

LES PARADOXES DE ZÉNON

PAR : ANDRÉ ROSS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

Le philosophe grec Zénon est né à Élée, une ville du sud de l'Italie, entre 495 et 480 av. J.C.. Tout comme son maître Parménide, il fut probablement pythagoricien avant que, sous la direction de Parménide, ne soit fondée l'École d'Élée, dont les membres sont appelés les Éléates. Zénon a énoncé plusieurs paradoxes dont quatre portent sur le problème de la relation entre le discret et le continu. Ces paradoxes nous sont connus par les écrits d'Aristote, qui cite Zénon pour en faire la critique mais également pour étoffer ses propos sur l'infini. Cependant, le libellé exact des paradoxes, tel que Zénon les avait formulés, ne nous est pas vraiment connu. Dans cet article, nous allons présenter ces paradoxes et tenter de saisir leur influence sur le développement des mathématiques grecques. Pour bien comprendre le contexte dans lequel ces paradoxes ont été construits, il nous faut préalablement décrire les conceptions du temps et de l'espace dans les enseignements des deux principales écoles de l'époque.

LE TEMPS ET L'ESPACE

Pour Pythagore et ses disciples, le temps et l'espace sont constitués de parties indivisibles. Ainsi, un segment de droite est un ensemble de points. Cette représentation ne se limitait pas aux segments de droite. Les surfaces et les volumes sont également constitués de parties indivisibles. En se fondant sur cette représentation, ils considéraient que toutes les grandeurs de même nature sont commensurables (voir l'encadré sur la commensurabilité). On peut donc, entre les longueurs, entre les aires et entre les volumes, déterminer des rapports qui s'expriment par des quotients de nombres entiers. De plus, lorsqu'il existe un rapport simple entre le volume de deux solides, par exemple, il doit également exister un rapport entre les longueurs et les aires des faces de ces solides.

Anaxagore et ses disciples rejetaient cette représentation de l'espace et du temps en parties indivisibles. Ils professaient la divisibilité infinie de la matière, de l'espace et du

temps. Pour eux, l'univers est continu et le continu ne peut être constitué de petits éléments séparés les uns des autres. Le concept de parties indivisibles était analogue à une poignée de sable, sans lien et sans consistance, sans continuité. Cette représentation n'était pas compatible avec la perception qu'ils avaient du temps et de l'espace.

Les paradoxes de Zénon portent sur ces deux représentations du temps et de l'espace. Il cherche à montrer, à l'aide de quatre paradoxes: la dichotomie, Achille et la tortue, la flèche, le stade, qu'aucune de ces conceptions de l'univers n'est conforme à la réalité.

LA DICHOTOMIE

Le paradoxe de la dichotomie est formulé de la façon suivante :

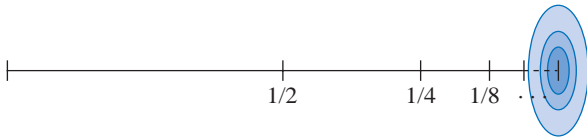
Si un segment de droite est infiniment divisible, alors le mouvement est impossible, car pour parcourir ce segment, il faut d'abord en atteindre le point milieu. Mais, avant d'en atteindre le point milieu, il faut d'abord parcourir le quart de la distance. Avant de parcourir le quart de la distance, il faut en parcourir le huitième et ainsi de suite à l'infini. Il s'ensuit que le mouvement ne peut jamais commencer.

En d'autres mots, si on accepte l'hypothèse de la divisibilité infinie, une longueur finie contient un nombre infini de points. Pour que le mouvement soit possible, c'est-à-dire pour aller d'un point à un autre, il faudrait parcourir un nombre infini de points en un temps fini. Le mouvement est donc impossible.

Pour Aristote, qui cite ce paradoxe dans sa *Physique*, une chose peut être infinie selon la divisibilité ou selon l'étendue. Il explique que dans un temps fini, il est possible de venir en contact avec une chose infiniment divisible car le temps est alors infiniment divisible lui aussi. Dans un temps fini, il est donc possible de parcourir une distance finie.

Ce souci d'Aristote de montrer l'inconsistance du paradoxe s'est perpétué. Plusieurs formulations du paradoxe ont été données pour en faire la critique en utilisant des notions mathématiques plus modernes. C'est le cas de la formulation suivante :

Achille lance un javelot vers une cible. Pour atteindre la cible, le javelot doit d'abord parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la distance restante, et encore la moitié de la distance restante, ainsi de suite. Puisque la longueur est infiniment divisible, il reste toujours une moitié de distance à parcourir et le javelot n'atteint jamais la cible. Le mouvement est donc impossible.



Dans cette deuxième formulation on constate assez facilement que le paradoxe se fonde sur la conviction intuitive que la somme d'un nombre infini de grandeurs positives donne l'infini. Ainsi, la deuxième formulation se fonde sur la conviction intuitive que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2^n}$$

est divergente, ce qui est faux.

L'utilisation inconsidérée de la divisibilité infinie du temps ou de l'espace peut engendrer différents paradoxes. Au lieu de considérer la divisibilité d'une distance comme le fit Zénon, considérons plutôt la divisibilité du temps pour engendrer un paradoxe.

On dispose d'une heure pour nommer les nombres naturels en procédant comme suit : durant la première moitié de l'heure, on nomme le premier nombre naturel. Durant le quart d'heure suivant, on nomme le deuxième. On poursuit l'énumération en divisant chaque fois par 2 l'intervalle de temps restant. Puisqu'il reste toujours un intervalle de temps on peut nommer tous les nombres naturels en une heure.

Que peut-on conclure? Peut-on prétendre qu'il y a un nombre infini de nombres naturels parce qu'il y a un

nombre infini d'intervalles de temps et qu'à chaque intervalle de temps, on associe un nombre naturel? Peut-on prétendre qu'il y a un nombre fini de nombres naturels puisqu'il suffit d'un temps fini pour les énumérer? On est en plein paradoxe.

Si on y regarde de plus près, on constate que l'intervalle de temps, en minutes, dont on dispose pour nommer le nombre 100 est :

$$\frac{60}{2^{100}} = 4,733165431 \times 10^{-29} \text{ minute.}$$

On peut prétendre qu'en suivant la procédure décrite, on disposera toujours d'un intervalle de temps pour nommer un autre nombre naturel. Cependant, pour pouvoir nommer en une heure tous les nombres naturels de cette façon, il faudra assez tôt que l'élocution soit plus rapide que la lumière, il faudra rapidement parler à une vitesse infinie.

ACHILLE ET LA TORTUE

Le deuxième paradoxe portant sur la divisibilité infinie est connu comme le paradoxe d'Achille et la tortue.

Si Achille fait une course avec une tortue à qui on a donné une longueur d'avance, lorsqu'Achille atteint le point de départ de la tortue, celle-ci a, pendant ce temps, parcouru une distance. Pendant qu'Achille va parcourir la distance qui le sépare encore de la tortue, celle-ci s'éloigne à nouveau et elle est encore à une certaine distance d'Achille. Achille aura toujours une distance à parcourir pour rejoindre la tortue, le mouvement est donc impossible.

Dans ce paradoxe de Zénon, si le temps et l'espace sont infiniment divisibles, la somme infinie des distances successives que doit parcourir Achille pour rattraper la tortue, sans égard à ces longueurs, est nécessairement infinie. Achille ne pourra donc jamais la rattraper et le mouvement est impossible.

On peut constater que Zénon construit ce paradoxe en considérant qu'il y aura une infinité d'intervalles de temps. Les distances parcourues durant ces intervalles sont de plus en plus proches de 0. Il fonde son paradoxe sur la conviction intuitive que

$$\infty \times 0 = 0.$$

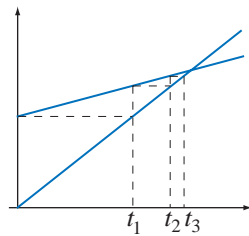
Cependant, $\infty \times 0 = 0$ est une forme indéterminée et on ne peut conclure qu'un tel produit donne 0.

Il existe une formulation qui permet de critiquer ce paradoxe en ayant recours à des représentations modernes. C'est la suivante :

Achille fait la course avec une tortue qui a 100 m d'avance sur lui. Achille court 10 fois plus vite que la tortue. Lorsqu'Achille a parcouru 100 m, la tortue en a parcouru 10. Pendant qu'Achille parcourt cette nouvelle distance, la tortue parcourt 1 m. À chaque fois qu'Achille franchit une distance, la tortue s'éloigne et il reste toujours une distance séparant Achille de la tortue.

En relevant les distances parcourues chaque fois qu'Achille parvient à la position qu'occupait la tortue au relevé précédent, on obtient les valeurs du tableau et le graphique ci-dessous.

Position	Achille	Tortue
1	0	100
2	100	110
3	110	111
4	111	111,1
5	111,1	111,11
⋮	⋮	⋮



On peut décrire les distances parcourues par des modèles affines, ce qui, en notant v la vitesse de la tortue, donne :

$$d_T = vt + 100 \text{ et } d_A = 10vt,$$

où t est le temps, d_T la distance parcourue par la tortue et d_A la distance parcourue par Achille. Ces distances sont égales lorsque

$$10vt = vt + 100,$$

ce qui donne $t = 100/9v$.

Connaissant la vitesse de la tortue, on peut donc calculer le temps nécessaire pour qu'Achille la rattrape. Il suffit alors de quelques notions de géométrie analytique pour faire la critique du paradoxe. On peut même calculer le temps nécessaire pour qu'Achille rejoigne la tortue lorsque la vitesse de celle-ci est connue.

Ces deux premiers paradoxes font appel à deux convictions intuitives erronées. La première est que la somme

d'un nombre infini de quantités positives est infinie, même si chaque quantité est extrêmement petite. En écriture moderne, Zénon considère que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty.$$

Il considère que toutes les sommes de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$ sont divergentes, ce qui est faux.

La deuxième conviction erronée est que la somme infinie de segments de longueur nulle est égale à zéro. En écriture moderne, il considère que

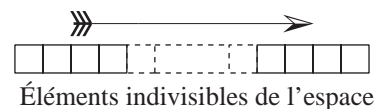
$$\infty \times 0 = 0,$$

ce qui est également faux.

LA FLÈCHE

Les deux premiers paradoxes sont construits en considérant que le temps et l'espace sont infiniment divisibles. Les deux paradoxes suivants sont formulés en prenant comme hypothèse que le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles, conformément aux enseignements des pythagoriciens. Le paradoxe de la flèche s'énonce comme suit :

Si le temps est fait d'instants indivisibles, alors une flèche en mouvement est toujours arrêtée, car à tout instant la flèche est en une position donnée et occupe un espace égal à elle-même. Puisque cela est vrai en tout instant, il s'ensuit que la flèche ne se déplace jamais parce qu'un corps qui occupe toujours le même espace ne se déplace pas.

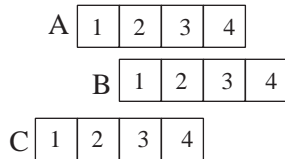


Dans la formulation de ce paradoxe, Zénon se sert du fait que la perception que l'on a du mouvement de la flèche n'est pas saccadé mais continu. Ce qui, selon lui, ne peut être le cas si le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles. Il serait très étonné de voir qu'au cinéma il n'est nul besoin d'une infinité d'images pour créer l'illusion du mouvement.

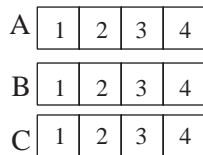
LE STADE

Le quatrième paradoxe est un peu plus complexe à décrire que les trois premiers.

Supposons que le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles. Considérons trois corps A, B et C constitués du même nombre de particules indivisibles. Considérons de plus que A est stationnaire, alors que B se déplace vers la gauche et que C se déplace vers la droite. Puisque le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles, la plus petite vitesse de déplacement est d'une unité d'espace par unité de temps. Supposons que les trois corps sont à un instant donné dans la position ci-dessous.



Après une unité de temps, les corps seront alors dans la position suivante.



On constate que l'élément indivisible B_1 se sera déplacé de deux unités de C. Par conséquent, l'instant considéré ne peut être la plus petite unité de temps. En effet, on peut alors considérer une plus petite unité, soit le temps pour que l'élément indivisible B_1 se déplace de deux unités de C. Si le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles, le mouvement est donc impossible.

Le paradoxe est fondé sur la relativité de la vitesse d'un objet au point d'observation. La vitesse relative de C par rapport à B est différente de la vitesse relative de C par rapport à A. Cependant, en considérant que le temps et l'espace sont constitués d'infimes parties indivisibles, il faut admettre que ces deux vitesses sont égales pour les parties indivisibles. Le mouvement est donc impossible, à

moins de rejeter l'hypothèse qui entraîne cette contradiction. Or, la seule hypothèse considérée est la supposition que le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles.

RÉFUTATIONS D'ARISTOTE

Pour réfuter les arguments de Zénon, Aristote cherche d'abord à expliquer que le continu ne peut être une somme d'indivisibles, c'est-à-dire qu'une ligne ne peut être formée de points et qu'un intervalle de temps ne peut être constitué d'instant. Il base son raisonnement sur le fait qu'un point, comme un instant, n'a pas d'extrémités car une extrémité n'est pas de même nature que ce dont elle est l'extrémité. Ainsi, un point est l'extrémité d'une ligne. Il est donc de nature différente de la ligne. L'instant est l'extrémité d'un intervalle de temps et il en diffère pour la même raison.

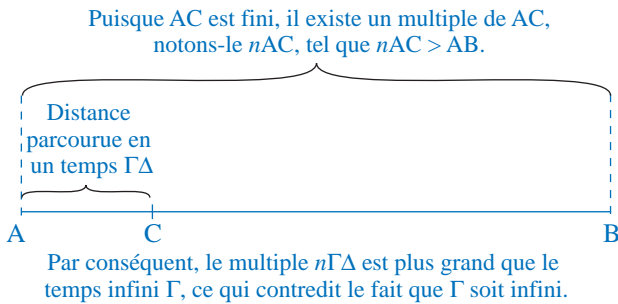
Il appelle continu « ce qui est divisible en parties toujours divisibles ». La ligne est infiniment divisible et l'intervalle de temps est infiniment divisible. Ce sont donc des continus. Le point est l'extrémité d'une ligne et l'instant l'extrémité d'un intervalle de temps. Le point et l'instant ne sont pas divisibles, car ce ne sont pas des grandeurs. En effet, selon lui, la limite est indivisible et la chose limitée est divisible. Pour pouvoir réfuter les paradoxes, Aristote distingue donc le point qui est un indivisible de la ligne qui est un continu. Le point est la limite d'une ligne et la limite est indivisible alors que la chose limitée est un continu infiniment divisible. De la même façon, il distingue l'instant qui est un indivisible de l'intervalle de temps qui est un continu. L'instant est la limite d'un intervalle de temps et de ce fait ne représente pas une durée.

Pour réfuter les deux premiers paradoxes, il construit le paradoxe suivant :

Supposons qu'il faut un temps infini Γ pour parcourir une grandeur rectiligne AB (à vitesse constante). Soit $\Gamma\Delta$ une partie finie du temps Γ et AC, la partie de la grandeur rectiligne parcourue durant ce temps. Puis-

que AC et AB sont finis et que AC est une partie de AB, il existe un multiple de AC qui dépasse AB. Par conséquent le temps Γ serait inférieur au même multiple du temps $\Gamma\Delta$. Le temps Γ serait donc fini. Ce qui est une contradiction.

Ce paradoxe est représenté par le diagramme suivant :



Pour réfuter le paradoxe sur la flèche, Aristote signale que ce paradoxe est une conséquence de la supposition erronée que le temps est composé d'instant. Un instant n'est pas une durée et aucun mouvement ne peut avoir lieu dans l'instant.

Il réfute le dernier paradoxe en signalant que la vitesse relative de deux objets en mouvement est différente de la vitesse relative par rapport à un objet fixe.

ARISTOTE ET L'INFINI

Aristote s'est beaucoup intéressé à l'infini même s'il considérait que c'était un sujet délicat, à cause notamment des paradoxes de Zénon. Il se rendait compte qu'il n'est pas simple de rejeter ou d'accepter l'existence de l'infini. Selon lui, le rejet comme l'acceptation de l'infini est source de paradoxes. Il donne d'ailleurs différentes raisons pour croire à l'existence de l'infini :

- l'infinité du temps;
- la divisibilité infinie des grandeurs mathématiques;
- le fini se bute toujours à quelque chose et il n'y a pas de limite au fini;
- il n'y a pas de limite à ce que la pensée peut concevoir. En particulier, il n'y a pas de limite aux nombres ou aux grandeurs mathématiques.

Aristote est pris dans un dilemme, il ne peut ni rejeter ni accepter l'infini à cause des paradoxes que cela engendre. Pour se sortir de ce dilemme, il va distinguer deux sortes d'infini, l'infini potentiel et l'infini actuel. Pour comprendre cette distinction, présentons quelques exemples.

INFINI POTENTIEL

Pour la plupart des gens, l'infini mathématique est souvent conçu par opposition. On oppose l'infini au fini, au complet, à l'achevé. Ainsi, on conçoit qu'un ensemble fini est un ensemble dont on peut énumérer, ou compter, tous les éléments. Il est alors assez facile de se convaincre que l'ensemble des nombres naturels n'est pas un ensemble fini, car on peut toujours obtenir un nombre naturel plus grand que ceux déjà énumérés en additionnant une unité au dernier nommé. Dans cette conception, l'ensemble des nombres naturels est un ensemble infini parce qu'il n'est pas fini, parce qu'on ne peut compléter l'énumération de ses éléments. On admet que l'ensemble des nombres naturels soit infini parce qu'il ne peut être fini. C'est un *infini potentiel*, un infini en puissance et non en acte, un infini qui n'existe pas dans la réalité, mais qui pourrait exister si le temps ne nous était pas compté.

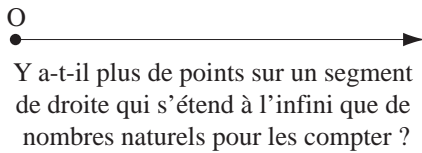
Pour illustrer ce propos, supposons qu'un être humain reçoit, à sa naissance, la mission d'énumérer les éléments de l'ensemble des nombres naturels. Supposons de plus qu'il commence à compter dès la première seconde de sa naissance et qu'il nomme, dans l'ordre, un nombre à chaque seconde de sa vie. Dernière supposition, par un hasard heureux, il vivra cent ans. Le nombre de secondes qui s'écouleront au cours de sa vie est alors le produit des 100 ans de 365 jours (en arrondissant) comportant chacun 24 heures de 60 minutes, chaque minute comptant 60 secondes :

$$100 \text{ ans} \times 365 \text{ jours} \times 24 \text{ heures} \times 60 \text{ minutes} \times 60 \text{ secondes} = 3\,153\,600\,000 \text{ secondes}$$

Trois milliards cent cinquante trois millions six cent milles, c'est le nombre de secondes écoulées mais également le dernier nombre naturel nommé (on remarque qu'il faut

plus d'une seconde pour dire ce nombre). Pour notre héros, et malgré sa mission, l'infini restera un concept, une potentialité. Il peut « concevoir » l'infini, il lui suffit de s'imaginer qu'il confie la poursuite de la mission à ses descendants comme le coureur confie le témoin dans une course à relais, et ainsi de génération en génération. Mais, un de ses descendants pourra-t-il dire un jour : « mission accomplie » ?

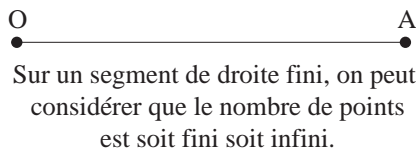
Comme deuxième exemple, considérons maintenant un segment de droite d'origine O qui s'étend sans limite vers la droite.



On peut faire un parallèle avec l'ensemble des nombres et supposer qu'un second héros, dont le pied peut tenir sur un point, a pour mission de parcourir la droite en faisant un pas à chaque seconde. Ce deuxième héros devra, lui aussi, confier à sa descendance la responsabilité de poursuivre la mission et aucun de ses descendants ne pourra dire : « mission accomplie ! » Parcourir cette droite est également un processus sans fin, un infini potentiel. Quelle que soit d'ailleurs la grandeur des pieds du coureur et de ses enjambées. En effet, même si les enjambées sont très grandes, il sera toujours possible de faire un pas de plus.

INFINI ACTUEL

Considérons maintenant le segment de droite fini OA ci-dessous. Le nombre de points de ce segment est-il fini ou infini? La réponse est moins évidente que pour un segment qui s'étend sans limite.



Si le nombre de points est infini, ce segment est un *infini actuel* puisque c'est un ensemble formé d'une infinité de

composantes, les points, et on doit reconnaître l'existence de l'infini autrement que comme potentialité.

Considérer qu'un segment de droite de longueur finie comporte un nombre infini de points, c'est prêter le flanc à la critique, car c'est reconnaître que le fini peut contenir l'infini.

On peut choisir de croire qu'il y a un nombre infini de points, et le segment de droite est alors un *infini actuel*. C'est-à-dire un infini qui existe dans les faits et on nage alors dans les paradoxes, comme Zénon l'a montré.

L'autre option est de croire que le nombre de points est fini. C'est le choix des pythagoriciens, et de cet axiome découlait leur théorie des proportions et du rôle des nombres dans l'univers.

Aristote va chercher à contourner le problème en considérant que le segment de droite est infiniment divisible. Il n'est pas divisé mais divisible. Il peut alors considérer que ce processus de division est un infini potentiel, non un infini actuel. Il évite donc la question de savoir si la droite finie comporte un nombre fini ou un nombre infini de points. De plus, la divisibilité infinie d'une ligne donne toujours des lignes et non des points, comme la division du temps donne toujours des intervalles de temps et non des instants. Pour Aristote, l'infini ne peut exister que comme potentialité. L'infini actuel ne peut exister. La seule conception acceptable de l'infini est celle d'un processus sans fin.

En résumé, l'infini potentiel est un processus, un devenir, comme le processus de la division illimitée d'un segment de droite ou de l'addition successive des nombres naturels. L'infini actuel serait le résultat de la division illimitée d'un segment de droite ou de l'addition successive. Or ce résultat ne peut exister puisqu'il est toujours possible de diviser le petit segment résultant de la division précédente, comme il est toujours possible de poursuivre le processus d'énumération des nombres naturels en additionnant l'unité au dernier nombre obtenu.

Ce rejet de l'infini actuel a eu des répercussions sur la cosmologie d'Aristote. Pour lui, l'univers est fini et constitué de deux régions différentes, chacune de ces régions étant divisée en sphères concentriques. La région la plus externe de l'univers est celle des cieux qui s'étend de la sphère de la lune à la sphère des étoiles fixes. C'est une région supposée immuable et les seuls changements qui s'y produisent sont les mouvements des corps célestes. Cette région est constituée d'un éther incorruptible. C'est le monde supralunaire, il est parfait et les étoiles ainsi que les planètes ne peuvent être que des corps parfaits, en l'occurrence des sphères lisses. La perfection du monde supralunaire implique sa finitude, car l'infini est quelque chose d'inachevé et d'imparfait.

Puisque seul l'infini potentiel existe, l'univers ne peut être infini car il serait en devenir, en changement dans le temps; or il n'y a pas de changement dans le ciel. Pour Aristote, le déplacement des constellations, observé depuis des siècles, suit un cycle immuable qui s'explique par la rotation de la sphère des étoiles, mais il ne s'agit pas d'un changement dans le sens d'une évolution, d'un devenir.

Il considère également que l'univers a existé de tout temps, se démarquant ainsi de Platon qui considérait que l'univers était l'œuvre d'un démiurge. En considérant que l'univers a existé de tout temps, Aristote introduit sans le savoir un paradoxe dans son système. Ce paradoxe qui sera formulé au cours du Moyen-Âge s'énonce comme suit :

Puisque l'univers a existé de tout temps, le nombre de fois que le Soleil et les planètes ont fait le tour de la Terre est infini. Cependant, la rotation du Soleil est plus rapide que celle des planètes. Il existe donc des infinis plus grands que d'autres, ce qui est impossible.

CONCLUSION

Pourquoi Zénon a-t-il formulé ces paradoxes? On sait que les Éléates professaient l'unité et la permanence de l'être. Pour eux, le monde des sens n'est qu'une illusion. On a donc prétendu que Zénon voulait effectivement démontrer que le mouvement, tout comme ce qui nous vient des

sens, est une illusion. Il est cependant douteux que Zénon ait sérieusement pu considérer l'impossibilité du mouvement.

Cependant, on sait également que les enseignements d'Anaxagore et des Pythagoriciens furent contestés par les Éléates. Zénon cherchait peut-être à dénigrer les enseignements des autres écoles. Dans les deux premiers paradoxes, il montre que la divisibilité infinie de l'espace et du temps professée par Anaxagore engendre une absurdité. Dans les deux suivants, il montre que la conception des Pythagoriciens est également erronée car elle entraîne elle aussi une contradiction.

À la suite de ces paradoxes et de la pensée d'Aristote, les mathématiciens et les philosophes grecs ont évité systématiquement l'usage de l'infini à cause des pièges que constitue le recours à des convictions intuitives fondées sur le fini, lorsqu'on traite de l'infini. Il n'était plus possible d'utiliser l'infini dans un raisonnement sans le rendre suspect. Ainsi, Euclide ne considère pas qu'il y a un nombre infini de nombres premiers, il considère qu'il y en a plus que tout nombre prédéterminé. La formulation de paradoxes sera pour plusieurs siècles la seule utilisation de l'infini dans les raisonnements. C'est grâce aux travaux de Bernhard Bolzano (1781-1848), de Karl Weierstrass (1815-1897) et de Georg Cantor (1845-1918) que l'infini redeviendra objet d'études mathématiques, pour acquérir définitivement ses lettres de noblesse par l'arithmétisation de l'analyse.

Les paradoxes de Zénon et la découverte des irrationnels ont amené des changements importants dans les mathématiques grecques. Parmi ceux-ci, signalons la refonte de la théorie des proportions qui fut l'œuvre d'Eudoxe. En effet, une théorie des proportions fondée sur la commensurabilité et la représentation des nombres par des points était devenue indéfendable avec la découverte de Hipposus. La théorie d'Eudoxe, qui sera reprise par Euclide, est assez compliquée car il ne pouvait avoir recours aux nombres réels ni au système décimal de numération. La représentation discrète des nombres par des

cailloux ou des points, chère aux Pythagoriciens, est complètement disparue chez Euclide, pour qui les nombres naturels sont conçus comme des segments de droites. De plus, Zénon a développé une approche dialectique, annonciatrice de celle de Socrate, qui utilisait les prémisses de ses adversaires pour démontrer que celles-ci entraînaient une absurdité. Cette méthode est devenue la méthode de preuve par réduction à l'absurde.

EXERCICES : PARADOXES DE ZÉNON

- Qu'est-ce qui, dans la conception de l'univers des pythagoriciens, a permis à Zénon de construire des paradoxes ? Expliciter.
- Qu'est-ce qui, dans la conception de l'univers d'Anaxagore, a permis à Zénon de construire des paradoxes ? Expliciter
- Zénon se fonde sur la conviction intuitive que la somme d'un nombre infini de termes ne peut donner un nombre fini. Peut-on considérer cette conviction comme une propriété générale ? Expliquer pourquoi et donner deux exemples où ce n'est pas le cas.
- Montrer que dans le paradoxe de la dichotomie, la suite des distances à parcourir forme une progression géométrique. Donner le premier terme et la raison de cette progression.
- Soit une progression géométrique dont le premier terme est a et la raison r . Déterminer une expression algébrique donnant la somme des n premiers termes de cette progression.
- Expliquer comment, et dans quelles conditions, on peut utiliser le résultat du numéro 5 pour déterminer la somme des termes d'une progression géométrique infinie.
- Utiliser le résultat de l'exercice 6 pour montrer que la somme des distances dans le paradoxe de la dichotomie n'est pas infinie.
- Est-ce que le résultat de l'exercice 6 permet de trouver le résultat de la somme suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$
 Justifier.
- Utiliser le résultat des exercices 5 et 6 pour trouver la somme demandée et calculer la somme infinie lorsque celle-ci existe.
 - Les 24 premiers termes de la progression $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$
 - Les 12 premiers termes de la progression $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$
 - Les 6 premiers termes de la progression $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$
- Dans la construction de la connaissance, peut-on simplement faire abstraction de l'infini et dire que ce concept n'existe sous aucune forme ?
- Quelle distinction fait Aristote entre *infini potentiel* et *infini actuel*? Illustrer par des exemples.