

BLAISE PASCAL

par : André Ross
 Professeur de mathématiques
 Cégep de Lévis-Lauzon



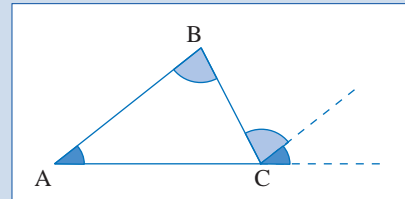
Blaise Pascal, mathématicien français né à Clermont-Ferrand. Son père Étienne était lui-même mathématicien amateur et le limaçon de Pascal a été nommé en son honneur à la suggestion de Gilles Personne de Roberval (1602-1675).

Vers 1634, Blaise s'initie aux mathématiques contre la volonté de son père qui craignait que cette étude ne le passionne au point de nuire à sa santé et à l'étude du latin et des langues. Cependant, il surprend un jour son fils, âgé de 12 ans, cherchant à résoudre des problèmes dans une géométrie qu'il avait lui-même développée. Selon le récit de la vie de Pascal, rédigé par sa sœur, celui-ci démontrait la 32^e proposition de la géométrie d'Euclide. Ce témoignage laisse sous-entendre que la géométrie d'Euclide est un enchaînement de propositions qu'il faut absolument démontrer dans l'ordre et que c'est une très belle réalisation d'être parvenu seul et sans formation mathématique à la 32^e proposition.

Cette proposition se lit comme suit :

Euclide, Livre I, proposition 32

Dans un triangle, l'angle extérieur formé par le prolongement d'un côté est égal à la somme des angles intérieurs non-adjacents et la somme des angles intérieurs est égale à deux angles droits.



Selon cette légende, étonné de la précocité de son fils, il lève l'interdiction et lui donne une copie des Éléments d'Euclide. Par la suite, Blaise entreprend l'étude des travaux de Gérard Désargues (1591-1661). À 14 ans, il est admis à l'Académie de Marin Mersenne (1588-1648) dont font également partie Désargues, Roberval et son père Étienne Pascal. Dès l'âge de 16 ans, il y expose des théories intéressantes dont la découverte d'une propriété des coniques appelée par la suite hexagone de Pascal. Parmi ses contributions ma-

thématiques, il faut signaler l'invention d'une machine à calculer, des travaux sur les probabilités qui lui ont permis d'établir un lien entre les probabilités, le triangle arithmétique et les combinaisons et d'élaborer la méthode de démonstration connue sous le nom d'induction mathématique.

Pascal s'est intéressé entre autres à l'étude des coniques, aux probabilités et à l'analyse. En 1646, il est informé des expériences de Torricelli sur la pesanteur et réalise des expériences pour en vérifier les conclusions, en particulier l'expérience du Puy de Dôme qui est un moment important de la physique (voir *Le vide, quel horreur!*). Profondément religieux, converti au jansénisme, il abandonne tout en 1654 pour suivre les jansénistes. Il rejoint alors sa jeune soeur à Port-Royal. Les jésuites ayant attaqué les jansénistes, Pascal leur répondit en 1656 et 1657 par dix-huit lettres appelées *Lettres Provinciales* qui constituent une des grandes créations de la littérature française. Dans le même temps, il entretient une correspondance mathématique avec Fermat, Huygens et de Sluse [(René François (1622-1685))]. En 1658, il fait un retour aux mathématiques, souffrant d'un mal de dents il s'attaque à l'étude de la cycloïde pour se distraire. En décembre 1658, Pascal publie neuf fascicules sous le nom de Amos Dettonville (un anagramme de Louis de Montalte rendu célèbre par les *Lettres Provinciales*). Dans ces fascicules, il présente les méthodes et résultats de ses travaux mathématiques. En 1659, gravement malade il abandonne définitivement toute recherche scientifique et consacre ses dernières années à la rédaction de ses *Pensées*. Le 19 août 1662, il meurt à l'âge de 39 ans.

INTÉGRATION CHEZ PASCAL

Le premier fascicule que Pascal fait paraître sous le nom d'Adam Dettonville présente une méthode pour trouver les centres de gravité, un traité des sinus du quart de cercle, un Traité des arcs de cercle, un traité des solides circulaires et un traité générale de la rou-

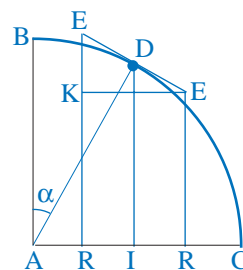
lette (la cycloïde) contenant la solution des problèmes sur la cycloïde qu'il avait proposé en juin 1658. Dans ses ouvrages, Pascal n'utilisait pas l'algèbre développée par les mathématiciens de son époque, il utilisait principalement le langage géométrique, sans doute influencé par les travaux de Désargues en géométrie projective, ce qui rend ses énoncés assez complexes. Par ailleurs, il ne se considérait pas comme un mathématicien et ne s'attaquait qu'aux problèmes qui l'intéressaient personnellement. Il délaissa le problème de la tangente à une courbe pour ne s'intéresser qu'aux problèmes de sommations pour évaluer des surfaces, des volumes et pour déterminer des centres de gravité.

Dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, Pascal considère la division du quart de cercle de rayon AB en arcs de cercle égaux. Par les points de division de l'arc de cercle, il mène des tangentes successives qui formeront un polygone régulier circonscrit au quart de cercle. Lorsque le nombre des arcs augmente indéfiniment, la longueur des arcs tend vers zéro.

Proposition I

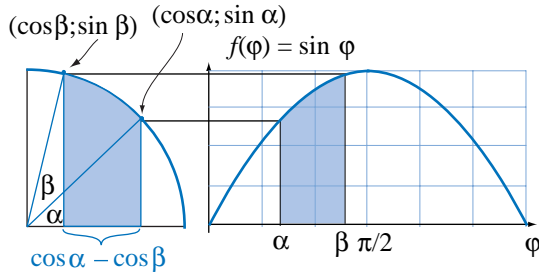
La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes multipliée par le rayon.

Pour simplifier l'interprétation de cette proposition, considérons que le cercle a un rayon unitaire.



La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est l'aire sous la courbe de la fonction sinus dans l'intervalle $[\alpha; \beta]$ où α et β sont des angles compris

entre 0 et $\pi/2$ et tels que l'arc considéré est sous-tendu par l'angle au centre $\beta - \alpha$. En considérant le quart de cercle, la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes de l'arc sous-tendu par l'angle $\beta - \alpha$ est alors $\cos \beta - \cos \alpha$.



En écriture moderne, cette première proposition signifie donc :

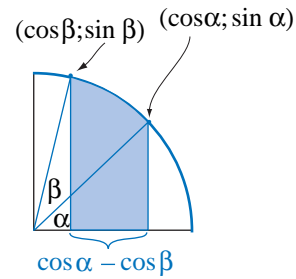
$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin \varphi \, d\varphi = -\cos \varphi \Big|_{\alpha}^{\beta} = -\cos \beta + \cos \alpha, \text{ où } 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi/2$$

Soulignons que Pascal ne connaissait pas la courbe du sinus telle que nous nous la représentons. La première courbe sinusoidale qui a été tracée, l'a été par Gilles Personne de Roberval dans une démarche purement géométrique pour trouver l'aire sous la cycloïde (la roulette), démarche qui ne faisait pas appel à la géométrie analytique de Descartes qui n'avait pas encore révolutionné l'étude des fonctions.

Proposition II

La somme des carrés de ces sinus est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle qui seraient comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

La somme des ordonnées du quart de cercle comprises entre les sinus extrêmes est l'aire sous l'arc de cercle sous-tendu par l'angle au centre $\beta - \alpha$.

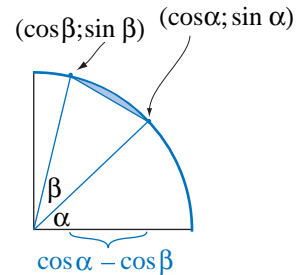


L'aire sous cet arc de cercle peut être considérée comme la somme de l'aire d'un secteur circulaire et d'un trapèze. L'aire d'un secteur circulaire d'angle au centre θ étant donnée par

$$A = \frac{r^2}{2} (\theta - \sin \theta)$$

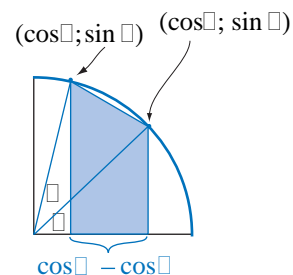
Pour un rayon unitaire et un angle au centre $\beta - \alpha$, l'aire du secteur est :

$$A_s = \frac{1}{2} ((\beta - \alpha) - \sin(\beta - \alpha))$$



Les bases du trapèze sont $\sin \alpha$ et $\sin \beta$ et sa hauteur est $\cos \beta - \cos \alpha$, son aire est donc:

$$A_t = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \beta - \cos \alpha)$$



En effectuant la somme de ces aires, on obtient l'aire sous l'arc intercepté par l'angle au centre $\beta - \alpha$, soit la somme des ordonnées entre les sinus extrêmes, ce qui donne :

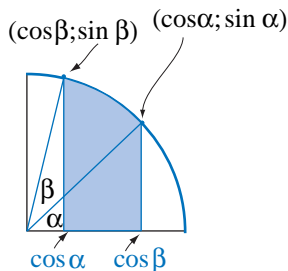
$$A_t + A_r = \frac{1}{2}((\beta - \alpha) - \sin(\beta - \alpha)) + \frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \beta - \cos \alpha)$$

En développant $\sin(\beta - \alpha)$ et en effectuant les opérations, on a alors :

$$A_t + A_r = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}(\sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha)$$

Montrons l'équivalence avec l'expression moderne. On peut également faire la vérification du résultat de Pascal par intégration de la façon suivante :

Dans le cercle de rayon unitaire $x^2 + y^2 = 1$, les ordonnées dans l'intervalle « entre les sinus extrêmes » sont décrites par $y = \sqrt{1 - x^2}$.



La « somme de ordonnées » est alors l'intégrale définie :

$$\int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \sqrt{1 - x^2} dx$$

Puisque

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$$

l'intégrale définie donne :

$$\int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}(\sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha)$$

Nous avons calculé l'aire sous l'arc de cercle dans l'intervalle $[\cos \beta; \cos \alpha]$ de deux façons différentes, mais peut-on montrer que cette aire est égale à la « somme des carrés des sinus », c'est-à-dire l'aire sous la courbe $f(x) = \sin x$ dans l'intervalle $[\alpha; \beta]$. Ce résultat est celui obtenu en utilisant l'expression moderne

$$\int_{\beta}^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(\sin \varphi \cos \varphi) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

En effectuant l'intégrale définie sur l'intervalle $[\alpha; \beta]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi &= \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(\sin \varphi \cos \varphi) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta \right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}(\sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

L'intégrale sous la courbe du sinus dans l'intervalle $[\alpha; \beta]$ donne donc le même résultat que l'intégrale sous l'arc de cercle dans l'intervalle $[\cos \beta; \cos \alpha]$.

Proposition III

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des carrés des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

En écriture moderne, la somme des carrés des ordonnées entre les sinus extrêmes donne :

$$\begin{aligned} \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} (1 - x^2) dx &= x + \frac{x^3}{3} \Big|_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \\ &= \cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} - \cos \beta + \frac{\cos^3 \beta}{3} \end{aligned}$$

Et la somme des cubes des sinus est :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^3 \varphi \, d\varphi &= -\cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\cos \beta + \frac{\cos^3 \beta}{3} + \cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \\ &= \cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} - \cos \beta + \frac{\cos^3 \beta}{3} \end{aligned}$$

On constate à nouveau la justesse du résultat.

Proposition IV

La somme des carré-carrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

Les ordonnées étant décrites par $y = \sqrt{1-x^2}$, les cubes des ordonnées sont donc $y = (1-x^2)^{3/2}$ et, puisqu'on effectue la somme entre les sinus extrêmes, cette quatrième proposition en écriture moderne s'énonce :

$$\int_a^b \sin^4 \varphi \, d\varphi = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} (1-x^2)^{3/2} dx, \text{ où } 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi/2$$

GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS

En écriture moderne, les quatre propositions de Pascal s'écrivent :

Propositions de Pascal

Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi/2$, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^{\beta} \sin \varphi \, d\varphi &= \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} (1-x^2)^0 dx = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} 1 \, dx \\ &= x \Big|_{\cos \beta}^{\cos \alpha} = \cos \alpha - \cos \beta \end{aligned}$$

$$\int_a^{\beta} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} (1-x^2)^{1/2} dx$$

$$\int_a^{\beta} \sin^3 \varphi \, d\varphi = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} (1-x^2)^1 dx$$

$$\int_a^{\beta} \sin^4 \varphi \, d\varphi = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} (1-x^2)^{3/2} dx$$

Ces quatre propositions incitent à une généralisation par induction, ce que Pascal a fait puisqu'il écrit à la suite de ses quatre propositions : « Et ainsi à l'infini ». Ce qui donne la conjecture suivante :

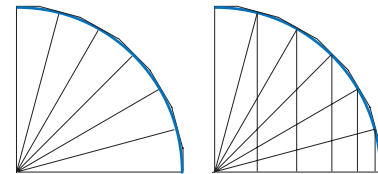
Proposition généralisée

Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi/2$ et pour $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\int_a^{\beta} \sin^n \varphi \, d\varphi = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} (1-x^2)^{(n-1)/2} dx$$

DÉMONSTRATION PAR PASCAL

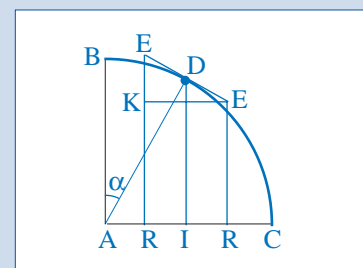
Dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, PASCAL considère la division du quart de cercle de rayon AB en arcs de cercles égaux. Par les points de division de l'arc de cercle, il mène des tangentes successives qui formeront un polygone régulier circonscrit au quart de cercle. Lorsque le nombre des arcs augmente indéfiniment, la longueur des arcs tend vers zéro.



À partir de cette représentation, il démontre le lemme suivant :

Lemme

Soit ABC un quart de cercle dont le rayon AB soit considéré comme axe et le rayon perpendiculaire AC comme base. Soit D un point quelconque dans l'arc duquel soit mené le sinus DI sur le rayon AC; et la touchante DE, dans laquelle soient pris les points E où l'on voudra, d'où soient menés les perpendiculaires ER sur le rayon AC.



Démonstration

Je dis que le rectangle compris du sinus DI et de la touchante EE est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les parallèles) et le rayon AB. Car le rayon AD est au sinus DI, comme EE, à RR ou à EK. Ce qui paraît clairement à cause des triangles rectangles et semblables DIA et EKE, l'angle EEK ou EDI étant égal à l'angle DAI.

On remarque la complexité de l'énoncé qui signifie simplement que

$$\overline{DI} \times \overline{EE} = \overline{AB} \times \overline{RR}, \text{ ou } \overline{DI} \times \overline{EE} = \overline{AD} \times \overline{RR}$$

ou encore:

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{RR}}{\overline{EE}}$$

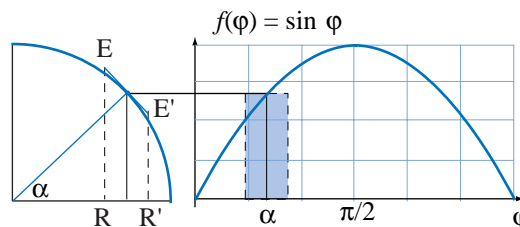
Cette proportion découle du fait que les triangles DIA et EKE, sont semblables. Pascal exprime une proportion comme l'égalité de l'aire de deux rectangles, ce qui est une caractéristique de l'approche géométrique qu'il privilégiait. Dans la figure qui précède, le triangle EKE est appelé *triangle caractéristique* par Pascal. Il aurait pu découvrir le calcul différentiel à partir de ce triangle caractéristique mais il ne s'intéressait pas au problème de la tangente. Leibniz aurait déclaré que c'est la lecture de ce traité et l'usage du triangle caractéristique qui lui ont inspiré l'invention du calcul différentiel.

Cette proportion découle du fait que les triangles DIA et EKE, sont semblables. Pascal exprime une proportion comme l'égalité de l'aire de deux rectangles, ce qui est une caractéristique de l'approche géométrique qu'il privilégiait. Dans la figure qui précède, le triangle EKE est appelé *triangle caractéristique* par Pascal. Leibniz déclare que c'est la lecture de ce traité et l'usage du triangle caractéristique qui lui ont inspiré l'invention du calcul différentiel.

Voyons la signification graphique de ce lemme. L'aire du rectangle ombré sous la courbe du sinus dans la

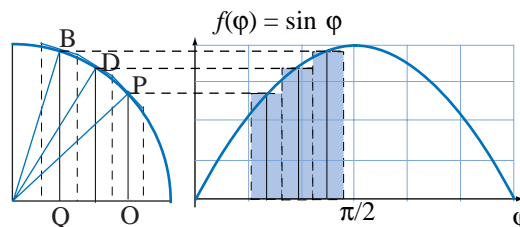
figure suivante est égale à l'aire du rectangle dont la base est $\overline{RR'}$ et la hauteur est le rayon du quart de cercle. Si le rayon est unitaire, on a :

$$A = \overline{RR'} = \overline{RR'} \sin \alpha$$



Pascal poursuit avec l'énoncé de propositions qu'il démontre en ayant recours au lemme précédent. Nous allons présenter la signification en écriture moderne de ces propositions.

Cette représentation graphique nous permet d'imaginer comment PASCAL va procéder pour démontrer sa première proposition.

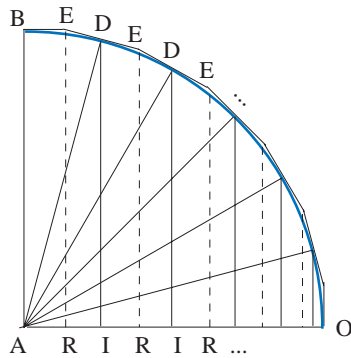


Voici comment Pascal démontre la première proposition.

Soit un arc quelconque BP divisé en un nombre indéfini de parties aux points D, d'où soient menés les sinus PO, DI, etc. Je dis que la somme des sinus DI (multipliée par chacun des arcs égaux DD, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite AO multipliée par le rayon AB.

Car en menant de tous les points D les touchantes DE, dont chacune coupe sa voisine aux points E, et ramenant les perpendiculaires ER, il est visible que chaque sinus DI, multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR multipliée par le rayon AB.

Donc tous les rectangles ensemble des sinus DI , multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble faits de toutes les portions RR avec le rayon AB ; c'est-à-dire (puisque'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus, et que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus est égale à la somme des distances RR , ou à AO multipliée par AB . Mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD . Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux est égale à la distance AO multipliée par le rayon.



Pascal fait une mise en garde après cette démonstration dont le libellé est très intéressant.

AVERTISSEMENT

Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble RR sont égales à QO , et de même que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD , on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude des sinus est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE , ne diffère de l'arc entier BP , ou de la somme de tous les arcs égaux DD , que d'une quantité moindre qu'aucune donnée; non plus que la somme des RR de l'entière QO .

REMARQUES

On constate que l'idée de limite se profile dans l'argumentation de PASCAL. On remarque également que dans la généralisation de ses propositions, Pascal écrit : « et ainsi à l'infini » alors que dans l'avertissement accompagnant sa démonstration, il écrit «[...] quand la multitude des sinus est indéfinie ». La généralisation de ses propositions constitue un « *infini potentiel* » au sens d'ARISTOTE alors que dans la démonstration, il est question d'un arc de cercle qui est divisé en petits arcs dont le nombre ne peut être considéré infini sans accepter l'existence de « *l'infini en acte* ». Comme ses prédécesseurs, influencés par les paradoxes de ZÉNON et la pensée d'ARISTOTE, PASCAL évite de recourir à l'infini en acte dans ses démonstrations. Les paradoxes de ZÉNON ont en effet montré que le recours à la notion d'infini dans un raisonnement pouvait enlever toute crédibilité à celui-ci.

CONCLUSION

Cette présentation ne donne qu'une petite idée des travaux de Pascal en intégration. Nous n'avons présenté ici que le contenu de deux pages du traité des sinus du quart de cercle. Pascal a laissé une oeuvre remarquable compte tenu de sa santé fragile, de son décès prématuré, à 39 ans, et du fait qu'il a consacré beaucoup de temps aux affaires religieuses. Tout comme Torricelli, il est mort trop jeune pour que l'on puisse véritablement juger de son génie mais il a eu le temps d'obtenir des résultats intéressants en géométrie projective et dans le calcul des probabilités, de développer l'induction mathématique et d'effectuer l'intégration des puissances des sinus.

Pascal, Blaise. Oeuvres complètes. Texte établi et annoté par Jacques Chevalier. Paris, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, 1957.