

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR ANDRÉ ROSS
 PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
 CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

INTRODUCTION

Dans les *Éléments* d'Euclide, on retrouve deux types de problèmes. Les problèmes consistant à construire une figure géométrique répondant à certaines contraintes et les problèmes consistant à démontrer une proposition. Dans cette section, nous considérons quelques problèmes de construction.

CONSTRUCTION DE PERPENDICULAIRES

Il y a différentes situations où on souhaite construire une perpendiculaire à un segment de droite. Nous en présentons quelques-unes, ce sont :

1. Construction de la médiatrice d'un segment :
2. D'un point hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire à cette droite.
3. D'un point sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite.

Dans ces constructions, nous nous servons de la définition de médiatrice. Rappelons cette définition :

Définition

Médiatrice

La *médiatrice* d'un segment de droite est la perpendiculaire élevée au milieu du segment, elle est formée des points équidistants des extrémités du segment.

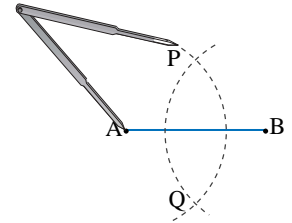
Problème de construction 1

Tracer la médiatrice d'un segment de droite.

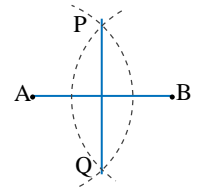
Solution

Soit AB un segment de droite. En prenant A comme centre, on trace un arc de cercle dont le rayon est plus

grand que la moitié de la longueur du segment AB . En conservant la même ouverture de compas et en prenant le point B comme centre, on trace un autre arc de cercle qui coupe le premier arc en déterminant des points P et Q .



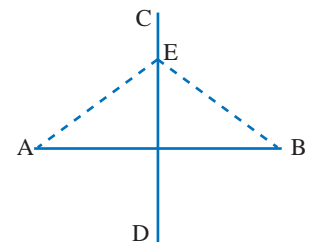
Le point P est à égale distance de A et de B puisque les deux arcs de cercle ont même rayon. De même le point Q est à égale distance de A et de B . Ce sont donc des points de la médiatrice. Le premier postulat nous permet de construire la droite passant par les points P et Q , on obtient donc la médiatrice cherchée.



REMARQUE

On a tracé une perpendiculaire, et formé un angle droit, sans avoir recours au fil à plomb. La procédure est applicable même lorsque le segment de droite AB est oblique.

Puisque chacun des points de la médiatrice d'un segment de droite est équidistant des extrémités de ce segment de droite, le point de rencontre de la médiatrice et du segment de droite est le point milieu du segment de droite.



On peut donc suivre la même procédure pour déterminer le point milieu d'un segment de droite.

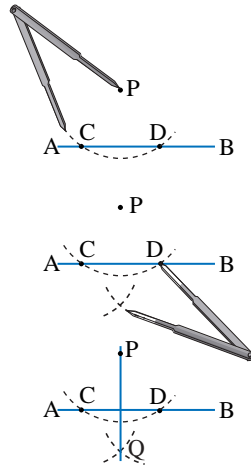


On peut adapter le procédé de construction pour abaisser une perpendiculaire d'un point P hors d'une droite, ce qui constitue notre deuxième problème de construction.

Problème de construction 2
 D'un point P hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire à cette droite.

Solution

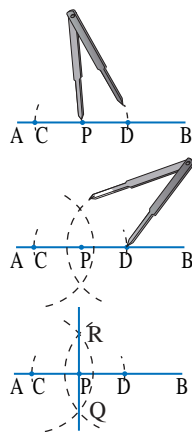
Du point P comme centre, on trace un arc de cercle qui coupe le segment de droite en deux points C et D. En prenant C et D comme centres, on trace des arcs de cercle qui se coupent en un point Q extérieur au segment de droite et situé du côté opposé de la droite par rapport au point P. En joignant les points P et Q, on obtient la perpendiculaire cherchée.



Problème de construction 3
 D'un point P sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite.

Solution

Du point P comme centre, on trace des arcs de cercle qui coupent le segment de droite en deux points C et D. En prenant C et D comme centres, on trace des arcs de cercle qui se coupent en des points R et Q extérieurs au segment de droite. En joignant les points R et Q, on obtient la perpendiculaire cherchée.



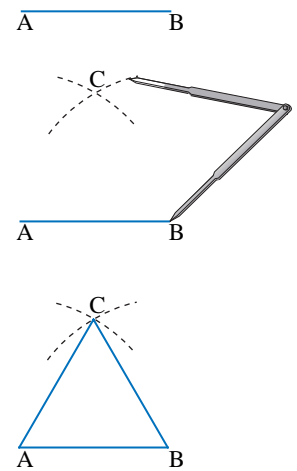
CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Rappelons que le fait de définir un triangle équilatéral ne signifie pas qu'un tel triangle existe. Cependant, si en utilisant la règle et le compas, on peut en construire un triangle équilatéral dont le côté est donné, cela signifie qu'un tel triangle existe. Par ses trois premiers postulats, Euclide se donne la possibilité de construire toutes les autres figures dont les caractéristiques sont données dans ses définitions.

Problème de construction 4
 Construire un triangle équilatéral de côté connu.

Solution

On souhaite construire un triangle dont les trois côtés sont de même longueur. Traçons un segment de droite AB dont la longueur est celle du côté du triangle à construire. Nous avons alors deux des sommets du triangle à construire, les sommets A et B. En prenant A comme centre et en traçant un arc de cercle dont le rayon est égal à la longueur du côté du triangle, on construit un lieu de points contenant le sommet C. De la même façon, en prenant B comme centre et en traçant un arc de cercle dont le rayon est égal à la longueur du côté du triangle, on construit un lieu de points contenant le sommet C. L'intersection de ces deux lieux géométriques est donc le sommet C.



CONSTRUCTION DE LA BISSECTRICE

Définition

Bissectrice

La *bissectrice* d'un angle est la droite qui divise l'angle en deux angles égaux.

Problème de construction 5

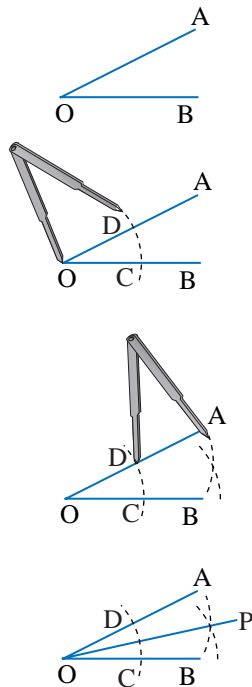
Tracer la bissectrice d'un angle.

Solution

Par définition, la bissectrice d'un angle est la droite qui divise un angle en deux parties égales. C'est donc le lieu des points qui sont à égale distance des deux côtés de l'angle.

Il nous faut donc construire un point qui est à égale distance des deux côtés de l'angle. En construisant le segment de droite passant par ce point et le sommet de l'angle, nous aurons alors la bissectrice de l'angle.

Soit un angle AOB, en prenant le sommet O de l'angle comme centre, traçons un arc de cercle qui coupe les côtés de l'angle aux points C et D. En prenant maintenant C et D comme centres, traçons deux arcs de cercle de même rayon. Ces arcs se coupent au point P. La droite passant par O et P est alors la bissectrice de l'angle AOB.



REMARQUE

Une construction à la règle et au compas fait appel aux propriétés des figures à construire.



CONSTRUCTION D'UNE PARALLÈLE À UNE DROITE DONNÉE

Par un point C hors d'une droite, on peut tracer une parallèle à cette droite, en construisant un parallélogramme. En effet, le parallélogramme a ses côtés opposés égaux et ces côtés peuvent être prolongés indéfiniment et continûment.

Problème de construction 6

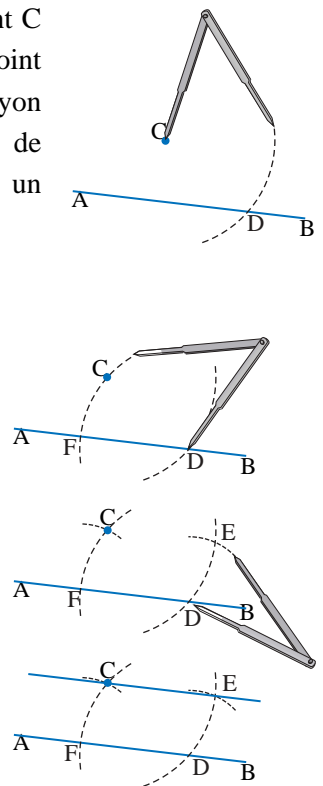
Par un point C, tracer une parallèle à une droite donnée.

Solution

Soit une droite AB et un point C extérieur à cette droite. Du point C comme centre et avec un rayon quelconque, on trace un arc de cercle qui coupe la droite en un point D.

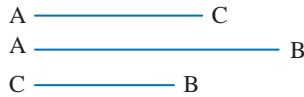
Du point D comme centre et avec le même rayon, on trace un arc de cercle qui passe par C et qui coupe la droite en un point F.

On prend comme ouverture du compas la distance FC. En prenant le point D comme centre et la distance FC comme rayon, on trace un arc de cercle qui détermine le point E sur le premier arc de cercle tracé. La droite passant par C et par E est alors la parallèle cherchée.



EXERCICES

1. On donne trois longueurs AC, AB et CB telles que $mAC + mCB > mAB$. Montrer en utilisant seulement la règle et le compas qu'on ne peut construire qu'un seul triangle, à congruence près, avec ces longueurs.



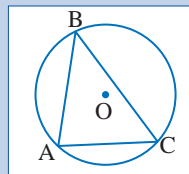
2. Dans le parallélogramme ci-contre, abaisser du point A et du point B les perpendiculaires au côté DC. En considérant la figure obtenue indiquer comment il faudrait procéder pour montrer que l'aire d'un parallélogramme est égale à l'aire du rectangle ayant même base et même hauteur.



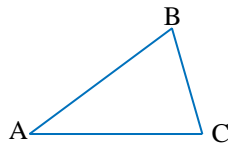
Définition

Cercle circonscrit à un triangle

On appelle *cercle circonscrit* à un triangle le cercle passant par les trois sommets du triangle.

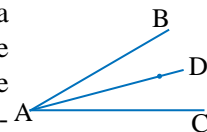


3. Soit un triangle ABC. Construire le cercle circonscrit à ce triangle.

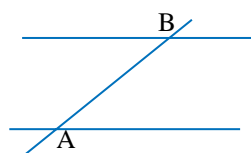


4. Soit trois points non-alignés A, B et C. À l'aide de la règle et du compas, tracer la circonférence passant par ces trois points.

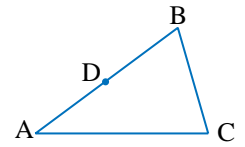
5. Soit un point quelconque D sur la bissectrice d'un angle ABC. À l'aide de la règle et du compas, abaisser de ce point une perpendiculaire à chacun des côtés de l'angle.



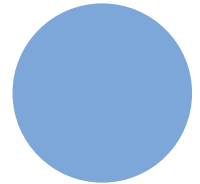
6. Soit deux droites parallèles coupés par une sécante. Du point milieu de la sécante, abaisser une perpendiculaire aux droites parallèles.



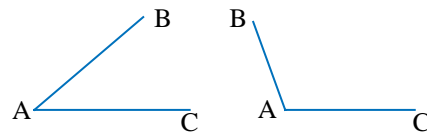
7. Soit un triangle ABC et un point D sur le côté AB. À l'aide de la règle et du compas, tracer du point D la parallèle au côté BC et la parallèle au côté AC.



8. On désire perforer le centre d'une table circulaire pour installer un parasol. Comment doit-on s'y prendre ?



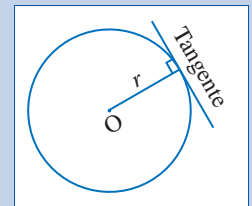
9. À l'aide de la règle et du compas tracer la bissectrice des angles suivants.



Définition

Tangente

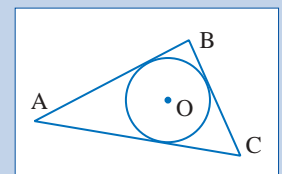
Soit un cercle de centre O. On dit qu'une droite est *tangente* au cercle de centre O si la distance de cette droite au centre est égale à la longueur du rayon.



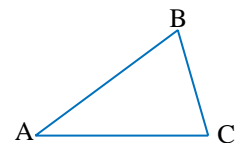
Définition

Cercle inscrit dans un triangle

On appelle *cercle inscrit* dans un triangle le cercle tangent aux trois côtés du triangle.



10. Soit un triangle ABC. Construire le cercle inscrit dans ce triangle.



11. À l'aide de la règle et du compas tracer les médiatrices des côtés du triangle ci-contre.

