée et le langage.

REMARQUE

La recherche de cette adéquation devrait impliquer la vérification expérimentale, mais il s'écoulera plusieurs siècles avant que cela devienne pratique courante.

**Définition****Raisonnement inductif**

Le *raisonnement inductif* est le raisonnement par lequel on adopte un principe général à partir de l'observation de cas particuliers.

Voici un exemple de raisonnement inductif.

Le cuivre est un conducteur électrique.
L'aluminium est un conducteur électrique.
Le mercure est un conducteur électrique

Tous les métaux sont des conducteurs électriques.

REMARQUE

L'induction est un mode de raisonnement important en sciences. À partir de l'observation de cas particuliers, on développe des concepts qui prennent la forme de principes généraux. Ces principes peuvent être modifiés ou rejetés à la lumière d'observations nouvelles.



Définition

Induction complète

L'induction complète (ou formelle) est l'induction qui est faite après la vérification de tous les cas particuliers possibles.

Pour pouvoir faire une induction complète, il faut que le nombre de cas particuliers soit fini sinon la vérification de tous les cas est impossible.

Le nombre de métaux est fini, il est donc possible de vérifier que tous les métaux sont conducteurs d'électricité et tenir ainsi un raisonnement par induction complète.

REMARQUE

La conclusion sur la conductivité des métaux est obtenue expérimentalement et non par un raisonnement déductif. Cependant, cette conclusion peut par la suite être utilisée dans un raisonnement déductif pour reproduire la complexité dans la théorie ou dans le langage.



Définition

Induction incomplète

L'induction incomplète (ou amplifiante) est l'induction qui est faite à partir de la vérification d'un très grand nombre de cas sans qu'il soit possible de les vérifier tous.

Dans un raisonnement par induction incomplète, la conclusion découle de façon plus ou moins probable des prémisses. Elle n'en découle pas de façon nécessaire. Plus le nombre de cas vérifiés est important, plus la conclusion du raisonnement est plausible, mais elle n'est pas une certitude.

La proposition « tous les hommes sont mortels » est le résultat d'une généralisation par induction incomplète. Personne n'a vérifié tous les cas et il n'est pas possible de le faire. Pour tous ceux qui sont présentement vivants et ceux qui ne sont pas encore nés, la vérification n'est pas encore possible. Il est cependant très difficile de mettre en doute cette conclusion et on accepte facilement que c'est une proposition vraie.

Considérons maintenant les données du tableau ci-contre. En raisonnant par induction, on pourrait formuler la proposition suivante :

Si n est un nombre pair plus grand que 4 alors n est la somme de deux nombres premiers impairs.

Il est plus difficile de se convaincre qu'il s'agit d'une proposition vraie. On peut faire d'autres vérifications, comme celles du tableau II ci-contre. Ces vérifications rendent l'énoncé un peu plus plausible, mais il y a une infinité de nombres entiers pairs. Il est donc impossible de faire une induction complète.

La proposition est du type universelle affirmative. Il n'est pas simple de déterminer sa valeur de vérité. En vérifiant tous les cas, on pourrait conclure qu'elle est vraie. Cependant, il y a un nombre infini de nombre pairs, la vérification est donc impossible. D'autre part, si on peut trouver un nombre qui n'est pas la somme de deux nombres premiers impairs, on pourra conclure que la proposition est fausse.

Dans leur étude des nombres, les pythagoriciens ont obtenu plusieurs résultats par induction incomplète. Ainsi,

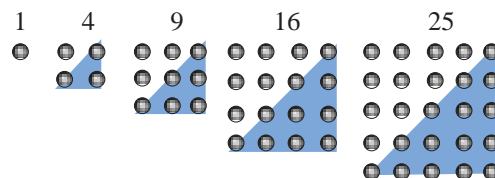
TABLEAU I

$2 + 2 = 4$
$3 + 3 = 6$
$3 + 5 = 8$
$3 + 7 = 10$
$5 + 7 = 12$
$3 + 11 = 14$

TABLEAU II

$16 = 5 + 11$ $= 3 + 13$
$18 = 5 + 13$ $= 7 + 11$
$20 = 7 + 13$ $= 3 + 17$
$22 = 3 + 19$ $= 5 + 17$ $= 11 + 11$

Le nombre carré de rang n est la somme du nombre triangulaire de même rang et du nombre triangulaire précédent.



LIMITES DE L'INDUCTION

La conclusion du raisonnement par induction incomplète ne dépend pas seulement de la logique mais également, et

surtout, de sa confirmation par les faits. Il suffit d'un seul cas ne vérifiant pas le principe général pour infirmer celui-ci et conclure que le principe général est faux.

PIÈGE DE L'INDUCTION

La conclusion d'un raisonnement inductif est fondée sur l'observation des cas particuliers. Une telle conclusion n'est pas une nécessité logique et il faut être très critique lorsqu'on utilise ce type de raisonnement. L'être humain a naturellement tendance à généraliser et parfois à partir d'un nombre de cas beaucoup trop restreint. L'usage inconsidéré de l'induction amplifiante peut entraîner toutes sortes de préjugés. En effet, le préjugé consiste à généraliser à tout un groupe d'individus ce qui n'est vrai que pour quelques individus dans le groupe.

RAISONNEMENT DÉDUCTIF ET SYLLOGISME

Les concepts ont été élaborés par l'observation, ce qui a permis de définir les termes. L'observation a également permis, grâce à un raisonnement inductif, d'obtenir des propositions (jugements) qui traduisent dans le langage l'attribution d'une propriété à toute une classe d'objets après avoir vérifié que cette propriété est vérifiée pour un certain nombre de ces objets (induction incomplète) ou pour tous ces objets (induction complète). Considérons maintenant le raisonnement déductif.

Définition

Raisonnement déductif

Le *raisonnement déductif* est le raisonnement par lequel on dégage la conséquence qui découle de la prise en compte d'un principe général et d'un cas particulier.

Supposons que l'on a établi (le procédé peut demeurer secret pour le moment) que tout nombre entier dont la somme des chiffres est divisible par 3 est lui-même divisible par 3. Considérons le nombre 245 727. Ce nombre est-il divisible par 3?

La somme des chiffres de ce nombre donne :

$$2 + 4 + 5 + 7 + 2 + 7 = 27$$

Puisque 27 est divisible par 3, on peut donc conclure, par un raisonnement déductif, que 245 727 est également divisible par 3.

Le raisonnement tenu dans cet exemple est le suivant :

Tout nombre entier dont la somme des chiffres est divisible par 3 est lui-même divisible par 3.

La somme des chiffres du nombre 245 727 est divisible par 3.

Donc, 245 727 est divisible par 3.

Ce type de raisonnement est appelé un syllogisme, c'est le modèle de raisonnement déductif étudié par Aristote. Voici d'autres exemples.

Tous les hommes sont mortels,

Socrate est un homme,

donc Socrate est mortel.

Tous les métaux sont conducteurs d'électricité,

le zinc est un métal,

donc le zinc est conducteur d'électricité.

Dans un syllogisme, la dernière proposition découle logiquement des deux autres. Pour déterminer la validité d'un syllogisme, il faut prendre en compte la quantité et la qualité des propositions mises en relation. Nous reviendrons sur la question de la validité d'un syllogisme dans la section suivante.

CONCLUSION

La connaissance débute par l'intuition dont dépend la formation de concepts dans l'esprit. Ceux-ci sont le produit de l'observation et de l'expérience et se traduisent dans le langage par des mots. L'intuition préside également à la formation de jugements, relations formelles entre concepts qui se traduisent dans le langage par des propositions, c'est-à-dire des énoncés qui comportent un concept sujet, une copule et un concept attribut.

Le raisonnement permet d'établir des relations formelles entre jugements, c'est-à-dire de nouveaux jugements à partir de jugements antérieurs dont ils sont des conséquences logiques. Dans le langage, le raisonnement se traduit par une argumentation.

EXERCICES : DU CONCEPT AU RAISONNEMENT

1. Quelle est la différence entre un concept et un terme?
2. Qu'est-ce qu'un jugement?
3. Quelle est la différence entre un jugement et une proposition?
4. Qu'est-ce qu'un raisonnement?
5. Qu'est-ce qu'une argumentation?
6. Nommer les deux types de raisonnement.
7. Qu'est-ce qui distingue les deux types de raisonnement.
8. Quels sont les deux cas de raisonnement inductif?
9. Donner un exemple de raisonnement inductif complet dans la vie courante.
10. Donner un exemple de raisonnement inductif complet en mathématiques.
11. Donner un exemple de raisonnement inductif incomplet dans la vie courante.
12. Donner un exemple de raisonnement inductif incomplet qui donne une conclusion fausse.
12. Donner un exemple de raisonnement inductif incomplet en mathématiques.
13. Qu'entend-on par extension et compréhension d'un terme? Donner un exemple en mathématiques.
14. Qu'entend-on par quantité et qualité d'un jugement? Donner un exemple en mathématiques.
15. Qu'est-ce que la science selon la philosophie aristotélicienne?
16. Quels sont les outils dont l'homme dispose pour construire la connaissance scientifique?
17. Qu'est-ce qu'un raisonnement déductif?
18. Donner la valeur de vérité des propositions suivantes. Souligner le terme-sujet et le terme-attribut.
 - a) Un nombre carré est un nombre dont les points peuvent être disposés pour former un carré.
 - b) L'homme est un animal raisonnable.
 - c) L'aire d'un triangle est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme de même base et de même hauteur.
19. Dans les propositions suivantes, indiquer celles qui peuvent être considérées comme de bonnes définitions. Le cas échéant, indiquer quelle règle n'est pas respectée.
 - a) Un nombre carré n'est pas triangulaire.
 - b) Un entier impair n est un entier de la forme $n = 2k + 1$, où k est un entier.
 - b) Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un angle droit.
 - c) Un ensemble est une collection d'objets.
 - d) L'amour c'est quand on s'aime.
 - e) Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont égaux.
 - f) Un diamètre d'un cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle et qui coupe le cercle en deux parties égales.
 - g) Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une sur l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
 - h) Une droite qui, rencontrant un cercle et prolongée, ne le coupe pas, est dite tangente au cercle.
 - i) Une grandeur est une partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.
20. En quoi le syllogisme suivant constitue-t-il un raisonnement déductif?

La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits,
 or, un triangle rectangle a un angle droit,
 donc la somme des angles aigus d'un triangle rectangle est égale à un angle droit.
21. Quel est le type du raisonnement suivant. Quelle est la valeur de vérité de la conclusion.

Le sapin ne perd pas ses aiguilles en hiver.
 L'épinette ne perd pas ses aiguilles en hiver.
 Le pin ne perd pas ses aiguilles en hiver.
 Aucun conifère ne perd ses aiguilles en hiver.