



Puisqu'en soustrayant des égaux à des égaux les restes sont égaux, on a :

$$\angle\alpha = 2 \angle\text{droits} - \angle\gamma$$

et :

$$\angle\beta = 2 \angle\text{droits} - \angle\gamma$$

Puisque les égaux à un même tiers sont égaux entre eux, on a :

$$\angle\alpha = \angle\beta$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$\angle\gamma = \angle\delta$$



**REMARQUE**

Dans cette démonstration, l'argumentation utilise le théorème précédent et deux axiomes.



**DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE**

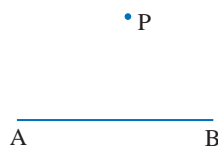
Une preuve par l'absurde consiste à accepter comme hypothèse supplémentaire la négation de la propriété que l'on souhaite prouver et à démontrer qu'en acceptant cette hypothèse supplémentaire, on génère une contradiction avec un axiome, un postulat ou un résultat précédemment démontré. Puisqu'une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse, il faut alors conclure que cette propriété est fausse.

Pour illustrer ce type de preuve, nous allons montrer que d'un point hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à cette droite. Le déroulement de la preuve consistera donc à supposer qu'il existe deux perpendiculaires abaissées d'un point sur une droite et à construire une argumentation montrant que cela entraîne une contradiction.

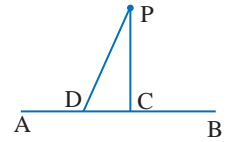
**Théorème 3**  
Unicité de la perpendiculaire par un point  
 D'un point hors d'une droite, on peut abaisser une seule perpendiculaire à cette droite.

*Démonstration*

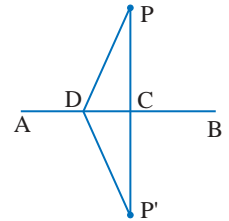
Soit AB, un segment de droite et P, un point hors de cette droite. Supposons que de ce point il est possible d'abaisser deux perpendiculaires à la



droite AB. Les pieds de ces perpendiculaires sur AB sont respectivement C et D.



En utilisant la droite AB comme axe de symétrie, construisons l'image symétrique, déterminant ainsi le point P'. Puisque PC est perpendiculaire à la droite AB, l'angle PCB est un angle droit et l'angle P'CB également. Les côtés extérieurs des angles adjacents PCB et P'CB forment un angle égal à deux angles droits, on peut donc conclure que PCP' est une droite.



Puisque PD est perpendiculaire à la droite AB, l'angle PDB est un angle droit et l'angle P'DB également. Les côtés extérieurs des angles adjacents PDB et P'DB forment un angle égal à deux angles droits, on peut donc conclure que PDP' est une droite.

On peut donc tracer deux droites passant par P et P' ce qui vient en contradiction avec le premier postulat. Cette contradiction découle de l'hypothèse supplémentaire à l'effet qu'il est possible d'abaisser deux perpendiculaires à une droite à partir d'un point hors de cette droite. Il faut donc rejeter cette hypothèse et conclure que d'un point hors d'une droite on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à cette droite.



**REMARQUE**

Il faut prendre le temps d'apprécier les étapes d'une démonstration par l'absurde :

1. on accepte comme hypothèse supplémentaire la négation de la propriété que l'on souhaite prouver;
2. on démontre qu'en acceptant cette hypothèse supplémentaire, on génère une contradiction avec un axiome, un postulat ou un résultat précédemment démontré.

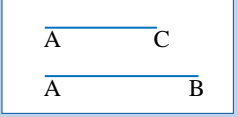
La démonstration par l'absurde (ou le raisonnement par l'absurde) n'est pas propre aux mathématiques. Tout système de connaissance adoptant le principe de non-contradiction aura recours au raisonnement par l'absurde pour assurer la cohérence de la théorie. Nous avons vu com-



Considérons maintenant un cas d'égalité de triangles rectangles.

**Problème de construction 8**

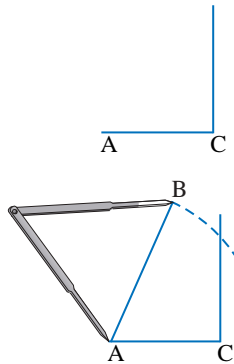
On donne un côté d'un triangle rectangle et son hypoténuse. À l'aide d'une règle et d'un compas construire le triangle.



*Solution*

Soit AB l'hypoténuse et AC le côté connu. En C, élevons une perpendiculaire au côté AC.

Avec le point A comme centre et la longueur de l'hypoténuse comme rayon, traçons un arc de cercle dont l'intersection avec la perpendiculaire en C détermine le troisième sommet du triangle.



**REMARQUE**

La construction nous permet de constater que le triangle est forcément unique. Il est donc possible d'énoncer la proposition suivante, puis de la démontrer.

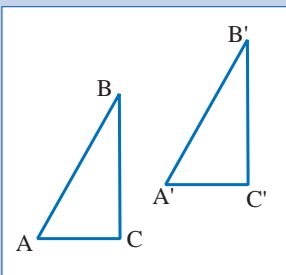
*Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal alors ils sont égaux.*



**Théorème 5**

Premier cas d'égalité de triangles rectangles

Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal alors ils sont égaux.



*Démonstration*

Soit ABC et A'B'C' deux triangles rectangles ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal. Transportons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC en ajustant les

angles droits l'un sur l'autre ainsi que les côtés AC et A'C'. Puisque les hypoténuses sont égales et s'écartent également des pieds des perpendiculaires C et C', les hypoténuses et les côtés BC et B'C' s'ajustent l'une sur l'autre. Les trois sommets des triangles s'ajustent donc l'un sur l'autre et les triangles sont égaux.



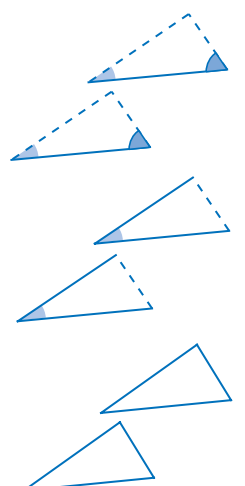
Les autres théorèmes d'égalité des triangles sont laissés en exercices. Les différents cas sont présentés dans le tableau suivant.

**ÉGALITÉ DES TRIANGLES SCALÈNES**

*Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun (ACA, angle, côté, angle).*

*Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal adjacent à deux côtés égaux chacun à chacun (CAC).*

*Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun (CCC).*

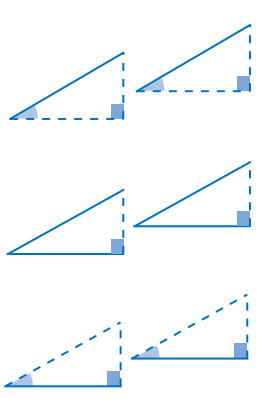


**ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES**

*Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

*Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

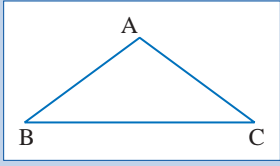
*Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle aigu égal et un côté de l'angle droit égal.*



Nous allons maintenant démontrer un résultat attribué à Thalès: celui portant sur le triangle isocèle

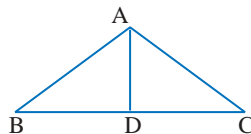
**Théorème 6**  
**Angles à la base d'un triangle isocèle**

Dans tout triangle isocèle, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux.



*Démonstration*

Soit ABC un triangle isocèle dont les côtés égaux sont AB et AC. Du point A, abaissons la perpendiculaire au côté BC. On détermine alors des triangles rectangles



ADB et ADC. Les hypoténuses AB et AC de ces triangles rectangles sont égales. Le côté de l'angle droit AH est commun aux deux triangles, ils ont donc un côté de l'angle droit égal. Par le deuxième cas d'égalité des triangles rectangles, on peut conclure que les triangles ADB et ADC sont égaux. Par conséquent, les angles B et C sont égaux comme angles homologues de triangles rectangles égaux.



**REMARQUE**

On remarque que la démonstration nécessite une construction qui vise à obtenir deux triangles rectangles. En montrant que les conditions d'un des cas d'égalité des triangles rectangles sont réunies, on peut alors conclure à l'égalité des angles opposés aux côtés égaux du triangle isocèle.



Nous allons maintenant considérer l'enchaînement de théorèmes qui permet d'obtenir le dernier résultat attribué à Thalès. Rappelons ce résultat,

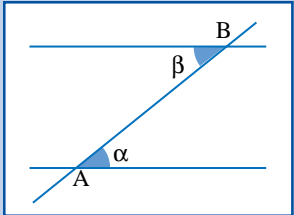
*Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.*

Pour démontrer cette proposition, il nous faudra démontrer préalablement quelques théorèmes :

- sur l'égalité des angles alternes-internes,
- le théorème sur la somme des angles intérieurs d'un triangle;
- le théorème sur la mesure d'un angle inscrit.

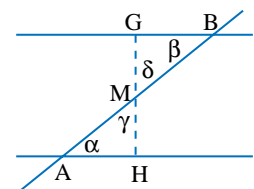
**Théorème 7**  
**Angles alternes-internes**

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes sont égaux.



*Démonstration*

Soient deux droites parallèles coupées par une sécante formant des angles alternes-internes notés  $\alpha$  et  $\beta$ . On veut montrer que les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont égaux



Déterminons, par construction à l'aide de la règle et du compas, le point-milieu M du segment AB de la sécante. À partir de ce point abaissons la perpendiculaire aux deux segments parallèles. On obtient alors les triangles rectangles AMH et BMG. Les hypoténuses AM et BM de ces triangles sont égales car le point M est le point milieu du segment de droite AB. De plus, les triangles AMH et BMG ont un angle aigu égal. En effet, les angles  $\delta$  et  $\gamma$  sont égaux car opposés par le sommet. Puisque deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal sont égaux, on peut conclure que les triangles AMH et BMG sont égaux. Par conséquent, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont égaux comme angles homologues de triangles égaux.



**REMARQUE**

Dans cette démonstration, on a adopté la même démarche que dans celui sur les angles opposés aux côtés égaux d'un triangle isocèle. On a construit des triangles rectangles et on a montré que ces triangles sont égaux.



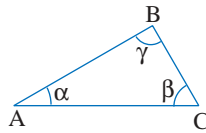
## Théorème 8

### Somme des angles d'un triangle

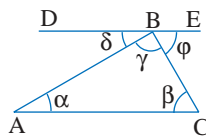
La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 2 angles droits.

*Solution*

Considérons un triangle ABC quelconque dont les angles intérieurs sont notés  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .



Traçons par le sommet B la droite DBE parallèle au côté AC du triangle. On forme alors les angles  $\delta$  et  $\varphi$ . Par rapport aux parallèles AC et DE, les angles  $\alpha$  et  $\delta$  sont alternes-internes, il sont donc égaux. De la même façon, les angles  $\beta$  et  $\varphi$  sont alternes-internes, il sont donc égaux. On a alors :



$$\angle\alpha = \angle\delta \text{ et } \angle\beta = \angle\varphi$$

De plus, les côtés extérieurs des angles formant une droite, on a :

$$\angle\delta + \angle\gamma + \angle\varphi = 2 \text{ angles droits}$$

Par substitution, on peut écrire :

$$\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = 2 \text{ angles droits}$$

La somme des angles intérieurs est donc égale à 2 angles droits.



**REMARQUE**

Dans cette démonstration, nous avons construit une parallèle à un des côtés du triangle ABC passant par le sommet opposé à ce côté. Il faut être conscient que sans cette construction, on ne peut démontrer ce résultat. C'est dire que l'existence des parallèles est indispensable pour que la somme des angles intérieurs d'un triangle soit égale à deux angles droits.

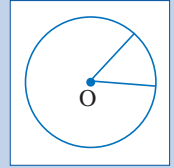


Le théorème attribué à Thalès que l'on veut démontrer porte sur la mesure d'un angle au centre et d'un angle inscrit dans un cercle, nous devons donc définir ces mesures.

## Définition

### Angle au centre

Soit un cercle de centre O. On appelle *angle au centre*, tout angle dont le sommet est au centre du cercle. La mesure de l'angle au centre est égale à la mesure de l'arc intercepté.

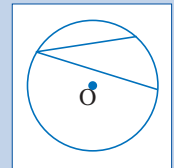


Dans les démonstrations qui vont suivre, nous n'aurons pas recours aux unités de mesure d'angles mais seulement aux arcs interceptés.

## Définition

### Angle inscrit

Soit un cercle de centre O. On appelle *angle inscrit* dans le cercle, tout angle dont le sommet est sur la circonférence.



Nous allons maintenant démontrer le théorème d'où est tiré le résultat de Thalès sur la mesure de l'angle inscrit dans un demi-cercle.

## Théorème 9

La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté.

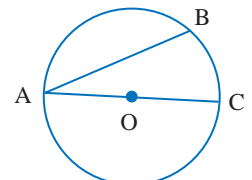
*Démonstration*

On doit considérer trois cas pour démontrer ce théorème :

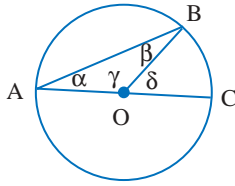
1. Un côté de l'angle passe par le centre du cercle;
2. le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle;
3. le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle.

Nous allons démontrer le premier cas, les autres seront laissés en exercices.

Soit un angle ABC inscrit dans un cercle de centre O tel qu'un des côtés de l'angle passe par le centre du cercle. Traçons le segment OB,



formant ainsi le triangle ABO. Ce triangle est isocèle puisque OA et OB sont des rayons du cercle, ils ont donc même longueur. Représentons l'angle au centre BCO par la lettre  $\delta$ . Puisque  $\angle\delta$  est un angle au centre, sa mesure est égale à la mesure de l'arc BC. On doit donc de démontrer que :



$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\angle\delta$$

Puisque la somme des angles intérieurs du triangle AOB est égale à 2 angles droits, on a :

$$\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 2\angle\text{droits}$$

De plus,  $\angle\alpha = \angle\beta$ , comme angles opposés aux côtés égaux d'un triangle isocèle ABO. On donc :

$$2\angle\alpha + \angle\gamma = 2\angle\text{droits}$$

d'où :  $2\angle\alpha = 2\angle\text{droits} - \angle\gamma$

De plus, puisque leurs côtés extérieurs forment une droite :

$$\angle\delta + \angle\gamma = 2\angle\text{droits}$$

d'où :  $\angle\delta = 2\angle\text{droits} - \angle\gamma$

Puisque les choses égales à une même chose sont égales entre elles, on a :

$$2\angle\alpha = \angle\delta$$

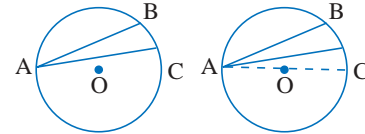
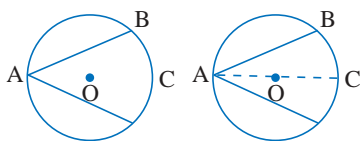
On peut donc conclure que :

$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\angle\delta$$



**REMARQUE**

Pour compléter la démonstration du théorème 10, il faut considérer le cas où le centre du cercle est compris à l'intérieur de l'angle et le cas où le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle. Dans ces cas, en traçant la droite joignant le sommet de l'angle au centre du cercle, on forme deux angles dont un des côtés passe par le centre et en effectuant la somme dans un cas et la différence dans l'autre, on complète la preuve.



Le théorème 10 permet de conclure que l'angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit puisqu'il intercepte la moitié de la circonférence.



**CONCLUSION**

Cette présentation devrait convaincre le lecteur que les contributions attribuées à Thalès ne sont pas anodines. Elles s'inscrivent dans un corpus de connaissances très structuré et sont le fruit d'une démarche déductive très poussée que la géométrie n'avait certainement pas atteint à l'époque de Thalès. Celui-ci peut cependant avoir énoncé certains des résultats qui lui sont attribués sans les avoir démontrés.

Les démonstrations nécessitent le recours à des définitions qui font abstraction des caractéristiques particulières et non pertinentes. Même si la notion de perpendicularité prend sa source dans l'utilisation du fil à plomb, il faut en faire abstraction pour obtenir une définition générale de perpendicularité utilisable dans une démonstration. C'est par le recours à l'abstraction que l'on peut déterminer ce que l'objet à définir possède en commun avec d'autres objets de même nature et ce qu'il possède en propre. Par l'abstraction, on gagne en généralité.

Nous avons également présenté différents types de preuves et montré que les preuves visent à unifier le corpus de connaissances tout en assurant sa cohérence. Dans une preuve directe, on utilise les axiomes, les postulats, les définitions et les propriétés préalablement démontrées pour prouver de nouveaux résultats. Une preuve par l'absurde consiste à introduire comme hypothèse supplémentaire la négation de la propriété dont on veut faire la preuve et à démontrer qu'en niant cette propriété on génère une contradiction avec: un axiome, un postulat ou une propriété déjà démontrée.

**EXERCICES**

1. Démontrer le théorème suivant :  
Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, alors ces triangles sont égaux (ACA, angle, côté, angle).

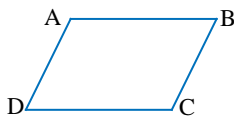
2. Démontrer le théorème suivant :  
Si deux triangles ont un angle égal adjacent à deux côtés égaux chacun à chacun, alors ces triangles sont égaux (CAC).

3. Démontrer le théorème suivant :  
Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, alors ces triangles sont égaux.

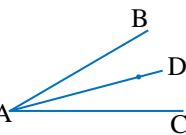
4. Démontrer le théorème suivant :  
Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, alors ces triangles rectangles sont égaux.

5. Démontrer le théorème suivant :  
Si deux triangles rectangles ont un angle aigu égal et un côté de l'angle droit égal, alors ces triangles rectangles sont égaux.

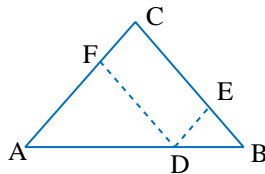
6. Dans le parallélogramme ci-contre, abaisser du point A et du point B les perpendiculaires au côté DC. En vous servant de la figure obtenue, construire un argument montrant que : l'aire d'un parallélogramme est égale à l'aire du rectangle ayant même base et même hauteur.



7. Soit un point quelconque D sur la bissectrice d'un angle ABC. À l'aide de la règle et du compas, abaisser de ce point une perpendiculaire à A chacun des côtés de l'angle.



8. Montrer que les trois médiatrices d'un triangle concourent en un même point.



9. Soit un triangle isocèle ABC, d'un point D sur le côté AB, on trace DE parallèle à AC et DF parallèle à BC.

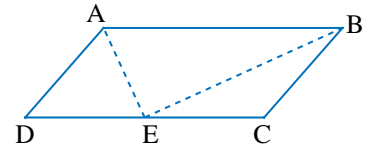
Montrer que le périmètre du quadrilatère CEDF est égal à  $mAC + mCB$ .

10. Soit un parallélogramme ABCD, tel que :

$$mAB = 2 mBC$$

Du point E milieu du côté AB, on trace les segments EA et EB.

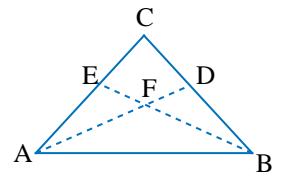
Montrer que EB est la bissectrice de l'angle B et que EA est la bissectrice de l'angle A.



11. Dans un triangle isocèle ABC, les bissectrices AD et BE des angles égaux se coupent en F.

a) Montrer que les triangles ADB et BEA sont congrus.

b) Montrer que les bissectrices sont congrues.



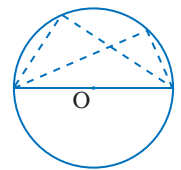
12. Montrer que les trois bissectrices d'un triangle concourent en un même point.

13. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point.

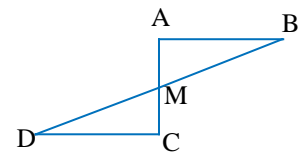
14. Montrer que les trois médianes d'un triangle concourent en un même point.

15. Montrer que : tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.

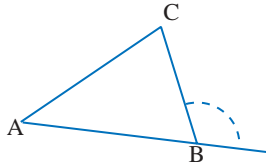
16. Montrer avec un argument par l'absurde que : Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.



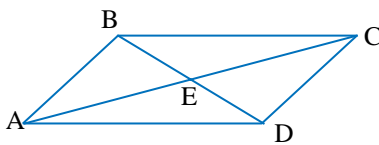
17. Sachant que, dans la figure ci-contre, le point M est milieu du segment de droite AC et que les angles MAB et MCD sont des angles droits, montrer que les triangles AMB et CMD sont congrus.



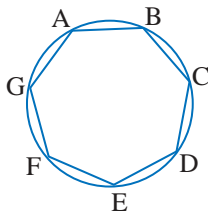
18. On appelle *angle extérieur d'un triangle*, l'angle formé par un côté du triangle et le prolongement du côté aboutissant au même sommet. Montrer que tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.



19. Soit ABCD un parallélogramme, montrer que les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu.



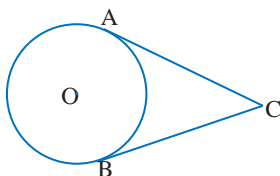
20. Montrer que tout polygone de  $n$  côtés peut se décomposer en  $n - 2$  triangles.



21. Montrer que la somme des angles intérieurs d'un polygone de  $n$  côtés est égale à  $(n - 2) 180^\circ$ .
22. Montrer que la mesure de chacun des angles intérieurs d'un polygone régulier de  $n$  côtés est égale à :

$$\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$$

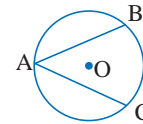
23. Montrer que: Si d'un point hors d'un cercle on trace deux tangentes au cercle, la droite joignant le centre du cercle au point de rencontre des tangentes est la bissectrice de l'angle formé par les tangentes.



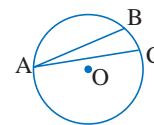
24. Montrer que: Si d'un point hors d'un cercle on trace deux tangentes OA et OB à ce cercle, alors les tangentes sont égales.

25. Montrer que la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté dans les cas suivants :

- a) Le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle.

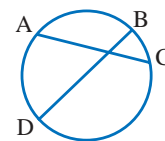


- b) Le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle.

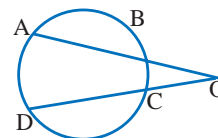


26. Montrer que dans un cercle tout diamètre perpendiculaire à une corde divise cette corde et les arcs sous-tendus en deux parties congrues.

27. Montrer que l'angle qui a son sommet à l'intérieur de la circonférence a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ses côtés et entre leurs prolongements.



28. Montrer que l'angle formé par deux sécantes issues d'un même point A hors du cercle a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.



29. Montrer que : dans un triangle rectangle ayant un angle de  $30^\circ$ , le côté opposé à l'angle de  $30^\circ$  est égal à la moitié de l'hypoténuse.