

EUDOXE DE CNIDE

par : André Ross
 professeur de mathématiques
 Cégep de Lévis-Lauzon

Eudoxe est né à Cnide en Asie mineure en 408 av. J.-C. Il est surtout connu comme mathématicien, mais il était également astronome et médecin.

Il a étudié les mathématiques à Tarente avec Archytas, un pythagoricien passionné par le problème de la « duplication du cube ». Il a également visité la Sicile où il a étudié la médecine avec Philiston. Il fit un voyage de deux mois à Athènes et il en profita pour assister à des conférences de Platon et de d'autres philosophes de l'Académie.

Porteur d'une lettre de recommandation du roi Agesilas de Sparte pour le pharaon Nectanabis et accompagné du

médecin Chrysippe, il fit en Égypte un voyage qui dura 16 mois. Durant son séjour, il a étudié l'astronomie et a fait des observations à Héliopolis.

Lors d'un voyage à Cyzique, il y fonde une École qui attira beaucoup d'élèves. Vers 368, il entreprit un second voyage à Athènes avec quelques-uns de ses disciples.

Par la suite, il retourna à Cnide et y fit construire un observatoire. L'astronome Hipparque cite les ouvrages dans lesquels Eudoxe relate les observations astronomiques qu'il a fait à Héliopolis et à Cnide. Eudoxe meurt dans sa ville natale en 355 av. J.-C., à l'âge de 53 ans.



THÉORIE DES PROPORTIONS

La découverte des irrationnels par les pythagoriciens avait sapé les fondements de leur théorie des proportions. Il fallait donner de nouveaux fondements à cette théorie. Ce fut l'œuvre d'Eudoxe. Cette théorie se retrouve dans le livre V des Éléments d'Euclide. Considérons quelques-unes des définitions posées par Eudoxe (traduites en français à partir de la version anglaise de Heath).

Définition

Rapport

Un rapport est une relation selon la dimension entre deux grandeurs du même type.

REMARQUE

Une longueur et une aire ne sont pas des grandeurs de même type.

Définition

Rapport possible

Un rapport est possible entre deux grandeurs lorsque chacune peut excéder l'autre en la multipliant.

REMARQUE :

Une longueur que l'on multiplie ne peut excéder une aire et une aire ne peut excéder un volume.

Par ces deux définitions, Eudoxe élimine la possibilité de calculer le quotient de deux grandeurs qui ne sont pas de même type. Ainsi, il n'est pas possible, comme nous le faisons aujourd'hui, de diviser une distance par une durée pour obtenir une vitesse. Ce ne sont pas des grandeurs de même nature.

Définition

Grandeurs dans un même rapport

On dit que des grandeurs ont le même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, si pour tout équi-multiple de la première et de la troisième et tout équi-multiple de la seconde et de la quatrième, les premiers équi-multiples sont respectivement plus petits, égaux ou plus grands que les seconds équi-multiples pris dans le même ordre.

REMARQUE

En langage moderne, cela signifie que le rapport de a à b est égal au rapport de c à d (a , b , c et d peuvent être irrationnels), si pour toute paire d'entiers m et n :

1. si $ma < mb$ alors $mc < md$;
2. si $ma = mb$ alors $mc = md$;
3. si $ma > mb$ alors $mc > md$.

Cette définition a l'avantage d'être applicable aussi bien aux nombres qu'à des éléments géométriques. Ainsi, le rapport des aires de deux figures semblables peut égaler le rapport des carrés de lignes homologues de ces figures. Par exemple, on peut montrer que le rapport des aires de deux cercles peut être égal au rapport des carrés de leurs rayons et que le rapport des volumes de deux sphères peut être égal au rapport des cubes de leurs rayons.

Définition

Grandeurs proportionnelles

Des grandeurs qui ont le même rapport sont dites proportionnelles.

REMARQUE

Les pythagoriciens avaient fondé leur théorie des proportions sur la conviction que deux grandeurs de même nature sont toujours commensurables. La découverte des irrationnels et les paradoxes de Zénon avaient détruit ces fondements. Cependant, l'étude des rapports et proportions à partir de cette conviction avait permis d'établir plusieurs propriétés intéressantes des figures semblables.

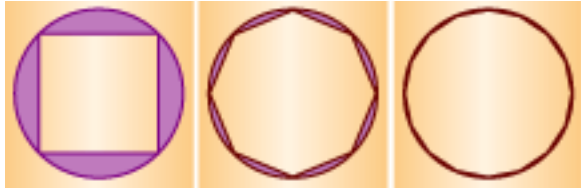
En établissant des fondements strictement mathématiques à la théorie des proportions Eudoxe a permis de préserver ces résultats et d'en développer d'autres.

MÉTHODE D'EXHAUSTION

La méthode d'exhaustion est une méthode pour déterminer l'aire d'une figure délimitée par une ligne courbe. C'est Antiphon le sophiste (~480 à ~411), contemporain de Socrate (~470 à ~399), qui a énoncé l'idée qui constitue le fondement de la méthode d'exhaustion. Cherchant une nouvelle approche pour trouver l'aire d'un cercle, il a énoncé le postulat suivant :

Postulat d'Antiphon

En doublant le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant successivement l'opération, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



Avant d'aller plus loin, il faut rappeler que le mot « postulat » signifie une « demande ». Avant de présenter l'argumentation, on demande si l'interlocuteur accepte sans démonstration un principe qui sera utilisé comme argument.

Postulat

Un *postulat* est un principe d'un système déductif qui ne peut être utilisé sans l'accord de l'interlocuteur.

L'enjeu est de taille. Si l'interlocuteur accepte le postulat, il doit accepter les conclusions des théorèmes et démonstrations auxquels il sert de justification. Si l'interlocuteur n'accepte pas le postulat, il rejette toutes les conclusions qui en découlent.

Est-il envisageable de ne pas accepter ce postulat? À l'époque, il fut critiqué par les tenants de la thèse selon laquelle les grandeurs sont infiniment divisibles. Ils en concluaient que le procédé d'Antiphon ne pourrait jamais donner l'aire du cercle. Car, en acceptant ce principe, il est toujours possible de diviser la différence entre l'aire d'un cercle et l'aire d'un polygone inscrit quel que soit son nombre de côtés. Il est donc impossible que l'aire du polygone puisse être égale à celle du cercle. Cette critique est similaire à celle du paradoxe de la flèche de Zénon. Puisqu'une longueur est infiniment divisible, la flèche d'Achille ne peut jamais atteindre la cible car il reste toujours une demi-longueur à parcourir. De la même façon, puisqu'une aire est infiniment divisible, l'aire du polygone ne peut jamais égaler celle du cercle, il y a toujours une différence non nulle.

Le postulat d'Antiphon reconnaît implicitement l'existence d'une valeur limite, ce qui revient à reconnaître un infini actuel alors qu'il s'agit d'un infini potentiel, d'un processus qui n'a jamais de fin.

Pour contourner les critiques et énoncer un principe utilisable dans un argument déductif, il fallait formuler l'idée autrement. C'est Eudoxe de Cnide (~406 à ~355) qui va reprendre cette idée et la développer. Eudoxe semble s'être spécialisé dans la reformulation de concepts pour éviter les paradoxes. Eudoxe reformule le postulat d'Antiphon de la façon suivante :

Postulat d'Eudoxe

Si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste, on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié et ainsi de suite, à la longue, la grandeur restante peut être rendue plus petite que n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature.

Ce postulat est très intéressant, il reconnaît la divisibilité infinie des grandeurs et l'exploite. La divisibilité infinie étant possible, on peut rendre une grandeur donnée aussi petite que l'on voudra en lui soustrayant itérativement une partie supérieure ou égale à la moitié de la partie restante.

En utilisant la notation moderne, on peut illustrer numériquement ce postulat en considérant une grandeur a dont on soustrait les deux tiers de la valeur. On a alors :

$$a - \frac{2}{3}a = \frac{3a}{3} - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$$

En soustrayant du reste les deux tiers de cette valeur, on obtient :

$$\frac{a}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{a}{3} = \frac{3a}{9} - \frac{2a}{9} = \frac{a}{9}$$

En soustrayant à nouveau les deux tiers du reste, on obtient :

$$\frac{a}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{a}{9} = \frac{3a}{27} - \frac{2a}{27} = \frac{a}{27}$$

Le postulat affirme qu'en poursuivant le processus, on peut rendre le reste plus petit que toute grandeur prédéfinie. Par exemple, on peut le rendre plus petit que $a/1000$. Il

suffit de remarquer que le reste est $a \times (1/3)^n$, où n est le nombre d'itérations. On doit donc déterminer n tel que :

$$a\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{a}{1000}$$

d'où :

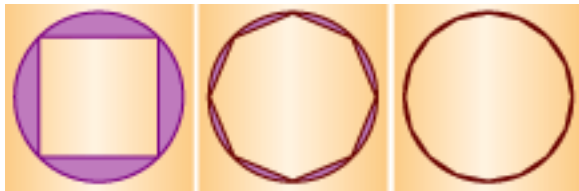
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{1000}$$

et :

$$3^n > 1000$$

On trouve alors qu'il suffit de 7 itérations pour que le reste soit rendu plus petit que $a/1000$. Le postulat affirme que quelle que soit la grandeur prédéfinie, il est toujours possible de rendre le reste plus petit que cette grandeur en effectuant ces soustractions successives.

Considérons à nouveau le cercle et le carré inscrit. L'aire du carré inscrit est supérieure à la moitié de l'aire du cercle. La différence de ces aires donne l'aire A_1 de la partie ombrée de la figure de gauche dans l'illustration suivante



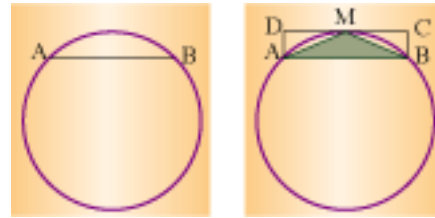
En doublant le nombre de côtés, on obtient un octogone inscrit. On constate que sur chaque côté du carré, on a construit un triangle dont l'aire est supérieure à la moitié de l'aire comprise entre le côté du carré et l'arc de cercle ayant ce côté comme corde. La somme des aires des quatre triangles est supérieure à la moitié de A_1 . Si on soustrait cette somme de A_1 , on obtient A_2 , l'aire entre le cercle et l'octogone inscrit. En poursuivant le processus, on peut rendre la différence entre l'aire du cercle et celle du polygone aussi petite que l'on voudra. À l'aide du postulat d'Eudoxe on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 1

Aire du cercle et du polygone régulier inscrit

La différence entre l'aire d'un cercle et l'aire d'un polygone régulier inscrit peut être rendue aussi petite que toute aire prédéfinie.

Voici l'idée de la preuve. Soit un cercle, AB un côté d'un polygone régulier inscrit et A la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



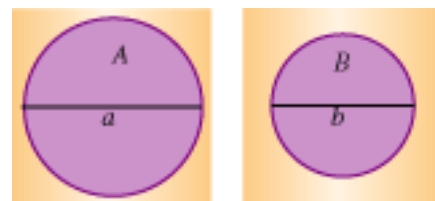
Sur AB comme côté, construisons le rectangle ABCD tel que le côté CD soit tangent au cercle et déterminons le point M milieu de CD. L'aire du triangle AMB est alors la moitié de l'aire du rectangle ABCD. Elle est donc supérieure à la moitié de l'aire du segment circulaire AMB. En soustrayant de A le produit de l'aire du triangle par le nombre de côtés du polygone régulier, on obtient la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone obtenu en doublant le nombre de côtés. En poursuivant le processus, on peut rendre la différence entre ces aires plus petite que toute grandeur d'aire prédéfinie. Voyons maintenant comment le postulat d'Eudoxe est utilisé dans une démonstration.

Théorème 2

Aire du cercle et diamètre

Le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres.

Voici l'idée de la preuve. Soit deux cercles de diamètres a et b et dont les aires sont A et B respectivement.

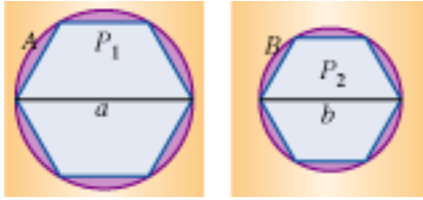


Supposons que le rapport des aires est plus grand que le rapport des carrés des diamètres, soit :

$$\frac{A}{B} > \frac{a^2}{b^2}$$

Dans le premier cercle, inscrivons un polygone régulier dont l'aire diffère si peu de A que l'on a :

$$\frac{A}{B} > \frac{P_1}{B} > \frac{a^2}{b^2}$$



Cela est possible en vertu du théorème précédent. Considérons de plus le polygone régulier semblable inscrit dans le deuxième cercle et notons P_2 son aire. Alors, puisque les polygones sont semblables, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

On a donc :

$$\frac{A}{B} > \frac{P_1}{B} > \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

et :

$$\frac{P_1}{B} > \frac{P_1}{P_2}$$

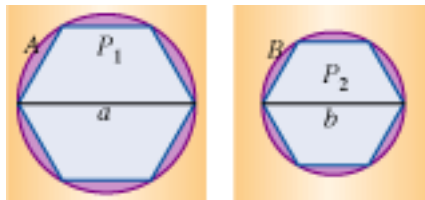
Puisque les numérateurs sont égaux, on obtient $P_2 > B$, ce qui est une contradiction puisque l'aire du polygone régulier ne peut excéder l'aire du cercle circonscrit. Par conséquent, le rapport des aires ne peut être plus grand que le rapport des carrés des diamètres.

Supposons donc que le rapport des aires est plus petit que le rapport des carrés des diamètres, soit :

$$\frac{A}{B} < \frac{a^2}{b^2}$$

Dans le second cercle, inscrivons un polygone régulier dont l'aire diffère si peu de B que l'on a :

$$\frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2}$$



Cela est possible en vertu du théorème précédent. Considérons de plus le polygone régulier semblable inscrit dans le premier cercle dont l'aire est P_1 . Alors, puisque les polygones sont semblables, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Cela donne :

$$\frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

et :

$$\frac{A}{P_2} < \frac{P_1}{P_2}$$

Puisque les dénominateurs sont égaux, on obtient $P_1 > A$, ce qui est une contradiction puisque l'aire du polygone régulier ne peut excéder l'aire du cercle circonscrit. Par conséquent, le rapport des aires ne peut être ni plus grand ni plus petit que le rapport des carrés des diamètres. Cette double *réduction à l'absurde* permet alors de conclure que le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres.

CALCUL DE VOLUMES

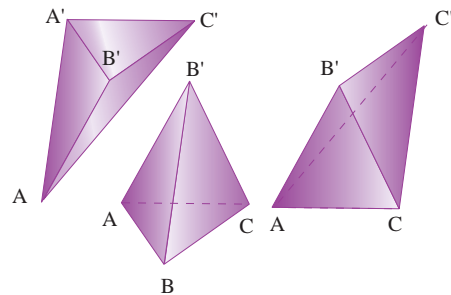
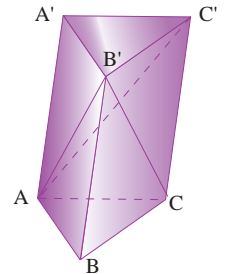
Eudoxe a développé la méthode d'exhaustion et l'a utilisée pour démontrer différents résultats sur les volumes de pyramides, de cônes et de cylindres.

Théorème 3

Tout prisme triangulaire est décomposable en trois pyramides de volumes équivalents.

Démonstration

Soit un prisme triangulaire dont les bases sont ABC et $A'B'C'$. Coupons le prisme suivant les plans $AB'C$ et $AB'C'$. On obtient alors trois pyramides. Les pyramides $AA'B'C'$ et $B'ABC$ ont même volume. en effet, les bases sont égales, car elles sont les triangles $A'B'C'$ et ABC , de plus, les pyramides ont la même hauteur que le prisme.



Démontrons que les pyramides $B'AA'C'$ et $B'ACC'$ ont même volume. En considérant B' comme sommet de chacune des pyramides, elles ont des bases égales. En effet les triangles $AA'C'$ et ACC' sont égaux, puisque la droite AC' est la diagonale du parallélogramme $AA'C'C$. De plus, la hauteur des deux pyramides est la distance du point B' au plan $AA'C'C$.

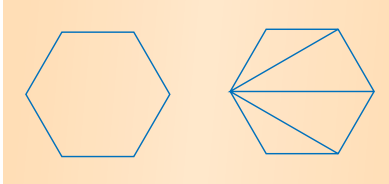
De ce théorème, on peut déduire que :

Théorème 4

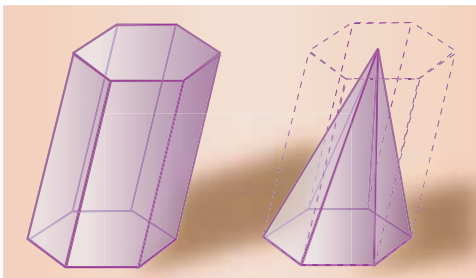
Volume d'une pyramide à base triangulaire

Le volume d'une pyramide est le tiers du volume du prisme ayant même base et même hauteur.

Tout polygone régulier peut être décomposé en triangles.



On peut conclure que tout prisme à base polygonale peut être décomposé en prismes triangulaires.

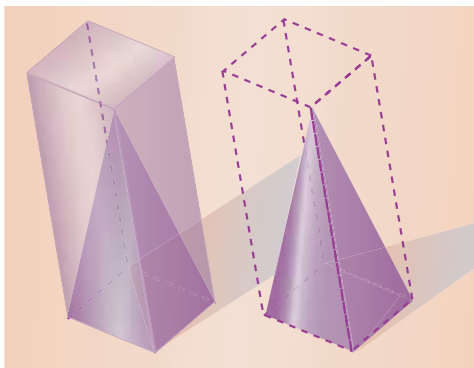


Par conséquent, on peut généraliser le théorème précédent à toute pyramide à base polygonale.

Théorème 5

Volume d'une pyramide à base polygonale

Le volume d'une pyramide est le tiers du volume du prisme ayant même base et même hauteur.

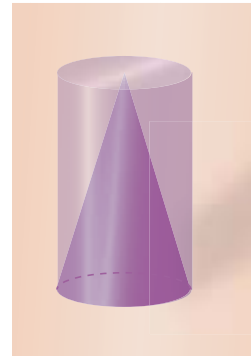


En utilisant le postulat d'Eudoxe on peut montrer qu'en doublant le nombre de côtés du polygone régulier inscrit dans le cercle formant la base d'un cylindre, la différence entre le volume du prisme à base polygonale et le volume du cône peut être rendue aussi petite que n'importe quelle valeur prédéfinie. Ce résultat s'énonce maintenant comme suit :

Théorème 6

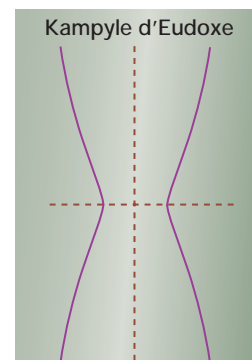
Volume d'un cône

Le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre ayant même base et même hauteur.



KAMPYLE

Eudoxe s'est également intéressé au problème de la duplication du cube. Le problème consiste à déterminer la longueur du côté d'un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné. Sa solution au problème est perdue, mais il semble que dans ses travaux relatifs à ce problème, il a étudié la courbe appelée *Kampyle*.



En écriture moderne, l'équation cartésienne de cette courbe est :

$$a^2x^4 = b^4(x^2 + y^2)$$

En coordonnées polaires, l'équation est :

$$r = b^2 / (a \cos^2 \theta)$$

En considérant le cas particulier où $a = b = 1$, on obtient :

$$x^4 = x^2 + y^2$$

d'où :

$$y^2 = x^4 - x^2$$

L'intersection de cette courbe avec le cercle de rayon unitaire centré en $(1; 0)$ donne la racine cubique de 2. En effet, l'équation du cercle est :

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

et en isolant y^2 , on obtient :

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - (x - 1)^2 \\ &= 1 - (x^2 - 2x + 1) \\ &= 1 - x^2 + 2x - 1 \\ &= -x^2 + 2x \end{aligned}$$

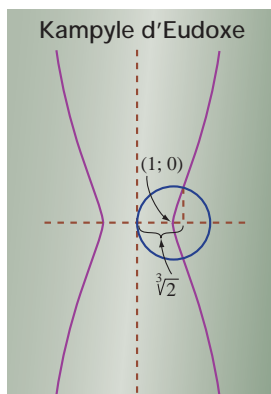
Par comparaison de y^2 , on a alors :

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &= -x^2 + 2x \\ x^4 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

qui donne :

$$x(x^3 - 2) = 0$$

La solution $x = 0$ est à rejeter et la solution $x^3 - 2 = 0$ donne la racine cubique de 2. Graphiquement, cette solution est l'abscisse du point d'intersection de la Kampyle et du cercle.



TRAVAUX EN ASTRONOMIE

Eudoxe a inventé l'astrolabe qui est un instrument permettant d'obtenir, pour une latitude donnée, une représentation simplifiée du ciel à une date quelconque.

Il a établi le premier système astronomique basé sur les principes et postulats des pythagoriciens. Ces principes ont également été adoptés par Platon, ce qui a amené plusieurs historiens à croire qu'Eudoxe les tenait de Platon et qu'il en avait été l'élève. Cependant, il semble qu'Eudoxe avait peu de respect pour les habiletés analyti-

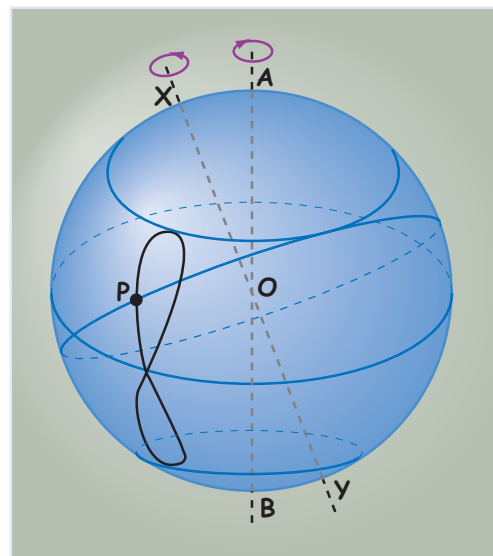
ques de Platon. Les compétences mathématiques d'Eudoxe dépassaient largement celles de Platon. De plus, les deux Écoles, celle de Platon et celle d'Eudoxe étaient compétitrices, Il n'y a aucune raison de croire que ces deux philosophes ont été influencés l'un par l'autre. On sait cependant qu'ils ont tous deux reçu l'enseignement d'Archytas de Tarente qui était pythagoricien et ils ont tous deux été influencés par la pensée pythagoricienne.

Ce modèle est constitué de sphères homocentriques de pôles distincts mais dont le centre commun est la Terre, immobile (voir modèle p. B-72). La rotation des sphères expliquait les mouvements célestes apparents. La sphère des fixes tourne autour du même pôle que l'équateur et le Soleil est sur une sphère dont le pôle est le même que l'écliptique. Eudoxe a estimé la durée de l'année à 365 jours et un quart.

Dans son modèle, il explique les mouvements rétrogrades des planètes de la façon suivante :

Considérons deux sphères S_1 et S_2 telle que l'axe XY de S_1 est un diamètre de S_2 . Lorsque S_2 tourne autour de l'axe AB , alors l'axe XY de S_1 tourne également. Si les deux sphères tournent à une même vitesse angulaire constante mais en sens contraire alors un point P à l'équateur de la sphère S_1 décrit une courbe en forme de huit.

Cette courbe est appelée *hippopède*, ce qui signifie « promenade du cheval »



Eudoxe considère que le point P est une planète. Il ajoute une troisième sphère pour expliquer le mouvement de la planète sur le fond étoilé alors que la trajectoire en forme de huit explique le mouvement rétrograde de la planète.

Ces trois sphères étaient situées dans une quatrième sphère pour tenir compte de la rotation journalière des étoiles. Le système complet, décrit par Aristote dans sa *Métaphysique* contenait 27 sphères dont certaines ont le même diamètre.

Eudoxe semble avoir été surtout intéressé à échafauder une théorie sans tenter de confirmer celle-ci par des prédictions et des observations. Ce système a été adopté par Aristote qui considérait que cette théorie était une description de l'univers physique. Cette caution aristotélicienne a joué un rôle important dans la longévité du système géocentrique.

CONCLUSION

Les travaux d'Eudoxe, tant en mathématiques qu'en astronomie sont remarquables. Il a reconnu que ce n'est pas la commensurabilité qui est le fondement de la théorie des proportions et il a donné des rapports et proportions des définitions qui reconnaissent implicitement l'existence des nombres irrationnels.

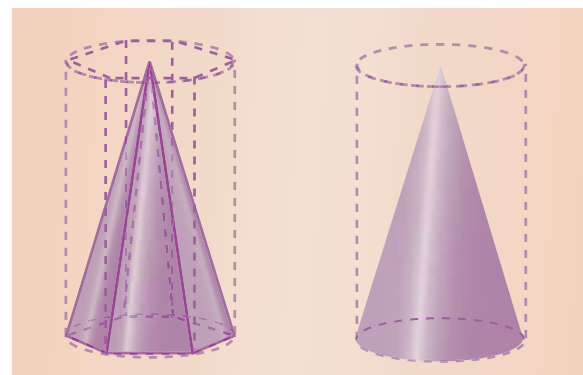
Son modèle de l'univers et en particulier son explication du mouvement rétrograde des planètes est un trait de génie. Il n'est pas évident de s'imaginer la trajectoire en huit du point P sur les sphères comme il l'a fait. Ce modèle était cependant une tentative essentiellement théorique de décrire les mouvements célestes et il ne semble pas avoir tenté de vérifier son exactitude par des prédictions et des observations.

Parmi les contributions importantes d'Eudoxe au développement des mathématiques, il faut citer la méthode d'exhaustion dont il a fait un procédé de démonstration. Il a lui-même utilisé ce procédé de démonstration pour démontrer les résultats sur la relation entre le volume de la pyramide et le volume du prisme de même base et de même hauteur et entre le volume du cône et le volume du

cylindre de même base et de même hauteur. Le fondement de ce procédé qui peut servir aussi bien à calculer une valeur approchée qu'à démontrer un résultat général sera utilisé par Archimède pour le calcul de π et pour démontrer différents résultats sur le calcul d'aires et de volumes.

EXERCICES : EUDOXE

1. Pourquoi Eudoxe devait-il donner un autre fondement à la théorie des proportions que celle imaginée par les pythagoriciens?
2. Pourquoi le postulat d'Antiphon sur l'aire du cercle a-t-il été critiqué? Expliquer.
3. En quoi le postulat d'Eudoxe permet-il de répondre aux objections formulées à l'encontre de celui d'Antiphon?
4. Comment utilise-t-on le théorème 3 pour montrer que le volume d'une pyramide à base polygonale est égal au tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur.
5. Critiquer le raisonnement suivant :
Le volume d'une pyramide à base polygonale régulière est égal au tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur. En doublant successivement le nombre de côtés, le prisme devient un cylindre et la pyramide devient un cône. Puisque le volume de la pyramide est toujours égale au tiers du volume du prisme, on peut conclure que : le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre ayant même base et même hauteur.



MODÈLE GÉOCENTRIQUE DE L'UNIVERS

