L'ORBITE DE MARS

Préparé par : André Ross
Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

INSTRUMENTS ET MATÉRIEL NÉCESSAIRE

Tablette de papier quadrillé, une règle graduée en centimètres, un rapporteur d'angles, des punaises et une ficelle.

Mesures effectuées par Tycho Brahe

Date de l'observation	Terre Longitude héliocentrique	Mars Longitude géocentrique
17 février 1585	159°23'	135°12'
5 janvier 1587	115°21'	182°08'
19 septembre 1591	5°47'	284°18'
6 août 1593	323°26'	346°56'
7 décembre 1593	85°23'	3°04'
25 octobre 1595	41°42'	49°42'
28 mars 1587	196°50'	168°12'
12 février 1589	153°42'	218°48'
10mars 1585	179°41'	131°48'
26 janvier 1587	136°06'	184°42'

COMMENTAIRES

Le tableau ci-contre qui provient des observations de Tycho Brahe est utilisé par Kepler dans *Astronomia Nova*.

Kepler aurait quelques fois interpolé pour obtenir les dates souhaitées.

ACTIVITÉ

1. Placer la feuille de papier quadrillé en position « paysage » et déterminer son point milieu. Noter ce point S, il indiquera la position du Soleil.
2. À partir de la position du Soleil, tracer une demi-droite parallèle au quadrillage de la feuille jusqu'à son côté droit.
3. Tracer un cercle de 5 cm de rayon pour représenter l'orbite terrestre.

COMMENTAIRES

1. Le point S représente la position du Soleil
2. Cette demi-droite donne la position 0° dans l'espace. C'est la direction du Soleil telle que vue de la Terre à l'équinoxe vernal (printemps). Ce point est à la rencontre du plan équatorial et du plan de l'écliptique. Il est appelé « premier point du Bélier » et représenté par les cornes schématisées d'un bélier ♈.
3. L'orbite terrestre est en réalité une ellipse, mais son excentricité est de 0.016. Le cercle est assez proche de l'orbite terrestre pour l'objectif visé par le présent laboratoire.

4. En utilisant le rapporteur d'angles centré au Soleil, et en prenant l'équinoxe vernal comme ligne de départ, déterminer les positions de la Terre sur son orbite à l'aide des longitudes héliocentriques de la Terre pour les deux premières dates du tableau.

5. Pour chacune de ces positions de la Terre, utiliser le rapporteur d'angles centré sur la Terre. Prendre dans chaque cas la parallèle à l'équinoxe vernal comme direction 0˚. Déterminer les directions des longitudes géocentriques de Mars. Tracer, à partir de chaque position de la Terre, les demi-droites orientées par ces longitudes géocentriques. Le point de rencontre de ces demi-droites est une position de la planète Mars sur son orbite, notons-la P_1.

6. Refaire le même travail pour les quatre autres paires de mesures.

7. Kepler avait choisi les deux premiers points comme périhélie et aphélie de Mars. Joindre ces deux points et déterminer le point milieu du segment obtenu. En prenant ce point comme centre et sa distance au périhélie (ou à l'aphélie), tracer le cercle passant par le périhélie et l'aphélie. Votre cercle passe-t-il par les cinq points? Commenter.

8. Le rayon du cercle que vous avez tracé représente la distance moyenne de la planète Mars au Soleil. Exprimer cette distance en unité astronomique (UA).

9. Calculer l'excentricité de l'ellipse formant l'orbite de Mars.

10. À partir de votre représentation de l'orbite de Mars, expliquer pourquoi c'est toujours en août que la planète Mars est le plus proche de la Terre.

11. En utilisant la méthode d'Anthémius de Thralles (voir annexe) tracer l'orbite elliptique de Mars.

12. Calculer la *longitude du périhélie de Mars.*

COMM ENTAIRES

4. Les longitudes héliocentriques de la Terre sont les longitudes de la Terre vue du Soleil. Le point d'observation est quand même terrestre, il suffit de soustraire de 360° à l'angle mesuré de la Terre.

5. Les longitudes géocentriques de Mars sont les longitudes de la planète Mars vue de la Terre.

6. Les dix mesures permettent de déterminer cinq points de l'orbite de Mars.

7. Comme périhélie et aphélie, il devait choisir des points en opposition sur l'orbite de Mars. Si l'orbite de Mars est circulaire, le point milieu du segment joignant le périhélie et l'aphélie doit être le centre de l'orbite.

8. L'unité astronomique UA est la distance de la Terre au Soleil, soit 5 cm dans votre représentation graphique.

9. L'excentricité de l'ellipse est le rapport de la distance du Soleil au centre de l'ellipse sur la demi-longueur du grand axe.

12. La longitude du périhélie, notée £, est mesurée dans le sens antihoraire entre l'équinoxe vernal et le grand axe de l'orbite de Mars.

13. Comparer aux valeurs modernes celles que vous avez obtenues pour *a*, *e* et £. Calculer la différence entre vos valeurs et celles-ci. Exprimer cette différence en pourcentage d'erreur avec les valeurs modernes.

14. Mesurer la plus courte distance entre l'orbite de la Terre et celle de Mars lorsque les deux sont en opposition à l'aphélie de Mars.

15. Expliquer pourquoi la distance entre la Terre et Mars n'est pas toujours la même lorsqu'ils sont en opposition. Pourquoi les oppositions à la distance minimale se produisent-elle toujours en août?

16. Si l'orbite est réellement une ellipse la longueur de la demi de son petit axe devrait être $b = a(1 - e)^{1/2}$. En utilisant vos données, calculer le rapport *b/a* pour la planète Mars. Cette valeur est-elle comparable à celle que vous pouvez mesurer dans la représentation graphique? Commenter.

BIBLIOGRAPHIE

Gingerich, Owen, Laboratory Exercise in Astronomy, the orbit of Mars, Sky and Telescope, Octobre, 1983.

Les génies de la science, Pour la science, Kepler, le musicien du ciel, Trimestriel août 2001- novembre 2001.

Les génies de la science, Pour la science, Galilée, novembre 1999.

Les cahiers de Science et Vie, Les pères fondateurs de la science, Kepler, hors série N°21, juin 1994.

Les cahiers de Science et Vie, Révolutions scientifiques, Nicolas Copernic, hors série N°39, juin 1997.

Les cahiers de Science et Vie, Dossier, Galilée, un génie redécouvert, février 2001.

Astronomy before the telescope, Édité par Christopher Walker, The trustees of the British Museum St.Martin press, New-York

13. Les valeurs modernes pour *a*, *e* et £ sont a = 1,542 UA, e = 0,093 et £ = 335°.

14. Deux planètes sont en opposition lorsqu'elles sont dans des positions diamétralement opposées de leur orbite.

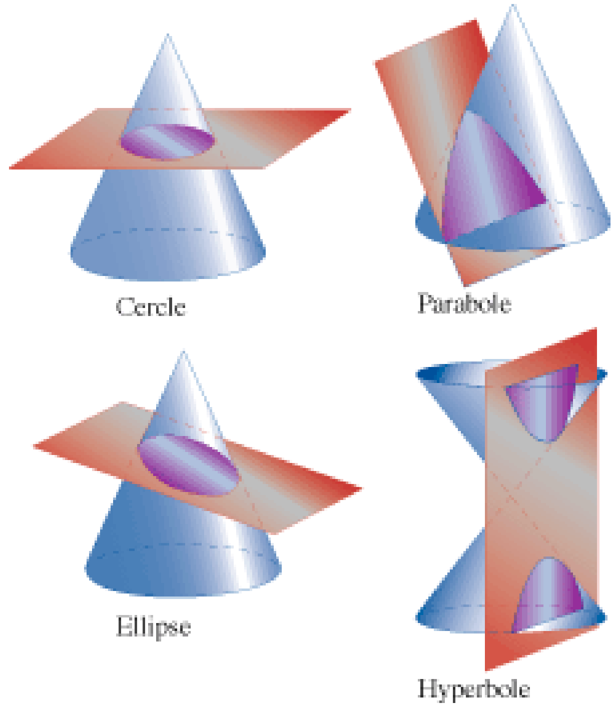
SECTIONS CONIQUES

par : André Ross

Le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole ont une caractéristique commune : ce sont toutes des figures obtenues en sectionnant un cône à l'aide d'un plan. C'est pourquoi on les appelle *sections coniques.*

Le cercle est obtenu en sectionnant le cône à l'aide d'un plan parallèle à la base du cône tandis que l'ellipse est obtenue en sectionnant le cône à l'aide d'un plan qui n'est pas parallèle à la base mais dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est plus petit que l'angle à la base du cône. En sectionnant un cône à l'aide d'un plan dont l'angle avec l'horizontale est le même que l'angle à la base du cône, on obtient une parabole. L'hyperbole est la figure géométrique obtenue en sectionnant un cône à l'aide d'un plan dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est plus grand que l'angle à la base du cône.

Ces figures ont été étudiées pour la première fois par Menechme, astronome et géomètre grec. Celui-ci a certainement démontré plusieurs propriétés des coniques. Cependant, aucun document n'atteste sa paternité. Les quatre livres qu'Euclide a écrit sur les coniques ne nous sont pas parvenus non plus. C'est Pappus qui nous apprend qu'Euclide a rédigé de tels ouvrages. Apollonios est certainement le plus chanceux des trois, car quatre des huit livres de son traité sur les sections coniques nous sont parvenus. Il a désigné les sections coniques en leur donnant les noms de *parabole*, d'*ellipse* et d'*hyperbole*. Dans les huit livres de son traité, il démontre quelques 400 propriétés.



MENECHME

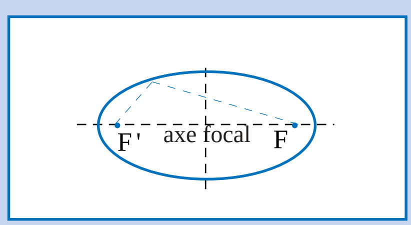
Menechme fut un élève du mathématicien Eudoxe de Cnide (vers 408 à 355 av.J.-C.). Il s'est fait connaître surtout comme astronome et géomètre. Sa plus importante contribution fut la découverte des sections coniques qui lui a permis de résoudre le problème de la duplication du cube. Son frère Dinostrate a également été mathématicien.

APOLLONIOS

Apollonios naquit à Perga, une ville grecque d'Asie mineure qui fait maintenant partie de la Turquie. Il se rendit à Alenandrie pour y étudier avec les successeurs d'Euclide. Il a été un astronome et mathématicien de talent. Sa renommée est surtout basée sur son traité *Sections coniques.* Ce traité comporte huit livres dont seulement quatre nous sont parvenus dans le texte grec original.

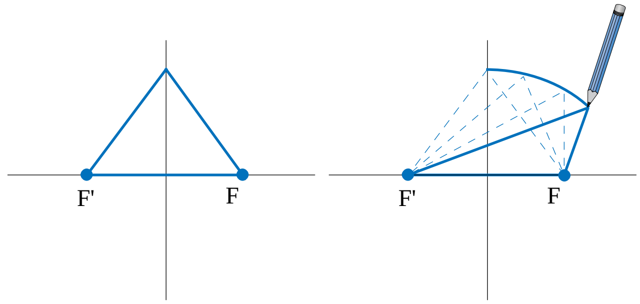
Ellipse

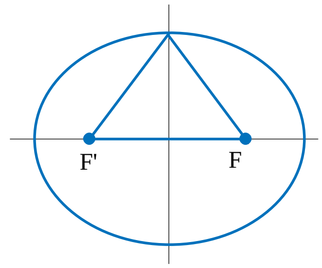
L'ellipse est la figure géométrique formée par les points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Les points fixes sont appelés les *foyers*, la droite passant par les deux foyers est appelée l'axe *focal* et la droite perpendiculaire à l'axe focal et passant par le centre de l'ellipse est appelée l'axe *conjugué.*



Technique pour tracer une ellipse

À l’aide de deux clous et d’une corde, on peut tracer une ellipse dont on connaît les foyers et la somme des distances aux foyers. On plante les clous aux foyers et on forme une boucle de corde dont la longueur est égale à la somme des distances aux foyers d’un point de l’ellipse et de la distance entre les foyers. On trace alors l’ellipse en déplaçant le crayon tout en maintenant la corde tendue.





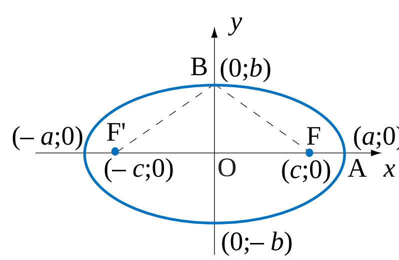
Paramètres de l’ellipse

Pour trouver l’équation d’une ellipse, il faut déterminer certains de ses paramètres. Pour ce faire, considérons une ellipse dont l’axe focal est horizontal puis traçons un système d’axes dont l’origine est le point milieu entre les foyers. Représentons par a la demi-longueur de l’axe focal, par b la demi-longueur de l’axe conjugué et par c la distance du centre de l’ellipse à un de ses foyers. Considérons le sommet A de coordonnées (a; 0): sa distance au foyer F est $m\text{AF} = a - c$ et sa distance au foyer F' est $m\text{AF}' = a + c$. La somme des distances est alors :

$$m\text{AF} + m\text{AF}' = (a - c) + (a + c) = 2a$$

Considérons maintenant le point B de coordonnées (0;b). La symétrie de l’ellipse permet de conclure que sa distance au foyer F est égale à sa distance au foyer F'. La somme des distances est donc $m\text{BF} + m\text{BF}' = 2a$, d’où $2m\text{BF} = 2a$, ce qui donne : $m\text{BF} = a$. Par conséquent, l’hypoténuse du triangle rectangle OBF dont les sommets sont (0; b), (0; 0) et (c; 0) est de longueur a et, par le théorème de Pythagore, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

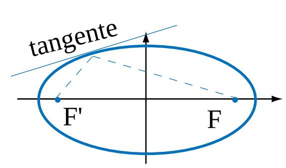


ANTHÉMIUS DE THRALLE

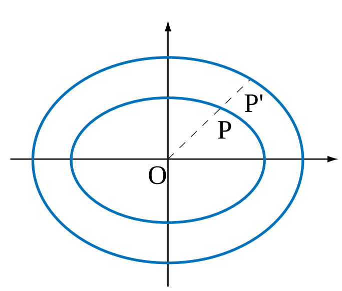
Anthémius de Thralle (475-534) était mathématicien et architecte. C’est lui qui décrivit le premier la technique utilisant une corde fixée aux deux foyers pour tracer une ellipse. Son ouvrage comportait également la description des propriétés focales de l’ellipse. Il n’utilise cependant pas le mot « foyer ». Cette appellation est due à Kepler qui, dans ses études sur les lentilles, a constaté que la propriété de convergence de la lumière entre ces deux points.

Aspects intéressants de l’ellipse

Les droites joignant un point quelconque d’une ellipse aux foyers forment des angles égaux avec la tangente en ce point. Par conséquent, Si une source lumineuse est placée à un des foyers d’un réflecteur dont la surface est engendrée par la rotation d’une ellipse autour de son axe focal, tous les rayons sont réfléchis à l’autre foyer.



Toutes les ellipses pour lesquelles le rapport c/a est égal sont semblables. Si deux ellipses sont tracées concentriquement, comme à la figure ci-contre, le rap-



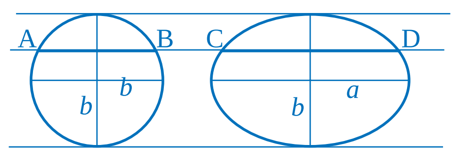
port OP/OP' est constant quelle que soit la position de la droite OPP'.

Les orbites de la Terre et des autres planètes ainsi que celles de leurs lunes sont elliptiques. La comète de Halley a une trajectoire elliptique dont le Soleil est un des foyers. En architecture, les arcs elliptiques sont utilisés pour leur beauté.

Aire de la surface de l'ellipse

Dans son *Traité des indivisibles* paru en 1635, le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri, qui fut élève de Galilée, élabore une méthode pour calculer les aires et les volumes. Le fondement de sa méthode pour le calcul des aires s'énonce comme suit :

> *Si deux figures sont comprises entre deux parallèles (ont même hauteur) et si des sections qui sont obtenues par des lignes parallèles aux deux autres sont toujours dans un rapport donné, alors les aires des deux figures sont aussi dans le même rapport.*



En appliquant ce principe à un cercle de rayon b et une ellipse dont les demi-longueurs des axes sont a et b, il obtient que les segments CD et AB sont toujours dans le rapport a/b, c'est-à-dire :

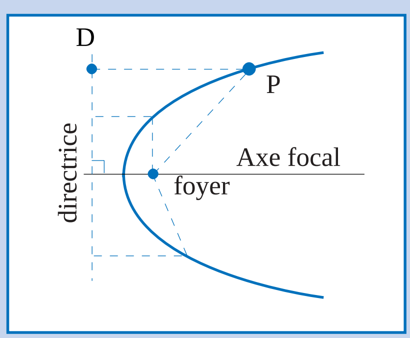
$$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{a}{b}\overline{\mathrm{AB}}$$

Cette caractéristique étant vraie pour tous les segments, il en conclut que l'aire de l'ellipse et l'aire du cercle sont dans le même rapport. Puisque l'aire du cercle est πb^2, il obtient que l'aire de l'ellipse est πab puisque :

$$A = \frac{a}{b} \times \pi b^2 = \pi ab$$

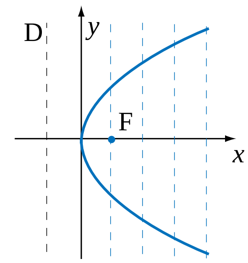
Parabole

Analytiquement, la *parabole* est le lieu des points dont la distance non dirigée à un point fixe appelé *foyer* est égale à la distance non dirigée à une droite fixe appelée *directrice*. La distance d'un point au foyer est appelée *distance focale*. On constate facilement que le point sommet de la parabole est le point milieu entre le foyer et la directrice.

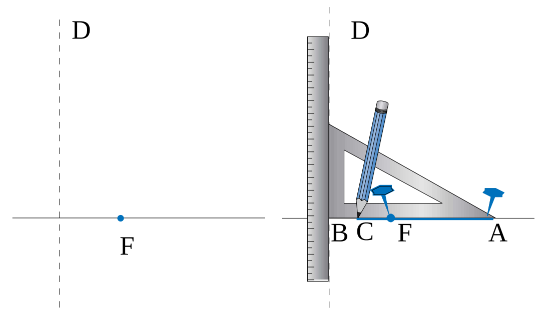


Techniques pour tracer une parabole

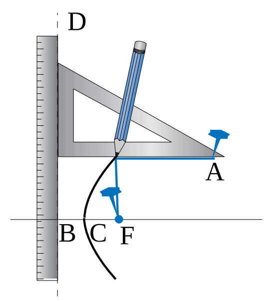
Lorsqu'on connaît le foyer et la directrice d'une parabole, on peut facilement esquisser le graphique de la façon suivante.



On détermine d'abord le sommet qui, selon la définition de la parabole, est à mi-chemin entre la directrice et le foyer. On trace une famille de droites parallèles à la directrice D. Pour chacune de ces droites parallèles et en prenant le foyer comme centre, on trace un arc de cercle dont le rayon est la distance entre la directrice et la droite. Les points d'intersection de l'arc de cercle avec la droite parallèle à la directrice sont alors deux points de la parabole.

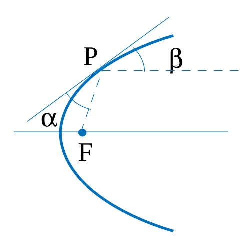


On peut également tracer une parabole dont la directrice et le foyer sont connus à l'aide d'une règle et d'une équerre. À l'aide de punaises plantées au foyer et à l'extrémité de l'équerre, on fixe un fil dont la longueur est la même que l'équerre. On tend ensuite ce fil à l'aide de la pointe d'un crayon et on glisse l'équerre le long d'une règle placée le long de la directrice.

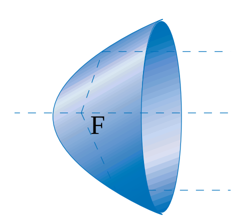


Aspects intéressants de la parabole

La parabole a une propriété optique fort intéressante. Si on prend un point P quelconque d'une parabole et que l'on trace la tangente à la parabole en ce point, la droite joignant le point P au foyer fait avec la tangente le même angle que la droite partant du point P et parallèle à l'axe de la parabole. C'est-à-dire que l'angle α est égal à l'angle β dans la figure ci-contre.



Cette propriété signifie qu'un rayon lumineux qui est issu du foyer sera réfléchi parallèlement à l'axe de la parabole. De la même façon, un rayon lumineux parallèle à l'axe de la parabole sera réfléchi au foyer. La paraboloïde qui est la figure obtenue en faisant tourner une parabole autour de son axe a également cette propriété.



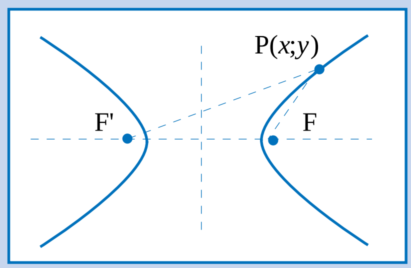
Ainsi, Si l'on place une source lumineuse au foyer d'un paraboloïde, les rayons lumineux seront réfléchis sur la surface paraboloidale parallèlement à l'axe du paraboloïde. Le faisceau lumineux obtenu sera très puissant puisque tous les rayons lumineux seront réfléchis parallèlement à l'axe. Les phares d'automobile et les lampes de poche sont des exemples d'utilisation de cette propriété.

De la même façon, les rayons lumineux qui pénètrent dans un paraboloïde parallèlement à l'axe sont réfléchis au foyer. Cette propriété sert à concentrer les rayons lumineux ou sonores comme dans le radiotélescope, le radar, les capteurs d'énergie solaire.

Signalons de plus que la surface d'un liquide contenu dans un cylindre en rotation forme un paraboloïde et que la trajectoire de certaines comètes est une parabole ayant le soleil comme foyer. La courbe décrite par les câbles d'un pont suspendu (pont Pierre-Laporte) est une parabole, le poids du pont étant réparti également entre chaque point du câble.

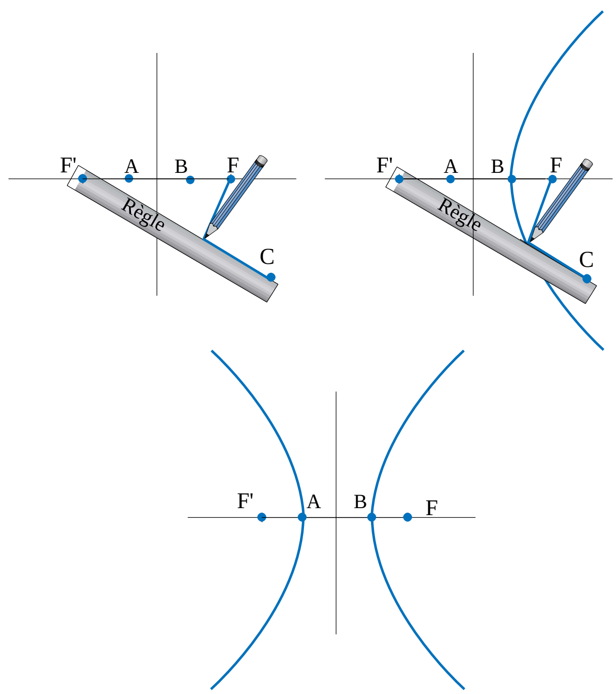
Hyperbole

Analytiquement, *l'hyperbole* est la figure géométrique formée par les points dont la différence des distances à deux points fixes est constante. Les points fixes sont appelés les *foyers*, la droite passant par les foyers est appelée l'axe *focal* et la droite perpendiculaire à cet axe passant par le centre de l'hyperbole (point milieu entre les sommets) est appelée l'axe *conjugué*.



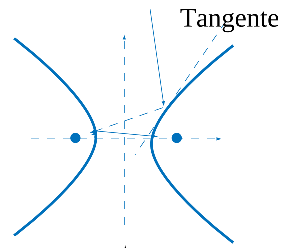
Technique pour tracer une hyperbole

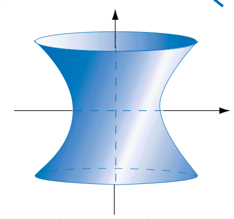
On peut produire une hyperbole à l'aide d'un crayon guidé par une corde fixée à l'un des foyers F et à l'extrémité C d'une règle de longueur arbitraire pivotant autour de l'autre foyer F'. La longueur de la corde doit être égale à *m*F'C moins la distance entre les sommets.



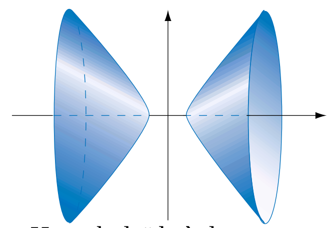
Aspects intéressants de l'hyperbole

L'hyperbole a également une propriété optique intéressante, les droites qui joignent un point quelconque de l'hyperbole aux foyers forment des angles égaux avec la tangente en ce point. Par conséquent, si la surface d'un réflecteur est engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de son axe conjugué, tous les rayons lumineux convergents vers un foyer, quelle que soit leur provenance, sont réfléchis à l'autre foyer. Cette propriété est utilisée dans certains télescopes en combinaison avec un réflecteur parabolique.





Hyperboloïde à une nappe



Hyperboloïde à deux nappes

La surface engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de son axe conjugué est un *hyperboloïde à une nappe*. C'est la forme des colonnes de refroidissement que l'on retrouve dans les centrales nucléaires. La surface engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de son axe focal est un *hyperboloïde à deux nappes*.

La loi de Boyle $pv = c$ est une relation hyperbolique impliquant la pression et le volume d'un gaz.

La différence de temps pour qu'un son parvienne en deux points distincts est proportionnelle à la différence des distances entre ces points et la source sonore. Cette source est donc sur une hyperbole dont les points sont les foyers. En utilisant un troisième point d'écoute avec l'un des deux premiers, on obtient une deuxième hyperbole et la source sonore est l'intersection des deux hyperboles. Cette propriété est utilisée pour détecter l'emplacement des batteries de canon par exemple.