GILLES PERSONNE DE ROBERVAL

par: André Ross
professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

Gilles Personne de Roberval est né le 10 août 1602 à Senlis en France. Il est mort le 27 octobre 1675 à Paris. Il faisait partie du groupe de savants qui se rencontraient dans la cellule du père Marin Mersenne. Il était en fait le seul mathématicien professionnel du groupe. Il enseigna d'abord la philosophie au collège Gervais de Paris puis les mathématiques au collège Royal durant 40 ans. Le mandat du titulaire de la chaire de mathématiques au collège Royal était de trois ans et les candidats devaient se soumettre à un concours préparé par le titulaire sortant. Roberval, ne publiant pas les résultats de ses travaux, pouvait ainsi préparer un concours sur des problèmes qu'il avait déjà résolus, ce qui lui permettait de remporter le concours à chaque fois. Cependant, le fait de ne pas publier les résultats de ses travaux a eu pour effet de le plonger souvent dans des disputes sur la priorité de découvertes mathématiques.

Roberval a développé des méthodes puissantes en intégration, ce qui lui a permis de calculer l'intégrale définie de sin *x*. Il a fait des travaux sur la cycloïde et a calculé la longueur d'arc d'une spirale. Il est renommé pour ses découvertes sur les courbes planes et pour sa méthode pour tracer la tangente à une courbe basée sur la notion de compositions des mouvements qui, selon Boyer, avait déjà été employée par Archimède, Galilée et Descartes et qui a fait l'objet d'une dispute avec Torricelli.

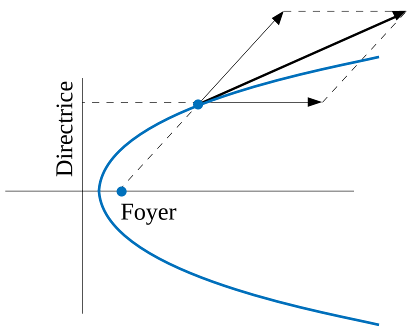
Roberval a produit deux traités de géométrie analytique inspirés des travaux de François Viète et de ceux de René Descartes. Dans ces ouvrages, il s'intéresse à deux problèmes: la représentation de lieux géométriques à l'aide d'équations et l'intersection de lieux géométriques dans la résolution d'équations. Il est également l'auteur d'un traité de géométrie élémentaire utilisé au Collège Gervais.

ROBERVAL ET LA TANGENTE

Roberval a développé une méthode originale pour tracer les tangentes, méthode qui a été publiée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences en 1693 mais dont le contenu était, semble-t-il, enseigné au Collège Royal en 1636. Par cette méthode, il considère que la direction du mouvement d'un point qui décrit une courbe est la tangente à cette courbe. La direction de ce mouvement est cependant la composition de deux mouvements qui sont spécifiques à la courbe. En d'autres mots, toute courbe est engendrée par la composition de deux mouvements et la tangente est la bissectrice de l'angle formé par les directions de ces deux mouvements.

Ainsi, la parabole est engendrée par un point qui est animé de deux mouvements d'égale intensité. L'un de ces mouvements éloigne le point du foyer et l'autre mouvement l'éloigne de la directrice. La tangente est la bissectrice de l'angle formé par ces deux directions. En langage moderne, on dirait que la courbe est engendrée par la composition de deux mouvements que l'on peut décrire par des vecteurs vélocité de même intensité et la bissectrice est la résultante de ces deux vecteurs.

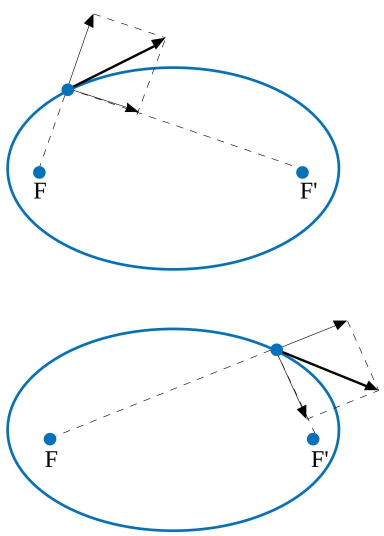
TANGENTE À LA PARABOLE



Le mouvement du point qui engendre la parabole peut être décomposé en deux mouvements d'égale intensité. L'un de ces mouvements éloigne le point du foyer de la parabole et l'autre l'éloigne de la directrice. La tangente à la courbe est la bissectrice de l'angle formé par les deux vecteurs.

L'ellipse est engendrée par un point qui s'éloigne d'un des foyers au même taux qu'il s'approche de l'autre. La tangente est la bissectrice de l'angle formé par ces deux directions.

TANGENTE À L'ELLIPSE



L'ellipse est engendrée par un point qui s'éloigne d'un des foyers au même taux qu'il s'approche de l'autre. La tangente est la bissectrice de l'angle formé par ces deux directions.

Roberval a utilisé cette méthode pour trouver les tangentes aux coniques et à différentes courbes comme la quadratrice, la cissoïde, la spirale et la cycloïde. Cette méthode a également été utilisée par Torricelli, ce qui a donné lieu à une dispute sur la priorité de la découverte. Il est très difficile de déterminer qui a la priorité de la découverte de cette méthode, compte tenu du peu d'empressement de Roberval à publier ses résultats.

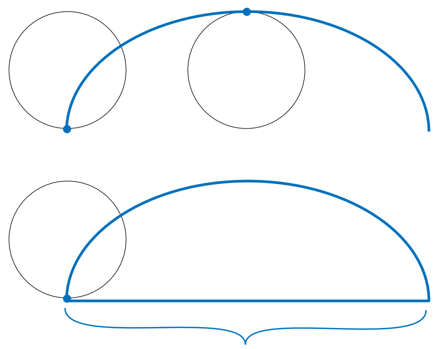
CYCLOÏDE

Roberval s'est particulièrement intéressé à la courbe appelée *cycloïde*. Cette courbe est le lieu décrit par un point sur la circonférence d'une cercle qui roule en ligne droite. Elle fut étudiée pour la première fois par Nicolas de Cuse (1401-1464) dans une tentative pour trouver l'aire d'un cercle par intégration. C'est Marin Mersenne qui en a donné une définition satisfaisante et qui a énoncé les propriétés évidentes comme le fait que la longueur de la base est égale à la circonférence du cercle générateur. Il tenta de trouver l'aire sous la courbe mais n'y parvenant pas il a posé le problème à d'autres mathématiciens.

C'est Galilée qui a nommé la courbe en 1599. En 1639, il écrivit à Torricelli qu'il avait étudié la courbe durant quarante ans. Galilée a tenté de trouver l'aire sous la courbe en la comparant à celle du cercle générateur. Ne réussissant pas à trouver une méthode mathématique, il décida de peser des pièces de métal découpés sous forme de cycloïde. Il trouva ainsi que le rapport des masses était approximativement de 3 à 1. Mais il émit la conjecture que ce rapport n'était pas exactement de 3 à 1 mais devait plutôt être un nombre irrationnel voisin de 3.

C'est en 1628 que Mersenne proposa le problème de la cycloïde à Roberval, à Descartes et à Fermat. Descartes qui avait développé une méthode algébrique pour trouver la tangente à la cycloïde mit Roberval et Fermat au défi d'en faire autant. Fermat parvint à développer une telle méthode alors que Roberval mit au point un procédé mécanique basé sur la composition du mouvement de translation et du mouvement de rotation du point engendrant la courbe. Torricelli avait indépendamment développé une méthode pour trouver l'aire sous la cycloïde et Viviani pour en tracer la tangente.

PROPRIÉTÉS DE LA CYCLOÏDE



La longueur de la base est égale à la circonférence du cercle générateur.

En 1658, Pascal après un long épisode consacré à la religion s'intéressa à nouveau aux mathématiques pour oublier la douleur d'une rage de dents qui le tenait éveillé. Il résolut le problème de l'aire et du centre de gravité d'un segment quelconque de la cycloïde. Il résolut également le problème du volume et de la surface du solide de révolution obtenu par la rotation de la cycloïde autour de l'axe horizontal. Christopher Wren a déterminé que la longueur de la courbe est $8r$.

Une particule qui glisse sur une cycloïde est animé d'un mouvement harmonique simple et la période est indépendante du point de départ de l'oscillation. Huygens utilisa cette propriété, qu'il avait découverte en 1673, pour construire une horloge avec un pendule décrivant un arc cycloïdal pour assurer l'isochronisme des oscillations mais ce mécanisme était mécaniquement trop compliqué pour être pratique.

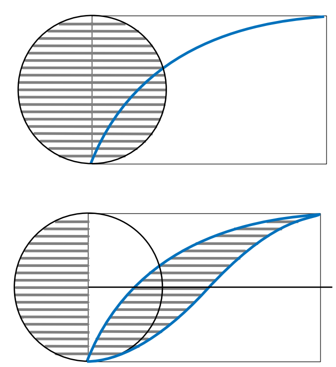
En 1696, dans son ouvrage Acta eruditorum, Jean Bernoulli pose, aux mathématiciens de l'Europe, un problème qu'il avait déjà résolu, celui de la brachistochrone. Le problème consiste à déterminer la trajectoire descendante d'un mobile qui passe d'un point A à un point B qui n'est pas situé directement en-dessous, et ce, en un minimum de temps (p. 5). Jacques Bernoulli, Newton, Leibniz et l'Hospital ont démontré que la cycloïde était la trajectoire du mobile.

ROBERVAL ET LA CYCLOÏDE

Roberval a d'abord déterminé, comme l'avait fait Marin Mersenne, l'aire du rectangle dans lequel est inscrite la demi-cycloïde. Cette aire est $2\pi r^2$ puisque la hauteur du rectangle est $2r$ et sa longueur est la demi-circonférence πr.

Par la suite, en ayant recours à la méthode des indivisibles, Roberval a déterminé l'aire sous la cycloïde. Il construit d'abord une courbe qu'il appelle la *compagne* de la cycloïde en reportant les longueurs des segments. La méthode des indivisibles permet alors de conclure que l'aire entre la cycloïde et la compagne est égale à $\pi r^2/2$.

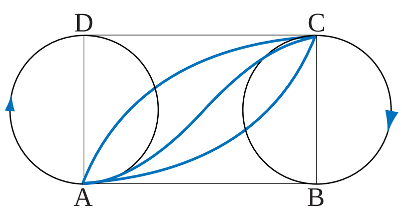
CONSTRUCTION DE LA COMPAGNE DE LA CYCLOÏDE



Glissons horizontalement les indivisibles de la demi-circonférence pour les aligner sur la cycloïde. L'autre extrémité des indivisibles donne une nouvelle courbe que Roberval apppelle la *compagne* de la cycloïde.

On peut visualiser la symétrie de la construction à l'aide de la figure suivante. Si deux cercles roulant en sens inverse l'un de l'autre, le premier sur la partie inférieure du rectangle et l'autre sur sa partie supérieure, on obtient deux demi-cycloïdes dont l'une est inversée. La symétrie de la construction permet de conclure que ces deux demi-cycloïdes ont la même compagne, ce qui signifie que la compagne bisecte l'aire du rectangle. L'aire sous la compagne est donc la moitié de l'aire du rectangle, soit πr^2.

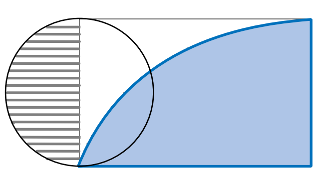
SYMÉTRIE DE LA CONSTRUCTION



Les cycloïdes engendrées par des roues tournant en sens contraire, l'une sur AB et l'autre sur CD ont la même compagne et celle-ci divise l'aire du rectangle en deux parties égales.

L'aire sous la demi-cycloïde est donc égale à l'aire sous la compagne plus l'aire entre la demi-cycloïde et la compagne, ce qui donne $3\pi r^2/2$ et l'aire sous la cycloïde complète est $3\pi r^2$.

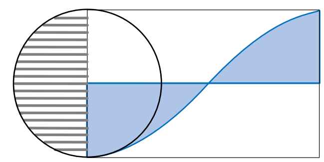
AIRE SOUS LA DEMI-CYCLOÏDE



L'aire sous la demi-cycloïde est $3\pi r^2/2$. L'aire sous la cycloïde est donc $3\pi r^2$.

Il est intéressant de noter que la courbe que Roberval appelle la *compagne* de la cycloïde est en fait une sinusoïdale. C'est la première fois dans l'histoire qu'une sinusoïdale était tracée.

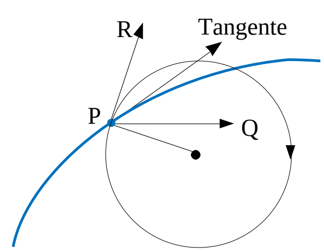
SINUSOÏDE



La compagne est la sinusoïde dans l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$.

Pour trouver la tangente à la cycloïde, Roberval a recours à la composition des mouvements. Le point qui engendre la cycloïde est animé d'un mouvement de translation horizontale dans la direction PQ et d'un mouvement de rotation suivant la tangente au cercle générateur, soit dans la direction PR. La tangente à la cycloïde est la bissectrice de l'angle formé par ces deux mouvements.

TANGENTE À LA CYCLOÏDE PAR LA MÉTHODE DE ROBERVAL



Le point P est animé d'un mouvement de translation horizontale dans la direction PQ et d'un mouvement de rotation suivant la tangente au cercle générateur. La dircetion de la tangente à cycloïde est dans la direction de la bissectrice de l'angle RPQ.

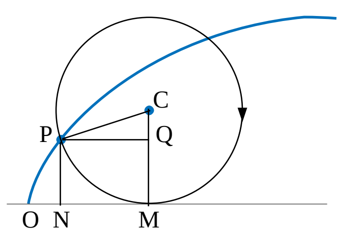
CONCLUSION

L'histoire de la cycloïde illustre à quel point les mathématiciens ont fait preuve de créativité pour résoudre les problèmes qui leur étaient proposés. La décomposition du mouvement d'un point en deux mouvements de même intensité dont la bissectrice est la tangente à la courbe engendrée par le déplacement du point est très intéressante même si elle ne peut se généraliser à toutes les courbes puisque les deux mouvements à considérer sont spécifiques à la courbe. Chaque courbe est alors un cas particulier.

La méthode de calcul de l'aire sous la cycloïde est assez ingénieuse d'un point de vue géométrique, mais elle n'est pas adaptable à d'autres types de courbes. En mathématiques, la recherche de méthodes générales utilisables pour résoudre des classes entières de problèmes est un facteur important d'évolution.

Néanmoins, même si une méthode n'atteint pas le but visé, elle permet de faire progresser la recherche et contribue ainsi à construire la connaissance générale.

ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE LA CYCLOÏDE



Puisque le cercle roule sans glisser, on a :

$\overline{OM} = \text{arc}\,\widehat{MP} = r\theta$, où θ est en radians.

Dans le triangle CPQ, on a :

$$\overline{PQ} = r\sin\theta \text{ et } \overline{QC} = r\cos\theta,$$

$$\text{où } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

En représentant le point P par $(x; y)$, on a :

$$x = \overline{ON} = \overline{OM} - \overline{MN} = \text{arc}\,\widehat{MP} - \overline{PQ}$$
$$= r\theta - r\sin\theta$$
$$y = \overline{NP} = \overline{MQ} = \overline{MC} - \overline{QC}$$
$$= r - r\cos\theta$$

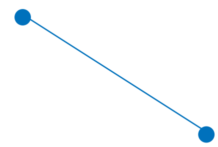
Les équations sont donc :

$$x = r\,(\theta - \sin\theta)$$
$$y = r\,(1 - \cos\theta)$$

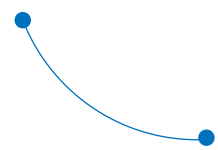
PROBLÈME DE LA BRACHISTOCHRONE

Deux points A et B étant donnés à des altitudes différentes, et tels que B ne soit pas directement en-dessous de A, quelle est la trajectoire descendante d'un mobile qui permet de passer de A à B par gravitation en un minimum de temps?

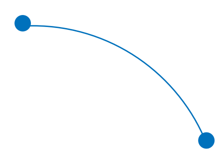
La trajectoire est-elle une droite?



La trajectoire est-elle un arc de cercle concave?



La trajectoire est-elle un arc de cercle convexe?



Aucune de ce réponses, la trajectoire est un acr de cycloïde.