

## LOGIQUE ARISTOTÉLICIEENNE, DU CONCEPT AU RAISONNEMENT

PAR : ANDRÉ ROSS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

L'invention de l'alphabet grec a eu un impact majeur sur la construction et l'organisation du savoir. Grâce à cette invention, le savoir écrit est devenu un objet d'étude. On peut relire, approfondir, critiquer, déceler les contradictions, les paradoxes et les incohérences dans les enseignements. Une nouvelle dynamique s'instaure qui n'était pas possible dans les sociétés où les scribes étaient les seuls à avoir accès au savoir, ni dans les sociétés où le savoir se transmet oralement dans des sagas héroïques.

Cette dynamique de la construction du savoir en prenant en compte la critique se manifeste dans les paradoxes de Zénon<sup>1</sup>, les démonstrations des pythagoriciens en géométrie, les propriétés des nombres obtenus par induction, la démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré<sup>2</sup>. Les savants grecs ont systématiquement eu recours à l'argumentation et à la logique pour développer le savoir, soucieux qu'ils étaient de construire une représentation cohérente de la réalité.

Cependant, le développement de la logique comme science autonome devait avoir comme assise une philosophie prenant en compte l'observation du monde sensible. Cette prise en compte de la nature dans la philosophie et la construction d'un savoir comme représentation mentale du réel débute avec Aristote.

### ARISTOTE

Aristote est un philosophe grec né à Stagire en Macédoine, on l'appelait le stagirite, en ~384 et mort à Chalcis en Eubée en ~322. Il entre à l'Académie de Platon en 367, pour y devenir professeur par la suite. Il quitte l'Académie après la mort de Platon en



Aristote  
~384 à ~322

~347 pour rejoindre la cour d'Hermias, ancien disciple de Platon, qui avait pris le pouvoir à Atarnée. Il y épousa Pythias qui était une soeur ou une cousine d'Hermias. À la mort d'Hermias, livré aux Perses et exécuté sur l'ordre d'Artaxerxès III, Aristote quitte Atarnée pour Lesbos. En ~343, il devint précepteur d'Alexandre le Grand à la cour de Philippe II de Macédoine. Il y demeure jusqu'au meurtre de Callisthène en ~325. De retour à Athènes en ~335 et déçu de l'évolution de l'Académie depuis la mort de Platon, il fonde le Lycée d'Athènes où il enseigne pendant douze ans. À la mort d'Alexandre, en ~323, un fort courant anti-macédonien se développe à Athènes, forçant Aristote à se réfugier à Chalcis où il meurt l'année suivante.



### TRAITÉS D'ARISTOTE

L'œuvre d'Aristote en logique est regroupée sous le titre d'*Organon* et comprend les textes suivants :

- a) *Les Catégories* (théorie des catégories).
- b) *De l'interprétation* (théorie des oppositions et des syllogismes modaux).
- c) *Premiers Analytiques* (théorie du syllogisme).
- d) *Seconds analytiques* (théorie de la démonstration).
- e) *Les Topiques* (théorie de la dialectique et du syllogisme éristique).  
*Réfutation des sophistes* (dernière partie des Topiques).

## THÉORIE DE LA CONNAISSANCE DE PLATON

Pour bien saisir à quel point la théorie de la connaissance d'Aristote est innovatrice, rappelons quelques grandes lignes de celle de Platon<sup>3</sup>.

La pierre angulaire de la philosophie de Platon est l'idée de l'éternité de l'âme qui lui vient des pythagoriciens. Cette idée lui fournit la solution du problème de la connaissance. Pour Platon, l'âme est immortelle et elle a la possibilité de contempler le monde des Idées entre chaque réincarnation. La connaissance est obtenue en retrouvant le souvenir de ces Idées, c'est la réminiscence. L'extrait suivant du *Timée* illustre cette théorie.

*Mais, si nous proposons des explications qui ne sont pas des images plus infidèles qu'une autre, il faut nous en contenter, en nous souvenant que moi qui parle et vous qui êtes mes juges sommes d'humaine nature, de sorte que, si, en ces matières, on nous propose un mythe vraisemblable, il ne sied pas de chercher plus loin.*

*Socrate lui répond :*

*Parfait, Timée, il faut absolument souscrire aux conditions que tu viens de poser.*

Pour Platon, il n'est nul besoin d'autres preuves que la vraisemblance de l'explication puisque c'est par la réminiscence que l'on parvient aux Idées. L'explication qu'il donne de la création de l'Univers est obtenue de cette façon. Aristote développe une approche complètement différente. Pour lui, la représentation mentale de l'univers est une construction de l'esprit humain qui débute par

l'observation et l'acquisition de concepts. C'est la première opération de l'esprit.

La mise en relation de ces concepts constitue la deuxième opération de l'esprit, la troisième étant le raisonnement.

Nous présenterons ici quelques aspects de la pensée aristotélicienne dont les définitions de base sont illustrées à l'aide de concepts et propositions mathématiques.

## THÉORIE DE LA CONNAISSANCE D'ARISTOTE

Dans la philosophie aristotélicienne, l'homme dispose de trois outils pour accéder à la connaissance vraie :

- L'observation de phénomènes particuliers qui permet l'élaboration des concepts et des termes et des relations entre ceux-ci.
- Le raisonnement par induction qui procède du particulier à l'universel afin de connaître les formes du réel et les relations qu'elles entretiennent entre elles;
- Le raisonnement par déduction qui procède des formes plus générales aux formes plus particulières pour reproduire la complexité d'ensemble de l'organisation des choses.

### Définition

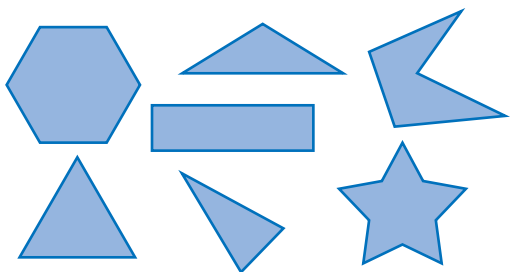
#### Concept

Le *concept* est le résultat de la perception intellectuelle de la forme par l'esprit. Le *terme* est l'expression verbale du concept, il représente l'idée dans le langage.

Le concept est la base du système logique d'Aristote, il se traduit dans le langage par un terme qui le désigne. Cependant, la traduction dans le langage d'un concept peut nécessiter l'utilisation de plusieurs mots.

Le mot « polygone » est la représentation dans le langage d'un concept, celui d'une forme géométrique plane formée de plusieurs segments de droite qui se rencontrent deux à deux. Les mots « polygone convexe » et « polygone concave » sont des exemples de concepts dont la traduction dans le langage nécessite plus d'un mot.

De la même façon, le mot « triangle » est la représentation dans le langage du concept, ou de l'idée, d'une forme géométrique particulière, celle qui est formée de trois segments de droites qui se coupent deux à deux.



Les mots « homme », « animal », « raison » sont également la traduction de concepts dans le langage.

### Définition

#### Extension

L'extension d'un terme (ou d'un concept) est l'ensemble des objets auxquels s'applique ce terme, ou désignés par ce terme (ou inclus dans ce concept).

Ainsi, le mot *triangle* ne désigne pas toutes les figures illustrées plus haut. De la même façon, le terme *équilatéral* signifie de côtés égaux. Ce terme ne s'applique donc pas à toutes ces figures géométriques.

### Définition

#### Compréhension

La compréhension d'un terme (ou d'un concept) est l'ensemble des propriétés communes aux objets désignés par ce terme.

Un terme qui englobe plusieurs propriétés désigne moins d'objets qu'un terme qui englobe peu de propriétés. Plus le nombre de propriétés est élevé plus le nombre d'objets désignés diminue et réciproquement.

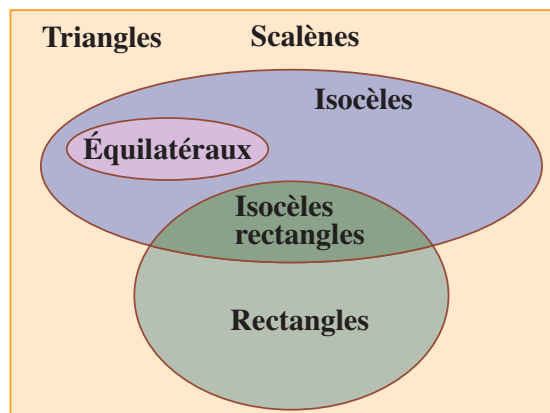
Ainsi, le terme *triangle* désigne toutes les figures formées de trois segments de droites qui se coupent deux à deux. Le terme *triangle scalène* désigne tous les triangles ayant trois côtés inégaux.

Le terme *triangle isocèle* désigne tous les triangles ayant deux côtés égaux.

Le terme *triangle équilatéral* désigne tous les triangles ayant trois côtés égaux.

Le terme *triangle rectangle* désigne tous les triangles ayant un angle droit.

Le terme *triangle isocèle rectangle* désigne tous les triangles ayant deux côtés égaux un angle droit.



### Définition

#### Jugement

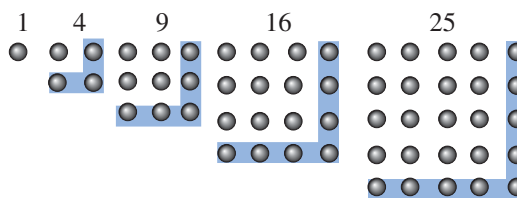
Le jugement est une relation formelle entre concepts. Une proposition est la traduction d'un jugement dans le langage.

La phrase « L'homme est un animal raisonnable » est une proposition qui traduit une relation entre concepts.

La phrase :

Le nombre carré de rang  $n$  est la somme des  $n$  premiers entiers impairs

est également une proposition qui traduit une relation entre concepts.



### PROPOSITION ATTRIBUTIVE

Pour Aristote, le jugement par excellence est le jugement attributif, ou prédicatif, qui se traduit par une proposition

attributive, c'est-à-dire une proposition qui attribue une qualité ou une caractéristique à un sujet.

## Définition

### Proposition attributive

Une *proposition attributive* est une proposition composée :

- d'un terme-sujet formé de tous les mots qui constituent le sujet;
- d'une copule (normalement le verbe être) dont le rôle, comme son nom l'indique, est de mettre en relation le terme-sujet et le terme-attribut;
- d'un terme-attribut formé de tous les mots qui constituent l'attribut, qualité ou propriété du terme-sujet.

La phrase « L'homme est un animal raisonnable » est une proposition attributive. Elle attribue au sujet « homme » une propriété « animal raisonnable »

## PROPOSITION ET DÉFINITION

Certaines propositions jouent un rôle précieux dans la construction du savoir, ce sont les définitions. Pour Aristote, la première opération de l'esprit a pour but la définition du concept. Il est hasardeux de raisonner sur des concepts qui ne sont pas clairement définis. Une bonne définition doit respecter certaines règles qui ne sont pas des recettes mais des principes qui découlent de la nature de la définition. Lorsque les règles sont connues, on est conscient des dérogations et des raisons de celles-ci. Nous présentons ces règles en les illustrant à l'aide de définitions dont certaines sont tirées des *Éléments* D'Euclide dans la version de Bernard Vitrac.

## Définition

### Définition

Une *définition* est une proposition attributive dont le terme-sujet est le terme à définir et dont le terme-attribut est formé de termes connus qui permettent de préciser les caractéristiques du terme-sujet.

Une *bonne* définition doit satisfaire à certaines règles que nous allons maintenant présenter et commenter avec des exemples.

## Première règle de la définition

*Une définition doit indiquer ce que l'objet défini possède en commun avec d'autres objets et ce qu'il possède en propre.*

Considérons la proposition suivante :

Un nombre entier pair est un nombre entier de la forme  $n = 2k$ , où  $k$  est un entier.

Cette proposition respecte la première règle d'une bonne définition. L'objet est un nombre entier, c'est ce qu'il possède en commun. Ce qu'il possède en propre c'est de pouvoir s'exprimer sous la forme  $n = 2k$ , où  $k$  est un entier.

Quand une droite élevée sur une autre droite fait deux angles adjacents égaux, chacun de ces angles égaux est un *angle droit* et la droite élevée est appelée *perpendiculaire* à celle sur laquelle elle a été élevée. Un *angle obtus* est celui qui est plus grand qu'un angle droit. Un *angle aigu* est celui qui est plus petit qu'un angle droit.

Pour expliquer ce qu'un objet possède en propre, une définition ne doit normalement pas être purement négative. Considérons la définition suivante :

*Un point est ce dont il n'y a aucune partie.*

*Euclide, Les Éléments, Livre I, définition 1*

Cette définition est entièrement négative. Elle ne précise pas ce qu'est un point, elle n'indique pas ce que le point possède en commun avec d'autres objets et ce qu'il possède en propre. Il est cependant difficile de définir le point autrement, mais une des conséquences de cette définition est que le point est indivisible.

## Deuxième règle de la définition

*Une définition doit être plus claire que ce qui est défini.*

Considérons quelques propositions et analysons-les à la lumière des deux premières règles de la définition.

L'homme est un roseau pensant.

Cette phrase due à Blaise Pascal fait poétiquement allusion à la fragilité de l'être humain et à sa capacité de raisonner, mais elle ne respecte pas la deuxième règle car elle ne précise pas ce que représente le terme « homme ».

Une ligne est une longueur sans largeur.

Euclide, Les Éléments, Livre I définition 2

Cette proposition ne respecte pas la deuxième règle car la définition ne clarifie pas ce qui est défini. Que veut-on dire par « longueur avec ou sans largeur »? Elle a quand même été utilisée comme définition par Euclide car il n'est pas simple de définir ce qu'est une ligne.

Un triangle est une figure plane limitée par trois droites qui se rencontrent deux à deux.

Cette proposition respecte la deuxième règle. Elle donne une idée précise de ce qu'est un triangle en utilisant des termes clairs. Elle respecte également la première règle en indiquant clairement ce que l'objet défini possède en propre.

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont égaux.

Cette proposition respecte les deux premières règles. Elle fait appel à des termes clairement définis « triangle » et « côtés égaux ». Elle indique clairement ce que le triangle équilatéral possède en propre.

### Troisième règle de la définition

La définition ne doit pas être circulaire. Elle ne doit pas se servir de ce qui doit être défini. Elle doit être équivalente à ce qui est défini.

Considérons quelques propositions et analysons-les à la lumière des trois règles de la définition.

Un nombre entier impair est un nombre entier de la forme  $n = 2k + 1$ , où  $k$  est un entier.

La définition de nombre entier impair précise ce que l'objet a en propre, soit de pouvoir s'exprimer sous la forme  $2k + 1$ , où  $k$  est un entier. Elle clarifie ce qui est défini, n'est pas circulaire et donne une équivalence du terme défini. On peut, dans un énoncé, remplacer le terme défini par l'expression équivalente. Ainsi, si  $n$  est un entier impair, on peut toujours le remplacer par  $2k + 1$ , où  $k$  est un entier. Cela n'est pas le cas pour toutes les définitions.

Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

Euclide, Les Éléments, Livre I définition 4

La définition de ligne droite est compliquée parce qu'il n'est pas simple de définir cet objet sans faire intervenir l'idée de rectitude, de direction ou d'alignement. En cherchant à respecter la troisième règle, elle contrevient à la deuxième règle. La définition ne clarifie pas ce qu'est une ligne droite et est même difficile à interpréter.

La définition est le but de la première opération de l'esprit, c'est par la définition que l'on précise dans le langage l'extension et la compréhension d'un concept.

### VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE PROPOSITION

Une proposition est la traduction dans le langage d'un jugement posé sur les concepts. La proposition, fruit de la deuxième opération de l'esprit, est un énoncé, ou phrase simple, qui peut être vrai ou faux. Une proposition est composée d'un sujet et d'un prédicat, propriété que l'énoncé attribue au sujet. Le sujet peut être un objet unique ou une classe d'objets.

Considérons quelques propositions et déterminons leur valeur de vérité.

Tous les hommes sont immortels.

Cette proposition est fausse.

Aucun entier impair n'est divisible par 2.

Cette proposition est vraie.

Certains nombres pairs sont divisibles par 3.  
 Cette proposition est vraie.

11 est un nombre premier.  
 Cette proposition est vraie.

Les propositions précédentes nous amènent à préciser deux nouveaux termes dont dépend la valeur de vérité d'une proposition. Ce sont la quantité et la qualité d'un jugement et de la proposition qui en est le reflet dans le langage.

### Définition

#### Quantité d'un jugement

La *quantité d'une proposition* (ou d'un jugement) est déterminée par l'extension de son sujet. La quantité d'une proposition peut être *universelle* lorsqu'elle porte sur tous les objets représentés par le sujet ou *particulière* lorsqu'elle porte sur certains ou un seul des objets représentés par le sujet.

### Définition

#### Qualité d'un jugement

La *qualité d'une proposition* (ou d'un jugement) est déterminée par la copule selon que celle-ci est affirmative ou négative.

Cela donne quatre types de propositions fondamentales, que l'on peut représenter par des voyelles. Les formes générales de ces quatre types sont les suivantes :

Universelle affirmative, représentée par A :

Tous les ... sont des ....

Universelle négative, représentée par E :

Aucun ... n'est un ...

Particulière affirmative, représentée par I :

Certains ... sont ...

Particulière négative, représentée par O :

Certains ...ne sont pas ...

La valeur de vérité de la proposition dépend à la fois de la quantité et de la qualité. La proposition unit des concepts lorsqu'elle est affirmative et les sépare lorsqu'elle est négative.

Considérons quelques propositions et déterminons leur type et leur valeur de vérité.

Tous les triangles isocèles sont rectangles.

Cette proposition est universelle affirmative (A).  
 Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui n'est pas rectangle, on peut conclure que cette proposition est fausse.

Aucun triangle isocèle n'est rectangle.

Cette proposition est universelle négative (E).  
 Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui est rectangle, on peut conclure que cette proposition est fausse.

Certains triangles isocèles sont rectangles.

Cette proposition est particulière affirmative (I).  
 Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui est rectangle, on peut conclure que cette proposition est vraie.

Certains triangles isocèles ne sont pas rectangles.

Cette proposition est particulière négative (O).  
 Puisqu'il est possible de construire au moins un triangle isocèle qui n'est pas rectangle, on peut conclure que cette proposition est vraie.

### REMARQUE

Une proposition universelle n'est pas toujours exprimée sous la forme :

Tous les ... sont des ....

La caractéristique essentielle d'une proposition universelle est que le terme-sujet représente tous les objets d'une classe. Ainsi, dans la proposition suivante :

*La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux angles droits.*

Dans ce cas, le terme-sujet englobe tous les triangles. C'est donc une proposition universelle affirmative.



## RAISONNEMENT ET ARGUMENTATION

La troisième opération de l'esprit est le raisonnement par lequel l'esprit établit un lien entre deux propositions.

### Définition

#### Raisonnement et argumentation

Un *raisonnement* est l'établissement d'une relation formelle entre jugements. Le raisonnement se traduit dans la langue par une argumentation.

On distingue le raisonnement inductif et le raisonnement déductif. Par ces raisonnements, on construit une connaissance qui est une représentation mentale du réel, représentation qui se traduit dans la langue par les termes, les propositions et l'argumentation.

La science est une adéquation entre le réel, la pensée et la langue. C'est la construction d'une représentation mentale et verbale du réel, ou la transposition du réel dans la pensée et la langue.

#### REMARQUE

La recherche de cette adéquation devrait impliquer la vérification expérimentale, mais il s'écoulera plusieurs siècles avant que cela devienne pratique courante.



### Définition

#### Raisonnement inductif

Le *raisonnement inductif* est le raisonnement par lequel on adopte un principe général à partir de l'observation de cas particuliers.

Voici un exemple de raisonnement inductif.

Le cuivre est un conducteur électrique.

L'aluminium est un conducteur électrique.

Le mercure est un conducteur électrique

-----

Tous les métaux sont des conducteurs électriques.

#### REMARQUE

L'induction est un mode de raisonnement important en sciences. À partir de l'observation de cas particuliers, on développe des concepts qui prennent la forme de principes généraux. Ces principes peuvent être modifiés ou rejetés à la lumière d'observations nouvelles.



Aristote distingue deux types de raisonnement inductif, l'induction complète (ou induction formelle) et l'induction incomplète (ou induction amplifiante).

### Définition

#### Induction complète

L'*induction complète* (ou formelle) est l'induction qui est faite après la vérification de tous les cas particuliers possibles.

Pour pouvoir faire une induction complète, il faut que le nombre de cas particuliers soit fini sinon la vérification de tous les cas est impossible.

Le nombre de métaux est fini, il est donc possible de vérifier que tous les métaux sont conducteurs d'électricité et tenir ainsi un raisonnement par induction complète.

#### REMARQUE

La conclusion sur la conductivité des métaux est obtenue expérimentalement et non par un raisonnement déductif. Cependant, cette conclusion peut par la suite être utilisée dans un raisonnement déductif pour reproduire la complexité dans la théorie ou dans la langue.



### Définition

#### Induction incomplète

L'*induction incomplète* (ou amplifiante) est l'induction qui est faite à partir de la vérification d'un très grand nombre de cas sans qu'il soit possible de les vérifier tous.

Dans un raisonnement par induction incomplète, la conclusion découle de façon plus ou moins probable des prémisses. Elle n'en découle pas de façon nécessaire. Plus

le nombre de cas vérifiés est important, plus la conclusion du raisonnement est plausible, mais elle n'est pas une certitude.

La proposition :

tous les hommes sont mortels

est le résultat d'une généralisation par induction incomplète. Personne n'a vérifié tous les cas et il n'est pas possible de le faire. Pour tous ceux qui sont présentement vivants et ceux qui ne sont pas encore nés, la vérification n'est pas encore possible. Il est cependant très difficile de mettre en doute cette conclusion et on accepte facilement que c'est une proposition vraie.

Considérons maintenant la disposition suivante des entiers :

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
15	16	17
18	19	...
$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$

On tient un raisonnement par induction incomplète en concluant de cette représentation que :

Tous les entiers plus grands ou égaux à 0 sont de la forme :

$$3k, 3k + 1 \text{ ou } 3k + 2$$

On n'a pas vérifié pour tous les nombres plus grands ou égaux à 0. Cependant, en changeant de colonne chaque fois qu'on additionne l'unité, on dispose tous ces nombres dans l'une ou l'autre de ces colonnes.

On obtient donc un principe général sur la forme des entiers plus grands ou égaux à 0. On peut alors se servir de ce principe pour « reconstituer la complexité de l'organisation des choses dans le langage ». Par exemple, si on considère le carré d'un nombre de la première colonne, on obtient un nombre de la première colonne. Cela est vrai

pour les quelques nombres que nous aurons la patience de vérifier. On peut démontrer que cela est toujours le cas de la façon suivante :

Soit  $n$  un nombre entier positif de la forme  $3k$ . Alors, il existe un entier  $a$  tel que  $n = 3a$ .

D'où :

$$n^2 = (3a)^2 = 9a^2 = 3(3a^2)$$

Par conséquent,  $n^2$  est de la forme  $3k$ , où  $k = 3a^2$ .

En poussant plus loin nos investigations, on peut formuler la proposition suivante :

Le carré d'un nombre entier plus grand ou égal à 0 est de la forme  $3n$  ou  $3n + 1$ , mais jamais de la forme  $3n + 2$ .

Pour démontrer cette proposition, nous aurons recours à une induction complète en considérant comment se comporte un nombre de chacune de ces formes lorsqu'il est élevé au carré.

Soit  $n$  un nombre entier positif.

Si  $n = 0$ , alors  $n^2 = 0$  et est de la forme  $3k$ .

Si  $n$  est de la forme  $3k$ , alors il existe un entier  $a$  tel que  $n = 3a$ . D'où  $n^2 = (3a)^2 = 9a^2 = 3(3a^2)$ . Par conséquent,  $n^2$  est de la forme  $3k$ , où  $k = 3a^2$ .

Si  $n$  est de la forme  $3k + 1$ , alors il existe un entier  $a$  tel que  $n = 3a + 1$ . D'où :

$$\begin{aligned} n^2 &= (3a + 1)^2 \\ &= 9a^2 + 6a + 1 \\ &= 3(3a^2 + 2a) + 1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$n^2 \text{ est de la forme } 3k + 1, \text{ où } k = 3a^2 + 2a.$$

Si  $n$  est de la forme  $3k + 2$ , alors il existe un entier  $a$  tel que  $n = 3a + 2$ . D'où :

$$\begin{aligned} n^2 &= (3a + 2)^2 \\ &= 9a^2 + 12a + 4 \\ &= 3(3a^2 + 4a + 1) + 1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$n^2 \text{ est de la forme } 3k + 2, \text{ où } k = 3a^2 + 4a + 1.$$

On peut dégager quelques conséquences de cette démonstration par induction complète.

Le carré d'un nombre de la forme  $3k$  est de la forme  $3k$ .

Le carré d'un nombre de la forme  $3k + 1$  est de la forme  $3k + 1$ .

Le carré d'un nombre de la forme  $3k + 2$  est de la forme  $3k + 1$ .

**REMARQUE**

Dans ces raisonnements, nous avons utilisé un principe général obtenu par induction incomplète et nous avons tenu un raisonnement par induction complète en considérant toutes les formes possibles.



Considérons maintenant les données du tableau ci-contre. En généralisant par induction incomplète, on pourrait formuler la proposition suivante :

Si  $n$  est un nombre pair plus grand que 4 alors  $n$  est la somme de deux nombres premiers impairs.

Il est plus difficile de se convaincre qu'il s'agit d'une proposition vraie. On peut faire d'autres vérifications, comme celles du tableau II ci-contre. Ces vérifications rendent l'énoncé un peu plus plausible, mais il y a une infinité de nombres entiers pairs. Il est donc impossible de faire une induction complète.

La proposition est du type universelle affirmative. Il n'est pas simple de déterminer sa valeur de vérité. En vérifiant tous les cas, on pourrait conclure qu'elle est vraie. Cependant, il y a un nombre infini de nombre pairs, la vérification est donc impossible. D'autre

**TABLEAU I**

$2 + 2 = 4$
$3 + 3 = 6$
$3 + 5 = 8$
$3 + 7 = 10$
$5 + 7 = 12$
$3 + 11 = 14$

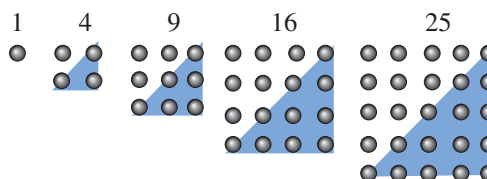
**TABLEAU II**

$16 = 5 + 11$
$= 3 + 13$
$18 = 5 + 13$
$= 7 + 11$
$20 = 7 + 13$
$= 3 + 17$
$22 = 3 + 19$
$= 5 + 17$
$= 11 + 11$

part, si on peut trouver un nombre qui n'est pas la somme de deux nombres premiers impairs, on pourra conclure que la proposition est fausse.

Dans leur étude des nombres, les pythagoriciens ont obtenu plusieurs résultats par induction incomplète. Ainsi,

Le nombre carré de rang  $n$  est la somme du nombre triangulaire de même rang et du nombre triangulaire précédent.



**LIMITES DE L'INDUCTION**

La conclusion du raisonnement par induction incomplète ne dépend pas seulement de la logique mais également, et surtout, de sa confirmation par les faits. Il suffit d'un seul cas ne vérifiant pas le principe général pour infirmer celui-ci et conclure que le principe général est faux.

*Destruendum sufficit unum*

disait Blaise Pascal.

**PIÈGE DE L'INDUCTION**

La conclusion d'un raisonnement inductif est fondée sur l'observation des cas particuliers. Une telle conclusion n'est pas une nécessité logique et il faut être très critique lorsqu'on utilise ce type de raisonnement<sup>4</sup>. L'être humain a naturellement tendance à généraliser et parfois à partir d'un nombre de cas beaucoup trop restreint. L'usage inconsideré de l'induction amplifiante peut entraîner toutes sortes de préjugés. En effet, le préjugé consiste à généraliser à tout un groupe d'individus ce qui n'est vrai que pour quelques individus dans le groupe.

**RAISONNEMENT DÉDUCTIF ET SYLLOGISME**

Les concepts ont été élaborés par l'observation, ce qui a permis de définir les termes. L'observation a également permis, grâce à un raisonnement inductif, d'obtenir des propositions (jugements) qui traduisent dans le langage

l'attribution d'une propriété à toute une classe d'objets après avoir vérifié que cette propriété est vérifiée pour un certain nombre de ces objets (induction incomplète) ou pour tous ces objets (induction complète). Considérons maintenant le raisonnement déductif.

### Définition

#### Raisonnement déductif

Le *raisonnement déductif* est le raisonnement par lequel on dégage la conséquence qui découle de la prise en compte d'un principe général et d'un cas particulier.

Supposons que l'on a établi (le procédé peut demeurer secret pour le moment) que tout nombre entier dont la somme des chiffres est divisible par 3 est lui-même divisible par 3. Considérons le nombre 245 727. Ce nombre est-il divisible par 3?

La somme des chiffres de ce nombre donne :

$$2 + 4 + 5 + 7 + 2 + 7 = 27$$

Puisque 27 est divisible par 3, on peut donc conclure, par un raisonnement déductif, que 245 727 est également divisible par 3.

Le raisonnement tenu dans cet exemple est le suivant :

*Tout nombre entier dont la somme des chiffres est divisible par 3 est lui-même divisible par 3.*

*La somme des chiffres du nombre 245 727 est divisible par 3.*

*Donc, 245 727 est divisible par 3.*

Ce type de raisonnement est appelé un syllogisme, c'est le modèle de raisonnement déductif étudié par Aristote. Voici d'autres exemples.

*Tous les hommes sont mortels,  
Socrate est un homme,  
donc Socrate est mortel.*

*Tous les métaux sont conducteurs d'électricité,  
le zinc est un métal,  
donc le zinc est conducteur d'électricité.*

Dans un syllogisme, la dernière proposition découle logiquement des deux autres. Pour déterminer la validité d'un syllogisme, il faut prendre en compte la quantité et la qualité des propositions mises en relation. Nous reviendrons sur la question de la validité d'un syllogisme dans un prochain article.

### CONCLUSION

Pour Aristote, la connaissance débute par l'intuition dont dépend la formation de concepts dans l'esprit. Ceux-ci sont le produit de l'observation et de l'expérience et se traduisent dans le langage par des mots. L'intuition préside également à la formation de jugements, relations formelles entre concepts qui se traduisent dans le langage par des propositions, c'est-à-dire des énoncés qui comportent un concept sujet, une copule et un concept attribut. Ces énoncés unissent des concepts, lorsqu'ils sont affirmatifs, ou séparent des concepts, lorsqu'ils sont négatifs.

Le raisonnement permet d'établir des relations formelles entre jugements, c'est-à-dire de nouveaux jugements à partir de jugements antérieurs dont ils sont des conséquences logiques. Dans le langage, le raisonnement se traduit par une argumentation. Les raisonnements peuvent être des inductions, complètes ou incomplètes ou des déductions dont le syllogisme est un exemple.

### BIBLIOGRAPHIE

Devin, Keith, *The language of Mathematics*, New York, W.H. Freeman and compagny, 1998, 344 p.

Doyon, Gilles, Talbot, Pierre, *La logique du raisonnement, Théorie du syllogisme et applications*, Collection philosophie, Ste-Foy, Éditions du Griffon d'argile, 1985, 204 p.

Doyon, Gilles, Talbot, Pierre, *La logique du raisonnement, Théorie de l'inférence propositionnelle et applications*, Collection philosophie, Ste-Foy, Éditions du Griffon d'argile, 1986, 249 p.

Robert Serge, *La logique, son histoire, ses fondements*, Collection Science et Théorie, Éditions Le préambule, 1978, 290 p.

Smith, V.E. *Éléments de logique*, Traduit de l'américain, Montréal, Centre de psychologie et de pédagogie, 1966, 296 p.

Vitrac, Bernard, *Euclide, Les Éléments*, 4 vol. Paris, PUF, 1990, 1994, 1998, 2001.

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

1. Ross, André, *Zénon, les paradoxes*, Bulletin de l'AMQ, décembre 2001.
2. Ross, André, *Des triplets pythagoriciens au théorème de Pythagore*, Bulletin de l'AMQ, mars 2003.
3. Ross, André, *Platon et les mathématiques*, Bulletin de l'AMQ, octobre 2001.
4. Pour un exemple de piège de l'induction, voir Ross, André, *Vous avez dit conjecture?*, Bulletin de l'AMQ, décembre 2000.