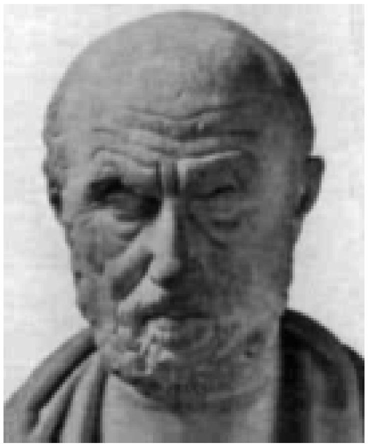
HIPPOCRATE DE CHIO

Par André Ross
professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon



Hippocrate de Chio, qu'il ne faut pas confondre avec le médecin Hippocrate de Cos, est né vers 450 av. J.-C. et on ignore la date de son décès. Il a quitté son île vers 430 pour se rendre à Athènes. Il était armateur et c'est pour récupérer un navire saisi par la douane qu'il se serait rendu à Athènes. Durant son séjour, il a rencontré des philosophes et des mathématiciens et il s'est alors intéressé aux mathématiques et plus particulièrement au problème de la quadrature du cercle qui consiste à construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle donné. Signalons que, selon Platon, pour résoudre ce problème, il ne fallait utiliser qu'une règle et un compas. Quelques mathématiciens, comme Eudoxe, ont utilisé d'autres approches mais ont été critiqués par Platon.

En cherchant à résoudre ce problème, Hippocrate a déterminé les aires des lunules (ou croissants de lune) qui portent son nom. Il fut ainsi le premier mathématicien à calculer une aire délimitée par des courbes. Il fut également un des premiers à compiler un livre des *Éléments*, c'est-à-dire à organiser l'ensemble des connaissances géométriques sur un même fondement axiomatique.

LES LUNULES D'HIPPOCRATE

Une lunule est une figure plane délimitée par deux arcs de cercle de rayons inégaux. Hippocrate a construit différentes lunules et il a étudié l'aire de celles-ci à partir du théorème suivant :

Théorème

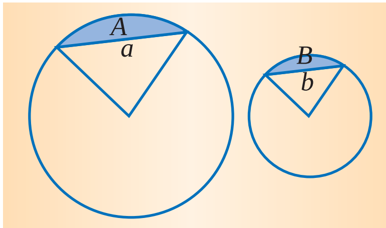
Les aires de figures semblables sont dans le même rapport que le carré de leurs lignes homologues.

Ce théorème est valide pour toutes les formes de figures, en particulier pour les segments circulaires et les lunules. Ainsi :

Théorème

Les aires de segments circulaires semblables sont dans le même rapport que le carré de leurs bases.

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2}$$

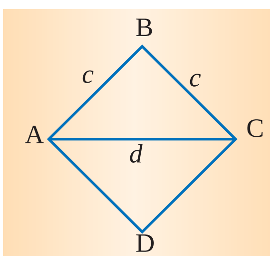


Les aires des segments circulaires semblables sont dans le rapport des carrés de leurs bases, soit le carré de la longueur des cordes *a* et *b*. Les segments circulaires semblables (aires ombrées) sont sous-tendus par des angles au centre égaux.

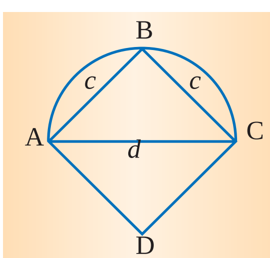
LUNULES DU CARRÉ

Nous allons voir comment Hippocrate a pu établir la relation entre l'aire de la lunule construite sur la diagonale d'un carré et le côté de ce carré.

Considérons un carré ABCD de côté *c* et de diagonale *d*.



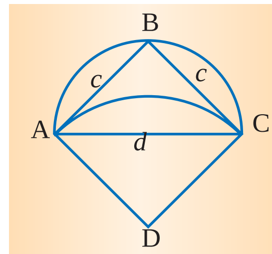
En prenant la diagonale AC comme diamètre, on trace un demi-cercle.



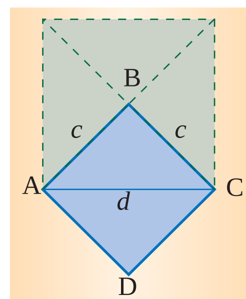
On a alors, par construction, deux segments circulaires $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$ dont les cordes AB et BC sont égales et les segments circulaires construits sur ces cordes ont la même aire. Symboliquement :

$$\frac{A_{\widehat{AB}}}{A_{\widehat{BC}}} = \frac{c^2}{c^2} = 1, \text{ d'où } A_{\widehat{AB}} = A_{\widehat{BC}}$$

En prenant le sommet D comme centre, traçons l'arc AC, construisant ainsi un autre segment circulaire $\widehat{AC}$ dont l'angle au centre est également de 45°. Il est donc semblable aux deux autres.



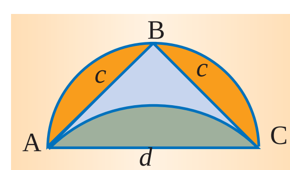
Puisque les segments circulaires sont semblables, le rapport des aires est égal au carré du rapport des bases. Le rapport est égal à 1/2 puisque AB est le côté du carré et AC en est la diagonale. C'est ce qu'illustre la figure suivante :



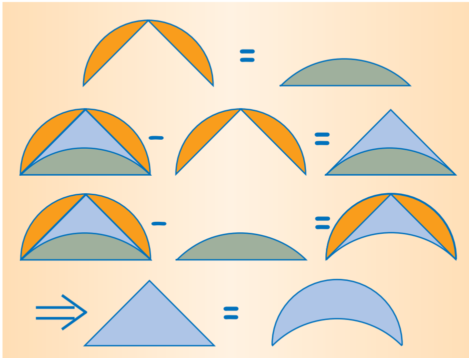
Cela signifie que l'aire du segment AC est le double de l'aire du segment AB. Puisque l'aire du segment AB est égale à l'aire du segment BC, il s'ensuit que l'aire du segment AC est égale à la somme des aires des segments AB et BC. Symboliquement, on a :

$$\frac{A_{\widehat{AB}}}{A_{\widehat{AC}}} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{1}{2}, \text{ d'où } A_{\widehat{AB}} = \frac{1}{2} A_{\widehat{AC}}$$

et : $A_{\widehat{AC}} = A_{\widehat{AB}} + A_{\widehat{BC}}$



De plus, en retranchant de cette figure les segments $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$, il reste l'aire du triangle ABC et en retranchant le segment $\widehat{AC}$ il reste l'aire de la lunule.



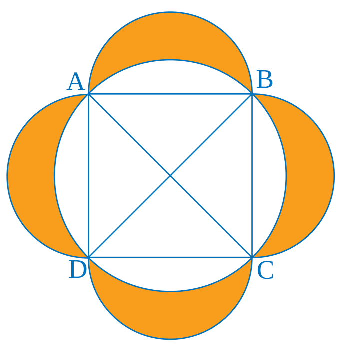
L'aire de la lunule est donc égale à l'aire du triangle et l'aire de la lunule est $c^2/2$ ou $d^2/4$.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Théorème

L'aire de la lunule construite sur la diagonale d'un carré est égale à la moitié de l'aire du carré (ou au quart de l'aire du carré construit sur la diagonale).

En construisant des lunules sur chacun des côtés du carré, on obtient que la somme de aires des quatre lunules est égale à l'aire du carré.



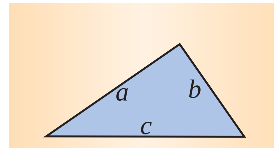
Théorème

La somme des aires des quatre lunules construites sur les côtés d'un carré est égale à l'aire du carré.

LUNULES D'UN TRIANGLE RECTANGLE

Établissons maintenant la relation entre la somme des aires des lunule construites sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et ces côtés.

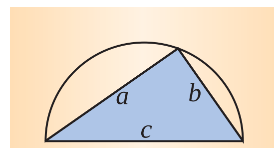
Considérons un triangle rectangle dont les côtés sont de longueurs a, b et c.



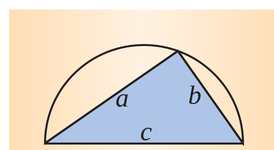
Par le théorème de Pythagore, et en écriture moderne, on a :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

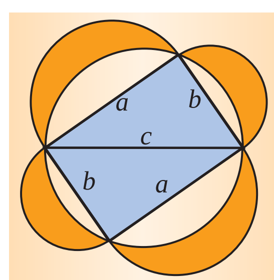
Traçons un demi-cercle en prenant l'hypoténuse c comme diamètre.



Puis traçons deux autres demi-cercles en prenant les côtés a et b de l'angle droit comme diamètres. On forme ainsi deux lunules.



Pour déterminer la somme des aires de ces lunules, reproduisons la figure ci-dessus en faisant une copie avec une rotation de 180°. On a alors la figure suivante :



On constate qu'il est possible de trouver le double de la somme des aires des lunules ($2\ \Sigma A_{\text{lunules}}$) en faisant la somme des aires des demi-cercles construits sur les côtés de l'angle droit et en retranchant de celle-ci la somme des segments circulaires construits sur les mêmes côtés. Cette somme des segments circulaires est obtenue en soustrayant l'aire du rectangle de côtés a

et b de l'aire du cercle construit sur l'hypoténuse c. Symboliquement, et en écriture moderne, on a :

$$\begin{aligned}2\,\Sigma A_{\text{lunules}} &= \pi a^2/4 + \pi b^2/4 - (\pi c^2/4 - ab)\\ &= \pi a^2/4 + \pi b^2/4 - \pi c^2/4 + ab\\ &= \pi(a^2 + b^2 - c^2)/4 + ab, \text{ par distributivité;}\\ &= \pi(0) + ab, \text{ car } a^2 + b^2 = c^2 \text{ par Pythagore;}\\ &= ab.\end{aligned}$$

On trouve donc que $\Sigma A_{\text{lunules}} = ab/2$.

Théorème

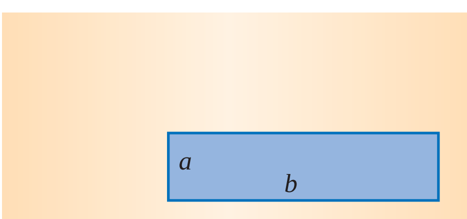
La somme des aires des lunules construites sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égale au demi-produit de la longueur de ces côtés.

DUPLICATION DU CUBE

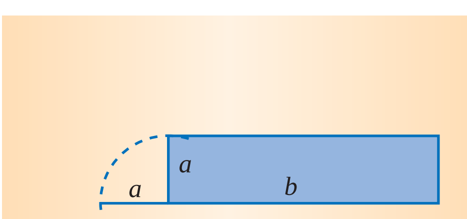
Hippocrate s'est également intéressé au problème de la « duplication du cube ». Ce problème consistait à construire, à la règle et au compas, un cube dont le volume soit le double du volume d'un cube donné.

En cherchant une solution à ce problème, Hippocrate a voulu généraliser la démarche consistant à construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle donné. Rappelons cette procédure :

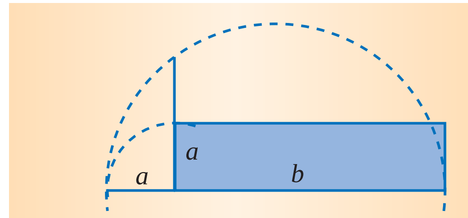
Considérons un rectangle de côtés a et b.



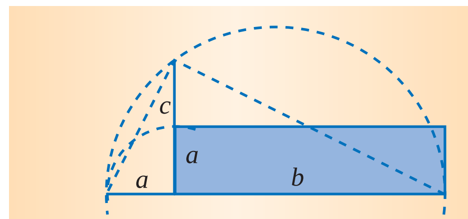
À l'aide du compas, reportons les longueurs des deux segments bout à bout sur une même droite.



Traçons le demi-cercle dont le diamètre est de longueur $a + b$.



Élevons la perpendiculaire au point de jonction des segments de longueurs a et b.



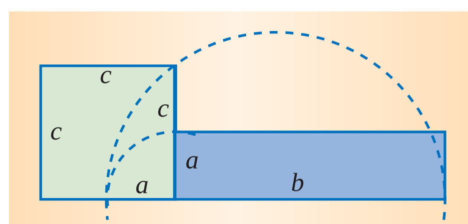
Puisque tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle et que dans un triangle rectangle la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, on a :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

d'où l'on obtient :

$$c^2 = ab$$

C'et donc dire que c est la longueur du carré dont l'aire est égale à celle du rectangle de côtés a et b.



Algébriquement, la construction du carré revient à trouver x tel que :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

En voulant généraliser cette démarche pour la contruction d'un volume double, Hippocrate a ramené le problème à la recherche de segments x et y tels que :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

La contrainte étant $b = 2a$, il a pu obtenir un problème équivalent à :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Les deux premiers rapports donnent alors :

$$y = \frac{x^2}{a}$$

Les premier et le troisième rapport donnent :

$$2a^2 = xy$$

et, par substitution, on obtient :

$$2a^3 = x^3$$

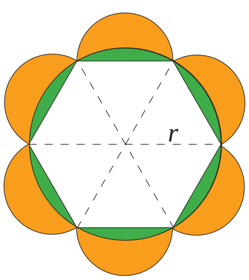
qui est la relation algébrique exrimant la duplication du cube. Il fut incapable de résoudre cette proportion.

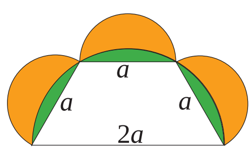
CONCLUSION

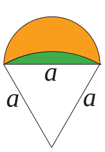
Hippocrate est le premier à avoir déterminé l'aire de figures géométriques délimitées par des courbes. Ces courbes étaient des arcs de cercle, mais dans ses démarches, il a fait preuve de créativité et d'une bonne connaissance de la géométrie. Des développements plus importants sur le calcul d'aires seront réalisés avec la méthode d'exhaustion.

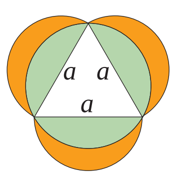
EXERCICES

Établir la relation entre la somme des aires des lunules et les côtés des figures porteuses dans les cas suivants :

a)


b)


c)


d)


BIBLIOGRAPHIE

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc.,1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Caratini, Roger, *Les Mathématiques*, Paris, Bordas, 1985.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Cuomo, S. *Ancient Mathematics, London and New York, Routledge, Taylor and Francis Group, 2001, 290 p.*

Davis, Philip J, Hersh, Reuben, Marchisotto, Elena Anne. *The Mathematical Experience*, Study edition, Boston, Birkhäuser, 1995, 485 p.

Dhombres, Jean, *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. Publications de l'Irem de Nantes, Paris, Cedic/ Fernand Nathan, 1978, 338 p.

Dunham, William. *The Mathematical Universe,* New York, John Wiley & Sons, Inc., 1994, 314 p.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics,* New-York, Holt Rinehart and Winston, 1976, 588 p.

Fowler, D.H. *The Mathematics of Plato's Academy, a New Reconstruction,* Oxford, Oxford University Press, 1990, 401 p.

Guedj, Denis, *Le Théorème du Perroquet*, Paris, Éditions du Seuil, 1998, 520 p.

Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972, 1238 p.

Kramer, Edna E. *The Nature and Growth of Modern Mathematics,* New York, Hawthorn Books, Inc. Publishers, 1970, 758 p.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc. 1958, 2 vol. 1 299 p.

Struik, David. *A Concise History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc. 1967, 195 p.