EUCLIDE

PAR : ANDRÉ ROSS
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

NOTES BIOGRAPHIQUES

Euclide est un mathématicien grec qui vécut vers 300 ans avant Jésus-Christ. Il est connu surtout par ses ouvrages, car on connaît peu de détails de sa vie. La principale source est un extrait de l'historien et philosophe grec Proclus (412-485) dont voici une traduction à partir de *Euclid's Elements, par Sir Thomas L. Heath.*

Pas beaucoup plus jeune qu'Hermotimus de Colophon et Philippus de Medma, on retrouve Euclide qui produisit les Éléments, regroupant plusieurs des théorèmes d'Eudoxe, perfectionnant plusieurs de ceux de Théétète et donnant des démonstrations irréprochables de choses qui avaient fait l'objet de présentations négligées de la part de ses prédécesseurs. Il vécut à l'époque du premier Ptolémée car Archimède qui vint immédiatement après le premier Ptolémée fait mention d'Euclide et, de plus, on raconte que le premier Ptolémée lui demanda s'il n'y avait pas une manière plus directe de s'instruire en géométrie que d'étudier les Éléments. Ce à quoi il répondit : qu'il n'y a pas de voie royale en géométrie. Il est donc plus jeune que les disciples de Platon mais plus âgé qu'Ératosthène et Archimède qui étaient contemporains.

Le mathématicien Pappus d'Alexandrie, (fin du III^{e} siècle) qui est l'auteur de la *Collection mathématique*, fait également allusion à Euclide.

L'influence de Platon qui est manifeste dans l'oeuvre d'Euclide permet de supposer qu'il vécut après ou à l'époque de Platon. On sait également qu'il s'est installé à Alexandrie où il a fondé l'école de mathématiques de l'Université d'Alexandrie. De tous les géomètres de l'Antiquité, c'est lui qui a eu le plus d'influence.

Euclide est l'auteur d'une dizaine d'ouvrages dont le plus connu *Les Éléments* est divisé en treize livres dont les quatre premiers portent sur la géométrie plane (points, droites, cercles, parallélogrammes, etc.). Les livres V et VI portent sur la théorie des proportions et ses applications. Les livres VII à IX traitent d'arithmétique et de théorie des nombres entiers. Le livre X traite des nombres irrationnels et les trois derniers de la géométrie des solides ainsi que des cinq corps réguliers de Platon (tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre).

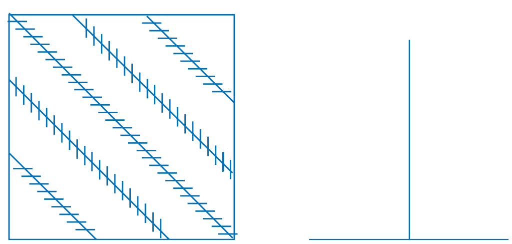
L'apport principal d'Euclide est la ***méthode axiomatique***, soit la construction d'un ensemble de propositions mathématiques obtenues à partir d'un nombre fini de postulats à l'aide de raisonnements logiques rigoureux.

GÉOMÉTRIE ET CONSTRUCTION DU SAVOIR

La pensée de Thalès nous est connue par les commentaires de penseurs et d'historiens qui ont vécu environ deux cents ans après lui. Il n'est pas possible de donner un compte-rendu de la façon dont il a œuvré en géométrie. On lui attribue des résultats qui auraient été obtenus sur le mode déductif, mais comment peut-on déduire des propriétés qui pour le lecteur semblent des « évidences ». Peut-on démontrer que :

Tout diamètre bisecte le cercle

À la lecture de cette contribution de Thalès, on est tenté de dire « c'est évident ». À ce sujet, deux remarques: premièrement, il faut se méfier des évidences parce que les sens sont trompeurs comme l'illustrent les deux exemples ci-dessous



Il est « évident » que les droites obliques ne sont pas parallèles. Il est « évident » que la droite verticale est plus longue que l'horizontale. Et pourtant !

Deuxièmement, la démonstration ne vise pas seulement à convaincre l'interlocuteur. La démonstration permet de construire un système cohérent de connaissances par les liens qu'elle tisse entre les différentes composantes de cette connaissance. Cela ne signifie pas que tout peut et doit être démontré. Il existe en géométrie, comme dans tout champ de connaissances, des fondements qui sont admis sans démonstrations, ce sont les axiomes et les postulats. Cependant, le développement sur un mode déductif permet de réduire au minimum le nombre d'axiomes et de postulats nécessaires au développement de la théorie.

Dans notre étude de la géométrie euclidienne, nous allons illustrer comment on construit des argumentations en ayant recours aux axiomes, aux postulats et aux propriétés déjà démontrées. Mais nous verrons également qu'il y a lieu de critiquer une argumentation en posant des questions, en émettant des doutes, cela permet de bien comprendre l'argumentation. On peut également tirer profit des questions et des critiques pour améliorer l'argumentation, la généraliser ou la changer complètement. Il ne faut jamais oublier qu'une argumentation vise à convaincre l'interlocuteur tout en respectant ses hésitations et ses doutes.

Dans une science, les démonstrations peuvent prendre pour prémisses les conclusions de d'autres démonstrations. Cependant, il doit y avoir un point de départ qui ne peut être démontré par la science en question. Ce point de départ est constitué de définitions, d'axiomes et de postulats. Comme notre objectif est de comprendre comment se construisent les démonstrations en géométrie, nous allons poser dès le départ les axiomes et postulats de la géométrie euclidienne et nous les utiliserons pour indiquer comment on peut démontrer les résultats de Thalès.

Rappelons qu'une définition :

- doit expliquer ce que l'objet défini possède en commun avec les autres et ce qu'il possède en propre.
- doit être plus claire que ce qui est défini. Elle doit donc être univoque, c'est-à-dire avoir une seule interprétation possible.
- elle ne doit pas être circulaire, c'est-à-dire qu'elle ne doit pas se servir de ce qui doit être défini. Elle doit être équivalente à ce qui est défini.

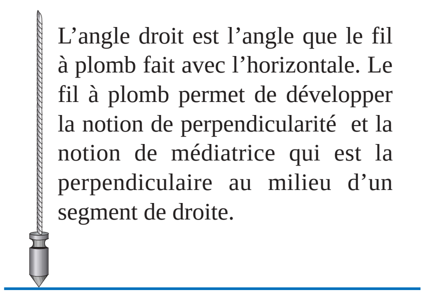
LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

LES DÉFINITIONS

Les définitions du livre I des Éléments d'Euclide sont les suivantes :

1. Le *point* est ce qui n'a pas de parties.
2. Une *ligne* est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. Une ligne droite est une ligne qui est également située entre ses points.
5. Une *surface* est ce qui a seulement une longueur et une largeur.

6. Les extrémités (frontières) d'une surface sont des lignes.
7. Une *surface plane* est une surface qui est également située entre ses droites.
8. Un *angle plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes d'un plan qui se rencontrent et ne sont pas situées dans une ligne droite.
9. Lorsque les lignes qui comprennent l'angle sont des droites, l'angle est appelé *rectiligne*.
10. Lorsqu'une ligne droite tombant sur une ligne droite fait deux angles adjacents égaux, chacun des angles égaux est un *angle droit*; et la droite placée au-dessus est dite *perpendiculaire* à celle sur laquelle elle est placée.



L'angle droit est l'angle que le fil à plomb fait avec l'horizontale. Le fil à plomb permet de développer la notion de perpendicularité et la notion de médiatrice qui est la perpendiculaire au milieu d'un segment de droite.

11. L'*angle obtus* est celui qui est plus grand qu'un angle droit.
12. L'*angle aigu* est celui qui est plus petit qu'un angle droit.
13. On appelle *frontière* l'extrémité de quelque chose.
14. Une *figure* est ce qui est limité par une seule ou plusieurs frontières.
15. Un *cercle* est une figure plane limitée par une seule ligne telle que toutes les lignes droites (rayons) menées à la circonférence d'un unique point parmi ceux placés à l'intérieur de cette figure sont égales entre elles.
16. Ce point est appelé *centre du* cercle.
17. Un *diamètre* du cercle est une ligne droite menée par le centre qui s'achève de part et d'autre sur la circonférence du cercle de façon à partager le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre et la portion de la circonférence qu'il sous-tend.
19. les *figures rectilignes* sont celles qui sont comprises entre des lignes droites, les *figures trilatères* sont celles qui sont comprises entre trois lignes droites, les *figures quadrilatères* sont celles qui sont comprises entre quatre lignes droites et les *figures multilatères* sont celles qui sont comprises entre plus de quatre lignes droites,
20. Un *triangle équilatéral* est une figure trilatère qui a ses trois côtés égaux, un *triangle isocèle* est une figure trilatère qui a deux côtés égaux et un *triangle scalène* est une figure trilatère qui a ses trois côtés inégaux.
21. Un *triangle rectangle* est une figure trilatère qui a un angle droit, un *triangle obtusangle* est une figure trilatère qui a un angle obtus, un *triangle acutangle* est une figure trilatère qui a un angle aigu.
22. Un *carré* est une figure quadrilatère équilatérale et rectangulaire; un *hétéromèque* (rectangle) est une figure quadrilatère rectangulaire et non équilatérale; un *rhombe* (losange) est une figure quadrilatère équilatérale et non rectangulaire; un *rhomboïde* (parallélogramme qui n'est ni rectangle ni losange) est une figure quadrilatère qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.
23. Des lignes droites *parallèles* sont des lignes droites situées dans un même plan qui, étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

LES AXIOMES

Définition

Axiome

Un *axiome* est une vérité indémontrable mais évidente par quiconque en comprend le sens.

Les axiomes des *Éléments* sont :

1. Les choses égales à une même troisième sont égales entre elles.
2. Si à des choses égales sont ajoutés des choses égales, les touts sont égaux.
3. Si à des choses égales sont retranchées des choses égales, les restes sont égaux.

4. Si a des choses inégales sont ajoutés à des choses égales, les touts sont inégaux.
5. Si des égaux sont soustraits d'inégaux, les restes sont inégaux
6. Les doubles de choses égales sont égales.
7. Les moitiés de choses égales sont égales.
8. Les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.
10. Deux droites ne délimitent point d'aire.

REMARQUE

En mathématiques contemporaines, les axiomes sont des propositions destinées à servir de base à un savoir mais seule leur cohérence les uns par rapport aux autres est prise en considération et non leur évidence.

• • •

LES POSTULATS

Le mot postulat vient de *postulare* qui signifie *demande*. L'orateur demande à son interlocuteur s'il accepte sans démonstration un principe dont il entend se servir dans son argumentation. Pour Aristote, une définition pose une signification mais ne garantit pas l'existence de ce qui est défini. Ainsi :

Définition

Licorne

Une *licorne* est un animal à corps de cheval, à tête de cheval ou de cerf, ayant une corne unique au milieu du front.

Le fait de définir ce qu'est une licorne ne garantit pas qu'un tel animal existe. Par conséquent, si on veut dans une argumentation se servir de l'existence des licornes, il faut en faire un postulat.

Définition

Postulat

Un *postulat* est un principe d'un système déductif qu'on ne peut prendre pour fondement d'une démonstration sans l'accord de l'interlocuteur.

Les postulats des *Éléments* sont :

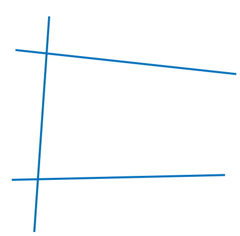
1. Par deux points on peut tracer une droite et une seule.
2. Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.
3. Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence.

Par ces trois premiers postulats, Euclide demande que soit reconnue la possibilité de construire une ligne droite et un cercle. Ce sont des constructions qu'il devra faire dans les démonstrations de ses propositions.

4. Tous les angles droits sont égaux.

Lorsqu'une ligne droite tombant sur une ligne droite fait deux angles adjacents égaux, chacun des angles égaux est un angle droit. Ces deux angles sont donc égaux. Il s'agit ici de savoir si l'interlocuteur accepte que tous les angles que l'on peut ainsi construire, quelle que soit l'orientation des deux droites, sont égaux entre eux.

5. Si une sécante rencontre deux autres droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux droits.



Postulat des parallèles
Le cinquième postulat est appelé « postulat des parallèles ». Accepter ce postulat, c'est accepter l'existence de droites parallèles lorsque la somme des angles intérieurs est égale à deux droits.

L'énoncé de ce postulat est aussi long et complexe que celui d'une proposition. Il fut critiqué dès l'antiquité à cause de cela et il fut l'objet de plusieurs tentatives de démonstrations.

REMARQUE

Dans les mathématiques contemporaines, on ne fait plus de distinction entre postulat et axiome.

• • •