DES TRIPLETS PYTHAGORICIENS AU THÉORÈME DE PYTHAGORE

PAR : ANDRÉ ROSS
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

INTRODUCTION

La cohérence est une des exigences fondamentales dans la construction de la connaissance. On ne peut conserver deux théories qui se contredisent, il faut faire un choix. Les pythagoriciens ont été confrontés à un tel choix lorsqu'ils ont constaté que le théorème de Pythagore venait en contradiction avec leur théorie de la commensurabilité. Dans cet article, nous allons voir les origines du théorème ainsi que les recherches et résultats obtenus dans le cadre de la théorie de la commensurabilité. Puis nous verrons comment ces deux composantes de la pensée pythagoricienne se sont révélées incompatibles.

HISTOIRE DU THÉORÈME

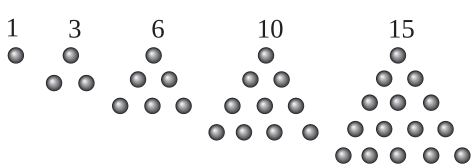
Nous allons relater l'histoire du théorème à partir de la représentation géométrique des nombres chère aux pythagoriciens.

GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

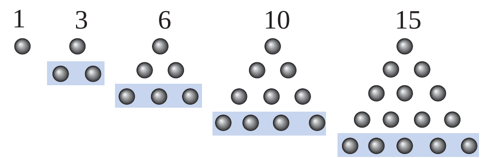
Les pythagoriciens ont développé une classification des nombres basée sur leur configuration géométrique lorsque les nombres sont représentés par des points.

Nombres triangulaires

Un *nombre triangulaire* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un triangle. Les cinq premiers nombres triangulaires sont représentés dans l'illustration suivante.



On remarque que chaque nombre correspond à une somme d'entiers. On peut construire la suite des nombres triangulaire par l'ajout de bandes comme dans l'illustration suivante :

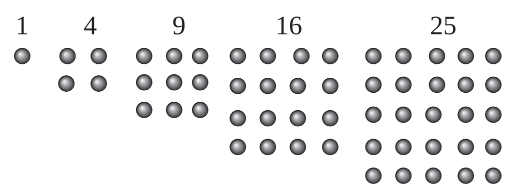


L'ajout d'une ligne extérieure signifie l'ajout d'un nombre entier de points. On voit facilement que le nombre triangulaire de rang n est la somme des entiers jusqu'à n :

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Nombres carrés

Un *nombre carré* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un carré. Les cinq premiers nombres carrés sont représentés dans l'illustration suivante.

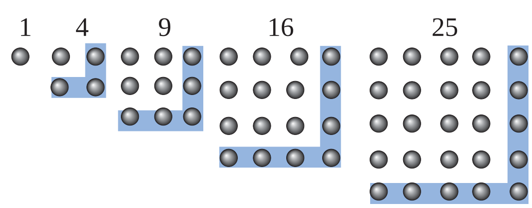


On visualise facilement que :

Le nombre carré *de rang n est* :

$$C_n = n^2.$$

Tout comme pour les nombres triangulaires, la construction géométrique de la suite des nombres carrés se fait en ajoutant des bandes comme dans l'illustration suivante.



L'illustration précédente permet d'énoncer, en écriture moderne, la proposition suivante :

Le nombre carré de rang n *est la somme des* n *premiers nombres impairs. Soit* :

$$C_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Les bandes que l'on ajoute pour construire la représentation par points des nombres d'une même forme sont appelées *gnomons*. Utilisé à l'origine en astronomie, le terme *gnomon* désignait l'assemblage formé d'une tige fixée perpendiculairement à un plan et servant de cadran solaire. Ce terme a ensuite été utilisé en géométrie pour désigner une équerre, puis dans la représentation géométrique des nombres. Dans la suite des nombres carrés, les points ajoutés forment une équerre qui est le gnomon de la figure ou du nombre. Héron d'Alexandrie (vers 75 à 150 ap. J.C.) donne du gnomon la définition suivante :

Gnomon

Un *gnomon* est la chose qui ajoutée à quelque chose d'autre, figure ou nombre, forme un tout semblable à la chose à laquelle elle a été ajoutée.

TRIPLETS PYTHAGORICIENS

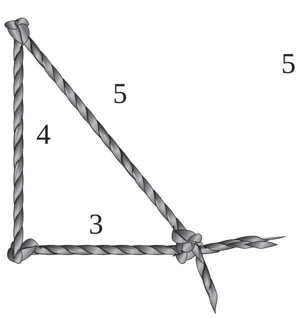
Durant ses voyages, Pythagore avait appris la propriété suivante :

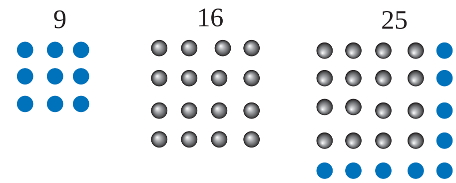
Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3, 4 et 5 sont rectangles.

Il semble que les égyptiens savaient que l'on peut former un angle droit à l'aide d'une corde sur laquelle des nœuds marquent les longueurs 3, 4 et 5. Il suffit de disposer la corde pour former un triangle dont les noeuds seront les sommets. Cette propriété était connue également des babyloniens comme en témoigne la tablette d'argile appelée Plimpton 322.

RELATION DE PYTHAGORE

Les pythagoriciens, habitués à la représentation ponctuelle des nombres, pouvaient facilement détecter des relations intéressantes du carré de ces nombres. Par exemple, le carré du plus petit de ces nombres est le gnomon du carré du second pour donner le carré du plus grand des trois.



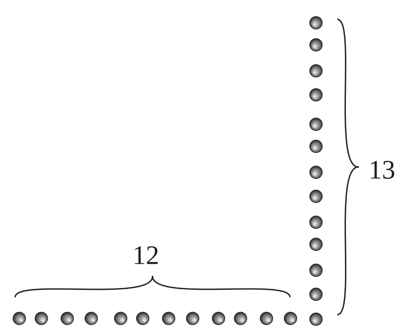


Ce qui, en écriture moderne, donne :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

C'est-à-dire que 9 est le gnomon de 16 et, en lui ajoutant ce gnomon, on obtient le nombre carré 25. Les pythagoriciens ont tout naturellement cherché à connaître tous les nombres carrés décomposables en une somme de deux carrés.

Le gnomon d'un nombre carré est toujours un nombre impair, et le nombre carré impair suivant est 25. On peut donc le disposer pour former le gnomon d'un autre nombre carré. On obtient la configuration suivante :



Le gnomon est 25, soit 5^2 et la représentation par des points de ce nombre permet de trouver un autre triplet, soit :

$$12^2 + 5^2 = 13^2$$

On peut généraliser facilement cette approche en écriture moderne. Les pythagoriciens avaient déjà montré, en utilisant la notion de gnomon, que tout nombre carré n^2 est la somme du nombre carré $(n-1)^2$ et du gnomon $(2n-1)$, soit :

$$n^2 = (n-1)^2 + (2n-1),$$

Il leur suffisait donc de déterminer les nombres impairs qui sont des carrés. C'est-à-dire les nombres m tels que :

$$m^2 = (2n - 1).$$

Connaissant un nombre impair qui est un carré, il est alors facile de trouver les trois nombres du triplet. Par exemple, 49 est un nombre impair carré et, en posant :

$$m^2 = (2n - 1) = 49,$$

on trouve $m = 7$, $n = 25$ et $n - 1 = 24$. Ces trois nombres satisfont à la relation :

$$25^2 = 24^2 + 7^2.$$

De façon générale, si m^2 est un nombre impair, alors $m^2 = (2n - 1)$ et on a :

$$n = \frac{m^2+1}{2}$$

En posant :

$$(2n - 1) = m^2 \text{ et } \quad n = \frac{m^2+1}{2}$$

dans l'expression :

$$n^2 = (n - 1)^2 + (2n - 1),$$

on obtient :

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2} - 1\right)^2 + m^2$$

d'où :

Relation de Pythagore

Si m est un nombre entier impair plus grand ou égal à 3, alors

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + m^2$$

est un triplet pythagoricien

Déterminons quelques triplets à l'aide de cette expression. En posant $m = 3$, on obtient :

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

En posant $m = 5$, on obtient :

$$13^2 = 12^2 + 5^2.$$

En posant $m = 7$, on obtient :

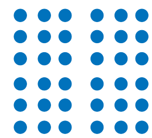
$$25^2 = 24^2 + 7^2.$$

En posant $m = 9$, on obtient :

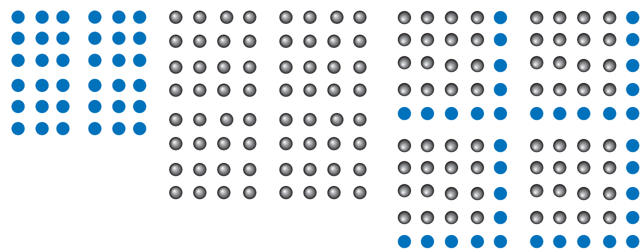
$$41^2 = 40^2 + 9^2.$$

RELATION DE PLATON

L'inconvénient de cette généralisation, c'est que m doit être un nombre impair plus grand ou égal à 3. On échappe probablement plusieurs triplets car en prenant quatre fois un même nombre carré, on forme un autre nombre carré.



En faisant la même chose avec les trois nombres d'un triplet pythagoricien, on obtient alors un autre triplet. C'est ce qu'illustre la figure suivante.



Cette démarche graphique se traduit symboliquement en multipliant par 4 les deux membres de l'équation :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Ce qui donne :

$$4\times3^2 + 4\times4^2 = 4\times5^2$$
$$2^2\times3^2 + 2^2\times4^2 = 2^2\times5^2$$
$$(2\times3)^2 + (2\times4)^2 = (2\times5)^2$$
$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

On obtient ainsi un triplet qui nous échappait par la première méthode. Généralisons en multipliant par 4 les deux membres de la relation de Pythagore, soit :

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2} - 1\right)^2 + m^2$$

on obtient :

$$4\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + 4m^2$$

d'où :

Relation de Platon

Si $m \geq 2$ est un nombre entier, alors

$$(m^2 + 1)^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2$$

est un triplet pythagoricien.

Déterminons quelques triplets à l'aide de cette relation. En posant $m = 2$, on obtient :

$$5^2 = 3^2 + 4^2.$$

En posant $m = 3$, on obtient :

$$10^2 = 8^2 + 6^2.$$

En posant $m = 4$, on obtient :

$$17^2 = 15^2 + 8^2.$$

Il est donc facile, en utilisant cette formule, de déterminer plusieurs autres triplets pythagoriciens.

RELATION D'EUCLIDE

Dans le premier lemme de la proposition 29 du Livre X, Euclide s'intéresse lui aussi aux triplets pythagoriciens. Ce lemme, qui explique comment procéder pour trouver des triplets, s'énonce comme suit :

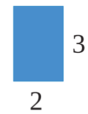
Lemme 1, proposition 29, Livre X

Trouver deux nombres carrés de manière que leur somme soit un carré.

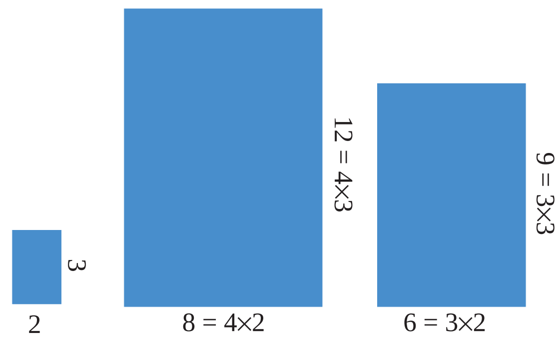
La démonstration du lemme consiste à décrire comment trouver de tels nombres. Nous allons d'abord illustrer la démarche en considérant des nombres particuliers, puis nous considérerons le cas général. Euclide indique, en justifiant chaque étape par une proposition préalablement démontrée, qu'il faut :

Choisir deux nombres plans semblables qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Leur différence est alors un nombre pair, le diviser par 2. Puisqu'ils sont semblables, leur produit est un carré et celui-ci additionné au carré de la moitié de leur différence donne un carré.

Un *nombre plan*, pour les grecs, est un produit de deux nombres. Ainsi, 6 est un nombre plan.



Des nombres plans sont *semblables* si leurs côtés sont proportionnels. Ainsi, les nombres 54 et 96 sont des nombres plans semblables et ils sont tous deux pairs.

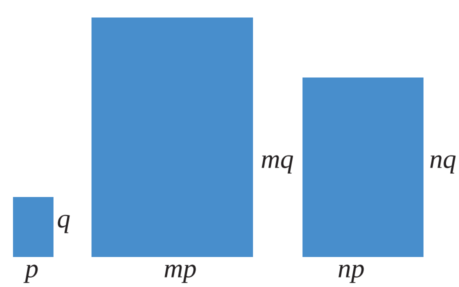


La différence de ces nombres est 42, la moitié de celle-ci est 21 et son carré est 441.
Le produit des deux nombres est $54 \times 96 = 5184 = 72^2$. La somme de ces carrés est $5184 + 441 = 5625 = 75^2$. On obtient donc le triplet pythagoricien :

$$72^2 + 21^2 = 75^2$$

Un cas particulier ne permet pas de comprendre pourquoi cela fonctionne ni pourquoi cela fonctionnera toujours. Essayons donc d'y voir plus clair en utilisant une écriture symbolique.

Soit $a = m^2pq$ et $b = n^2pq$, deux nombres plans semblables et de même parité, tels que $a > b$ (ou $m > n$).



On voit facilement que le produit de ces nombres est un carré puisque :

$$m^2pq \times n^2pq = m^2n^2p^2q^2$$

Puisqu'ils ont même parité, leur différence est un nombre pair et le carré de la moitié de leur différence est alors :

$$\left(\frac{m^2pq - n^2pq}{2}\right)^2$$

La somme de ces deux carrés donne alors :

$$m^2n^2p^2q^2 + \left(\frac{m^2pq - n^2pq}{2}\right)^2$$

$$= m^2n^2p^2q^2 + \frac{p^2q^2}{4}(m^2 - n^2)^2$$

$$= \frac{p^2q^2}{4}\left[4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2\right]$$

$$= \frac{p^2q^2}{4}\left[4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4\right]$$

$$= \frac{p^2q^2}{4}\left[m^4 + 2m^2n^2 + n^4\right]$$

$$= \frac{p^2q^2}{4}(m^2 + n^2)^2$$

On obtient donc :

$$m^2n^2p^2q^2 + \left(\frac{m^2pq - n^2pq}{2}\right)^2 = \frac{p^2q^2}{4}(m^2 + n^2)^2$$

Par conséquent, on obtiendra toujours un carré en prenant au départ deux nombres plans semblables et de même parité où $a > b$. En simplifiant par p^2q^2 et en multipliant par 4, on obtient :

Relation d'Euclide

Soit $m > n$ des nombres entiers, alors

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

forme un triplet pythagoricien.

On remarque que p et q sont absents de cette formulation finale. Il suffit donc de prendre deux entiers positifs tels que $m > n$ pour déterminer un triplet pythagoricien.

En posant $n = 1$ dans la relation d'Euclide, on obtient la relation de Platon :

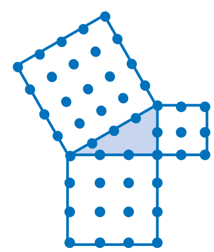
$$(m^2 + 1)^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2$$

Et, en divisant celle de Platon par 4, on a la relation de Pythagore :

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2.$$

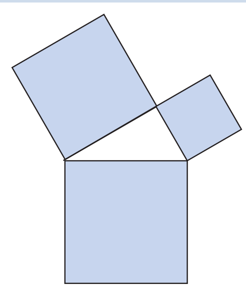
THÉORÈME DE PYTHAGORE

Pour les pythagoriciens, les produits de nombres représentaient des aires de rectangles et les nombres carrés représentaient des aires de carrés. La relation entre les carrés des nombres était donc la manifestation d'une relation entre les aires des carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle. Cette propriété nous est connue sous l'appellation *Théorème de Pythagore*.

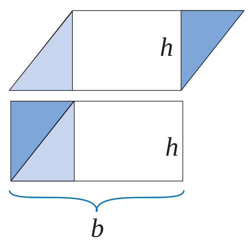


Théorème de Pythagore

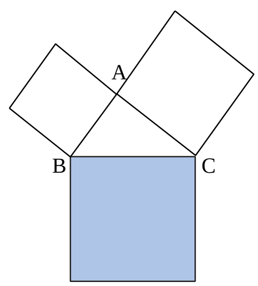
L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.



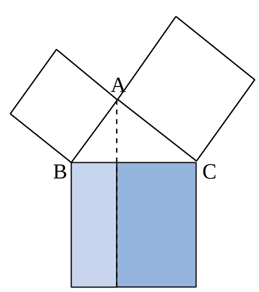
Si les pythagoriciens disposaient d'une démonstration générale de ce théorème, elle était probablement basée sur le fait que l'aire d'un parallélogramme est égal à l'aire du rectangle ayant même base et même hauteur. Dans les deux cas, l'aire est le produit de la base par la hauteur comme l'illustre la figure suivante.



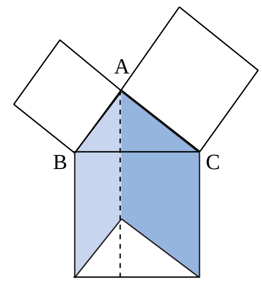
Voyons comment on peut utiliser cette propriété pour démontrer le théorème de Pythagore. Considérons un triangle ABC, rectangle en A, et les carrés construits sur les côtés du triangle.



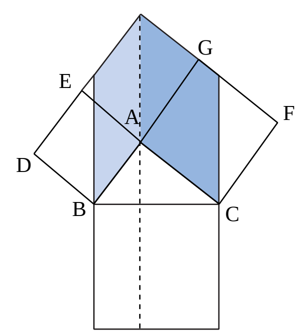
Du sommet A du triangle, abaissons une perpendiculaire à l'hypoténuse et prolongeons cette perpendiculaire jusqu'à sa rencontre avec le côté opposé du carré construit sur l'hypoténuse. La perpendiculaire abaissée divise le carré construit sur l'hypoténuse en deux rectangles.



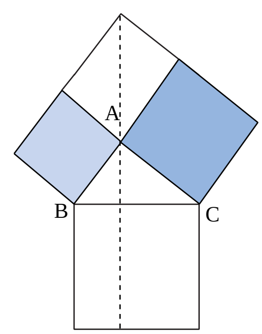
Ceux-ci ont même aire que les parallélogrammes dont les côtés sont parallèles aux côtés de l'angle droit du triangle rectangle. On peut déplacer ces parallélogrammes par translation pour faire coïncider leur côté avec ceux du triangle, l'aire demeure constante.



Glissons ces parallélogrammes comme dans la figure suivante. On constate que le parallélogramme de base AB a le segment AE comme hauteur. Son aire est donc égale à celle du carré ABDE. De plus, le parallélogramme de base AC a le segment AG comme hauteur. Son aire est donc égale à celle du carré ACFG. L'aire de chaque parallélogramme est donc égale à l'aire d'un carré construit sur les côtés de l'angle droit.

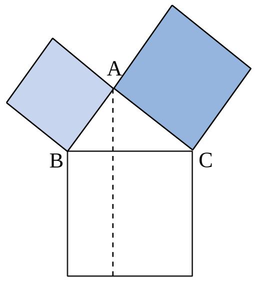


Par conséquent, la somme des aires des parallélogrammes est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. De plus, par construction, la somme des aires des parallélogrammes est égale à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse.



Puisque deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles, on peut conclure que :

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.



RELATION D'EUCLIDE ET SUITES DE FIBONACCI

Puisqu'il suffit de prendre deux nombres entiers m et n tels que $m > n$, on peut considérer deux nombres consécutifs d'une suite de Fibonacci (1170-1250). Rappelons que la suite originale est obtenue comme solution d'un problème de croissance de lapins à partir d'un couple initial de lapins naissants qui ne sont aptes à se reproduire qu'après deux mois d'existence. Cette suite est :

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$$

Pour obtenir tous les termes de la suite, il suffit d'en connaître les deux premiers termes puisqu'à partir du troisième, chaque terme est la somme des deux précédents, soit $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Ainsi, sachant que $a_1 = 1$ et $a_2 = 1$, on a :

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

ainsi de suite.

À la fin du XIX^e^ siècle on a donné à cette suite le nom de Fibonacci et on a étudié les suites plus générales dont les premiers termes sont différents de 1. On a alors les suites de la forme :

$$\{a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, ...\}$$

Considérons quatre nombres consécutifs quelconques d'une suite de Fibonacci. On peut, sans perte de généralité, noter ces nombres :

$$a,\ b,\ a + b \text{ et } a + 2b$$

Nous allons déterminer un triplet pythagoricien en prenant le deuxième et le troisième nombres de cette suite. En posant $m = a + b$ et $n = b$, on a alors :

$$mn = (a + b)b = ab + b^2$$

d'où $2mn = 2ab + 2b^2$. De plus,

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= (a + b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 \\ &= a(a + 2b) \\ m^2 + n^2 &= (a + b)^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 \\ &= a^2 + ab + ab + 2b^2 \\ &= a(a + b) + b(a + 2b) \end{aligned}$$

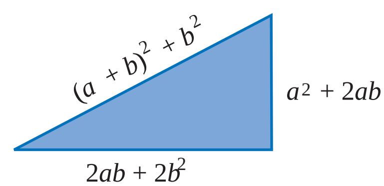
Dans le triplet pythagoricien obtenu, le nombre $2mn$ est le double du produit du deuxième et du troisième nombres de la suite. Le nombre $m^2 - n^2$ est le produit du premier et du quatrième et le nombre $m^2 + n^2$ est la somme du produit du premier et du troisième avec le produit du deuxième et du quatrième.

Considérons un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont les valeurs obtenues, soit :

$$2mn = 2ab + 2b^2,\ m^2 - n^2 = a^2 + 2ab$$

et l'hypoténuse est

$$m^2 + n^2 = (a + b)^2 + b^2$$



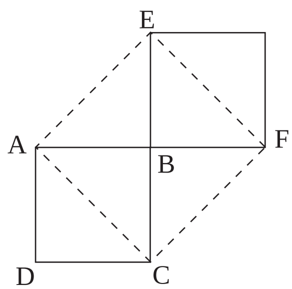
En déterminant l'aire de ce triangle, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab) \\ &= (ab + b^2)(a^2 + 2ab) \\ &= ab(a + b)(a + 2b) \end{aligned}$$

L'aire du triangle est donc le produit des quatre nombres consécutifs de la suite de Fibonacci.

NOMBRES IRRATIONNELS

Dans leurs recherches pour déterminer le rapport de la diagonale du carré et de son côté, les pythagoriciens ont connu une conclusion qui a sapé les fondements de leur conception de l'univers. En effet, ce qu'ils ont découvert c'est qu'il est impossible d'exprimer le rapport de la diagonale et du côté du carré comme quotient de nombres entiers. Cette découverte serait l'œuvre du pythagoricien Hippasus de Métaponte vers 430 av. J-C. La découverte d'Hippasus se fonde sur un résultat hérité des Égyptiens qui avaient démontré, à l'aide de la figure suivante, que l'aire du carré construit sur la diagonale d'un carré est le double de l'aire du premier carré.



En effet, l'aire du carré ABCD est égale à deux fois l'aire du triangle ABC et l'aire du carré AEFC est égale à quatre fois l'aire du triangle ABC. Hippasus a tiré profit de ce résultat de la façon suivante :

En supposant que la diagonale et le côté sont commensurables, leurs longueurs s'expriment par des nombres entiers dans l'unité de la plus grande commune mesure des deux segments. Les entiers mesurant la diagonale et le côté sont donc les plus petits possibles, c'est-à-dire que ces nombres n'ont pas de facteur commun.

Puisque l'aire du carré AEFC *est le double de l'aire du carré* ABCD, *l'aire du carré* AEFC *est donnée par un nombre pair* (ce qui signifie pour Hippasus qu'il comporte un nombre pair de points mais cela n'est pas indispensable ici). *Cependant, le carré d'un nombre impair ne peut jamais donner un nombre pair. La longueur de la diagonale est donc donnée par un nombre pair. Puisque le carré d'un nombre pair est divisible par 4, l'aire du carré* AEFC *est divisible par 4. Cette aire étant le double de celle du carré* ABCD, *l'aire du carré* ABCD *est également donnée par un nombre pair. Par conséquent, la longueur du côté du carré* ABCD *est également donnée par un nombre pair. La diagonale et le côté du carré ont donc un facteur commun. Cela contredit le fait que les nombres n'ont pas de facteur commun.*

Cette contradiction vient de l'hypothèse selon laquelle la diagonale et le côté du carré ont une commune mesure. Il faut donc rejeter cette hypothèse. La diagonale et le côté du carré sont donc incommensurables.

La découverte de l'impossibilité d'exprimer le rapport de la diagonale et du côté du carré par un rapport de nombres entiers sapait les fondements de la philosophie pythagoricienne.

CONCLUSION

L'étude des rapports et proportions entreprise par les pythagoriciens s'est révélée pleine de surprises. Ils ont démontré plusieurs propriétés des figures géométriques mais, ils ont également découvert qu'il est impossible d'exprimer le rapport de la diagonale et du côté du carré comme rapport de deux nombres entiers. Tant qu'ils n'avaient pas réussi à déterminer un tel rapport, il pouvaient garder espoir. Si on ne réussit pas à exprimer le rapport de deux longueurs comme quotient de deux entiers on ne peut pas pour autant conclure que ce rapport est impossible. Pour tirer une telle conclusion, il faut démontrer que cela est effectivement impossible, ce qui est beaucoup plus exigeant. C'est ce que Hippasus a fait pour le rapport de la diagonale du carré à son côté. Cette découverte a porté un dur coup aux pythagoriciens, car elle détruisait le fondement de leur conception de l'univers. Il n'était plus possible d'accepter à la fois le théorème de Pythagore, la constitution en particules de la matière et du temps et la commensurabilité qui en découlait. Seul le théorème de Pythagore avait été démontré déductivement. La conception d'un univers constitué de particule finies et la commensurabilité ont été abandonnées.

La théorie des proportions qui ne pouvait plus se fonder sur la commensurabilité a été formulée autrement par Eudoxe de Cnide (408 à 355 av. J-C) qui fut élève de Platon (vers 427-348 av. J-C.) et du pythagoricien Archytas de Tarente (vers 430 av. J-C.). Les travaux d'Eudoxe ont été repris et complétés par Euclide avec qui la théorie des proportions se dégage complètement du postulat de la commensurabilité. Ce postulat a cependant permis de développer un impressionnant corpus de connaissances qui a été préservé en utilisant d'autres fondements.

EXERCICES : PYTHAGORE 03

1. En utilisant l'expression

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2$$

où m est un nombre impair plus grand ou égal à 3, construire un tableau donnant 5 triplets pythagoriciens.

2. *a*) À partir de la formule du numéro précédent, montrer que l'expression :

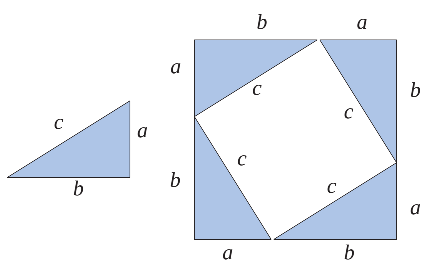
$$(m^2 + 1)^2 = (m^2 – 1)^2 + (2m)^2$$

permet de déterminer les triplets pythagoriciens pour $m \geq 2$, (où m peut être pair ou impair).

b) À l'aide de cette formule, construire un tableau donnant 10 triplets pythagoriciens.

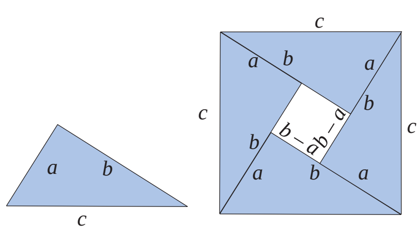
3. À partir de la figure donnée, montrer que :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



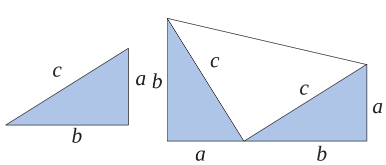
4. À partir de la figure donnée, montrer que :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



5. À partir de la figure donnée, montrer que :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



6. En quoi la découverte des irrationnels a-t-elle porté un dur coup aux pythagoriciens?