

## JOHANNES KEPLER

par : André Ross  
professeur de mathématiques  
Cégep de Lévis-Lauzon



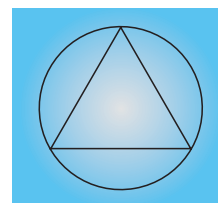
Johannes Kepler naquit le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt qui fait alors partie du duché de Wurtemberg. En septembre 1588, il réussit son examen de fin d'études et est admis au séminaire supérieur de Tübingen.

Durant son séjour au séminaire de Tübingen, il suit les cours d'astronomie de Michael Maestlin. Officiellement, celui-ci doit enseigner l'astronomie de Ptolémée, mais il initie ses meilleurs élèves à la théorie copernicienne. Kepler est passionné au point qu'il consacre ses énergies à l'étude de cette science, il est donc très tôt copernicien. Il est également platonicien et est convaincu que l'univers a été créé à partir d'un plan géométrique simple et beau.

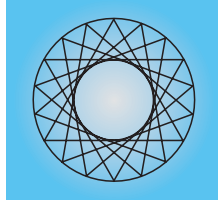
En poursuivant ses études à Tübingen, Kepler envisageait de devenir pasteur luthérien, mais, avant de terminer, il est appelé à Graz comme Mathématicien provincial et professeur de morale et de mathématiques à l'école secondaire protestante de Graz. Il est alors âgé de vingt-trois ans.

## CORPS RÉGULIERS ET MODÈLE

À l'époque de Kepler, les modèles décrivant les mouvements planétaires étaient devenus très complexes. Profondément croyant, Kepler était convaincu que ces modèles ne pouvaient être ceux choisis par Dieu pour créer l'univers. Selon lui Dieu avait nécessairement choisi des modèles simples et beaux. Cette conviction a présidé à toutes ses recherches. Découvrir les lois à partir desquelles Dieu avait créé l'univers, c'était pour Kepler, rendre hommage à Dieu. La première théorie ébauchée par Kepler témoigne de cette quête mystique. Il eut l'intuition de ce modèle durant un de ses cours de géométrie en observant un triangle équilatéral inscrit dans un cercle.

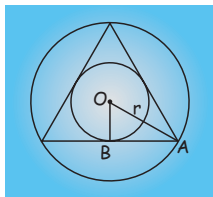


En considérant que le cercle est en rotation à une vitesse uniforme et que le triangle est entraîné dans cette rotation, il obtient la figure suivante.



La trace laissée lors de la rotation révèle un cercle. C'est le cercle inscrit dans le triangle équilatéral.

Le rayon de ce cercle inscrit peut être facilement déterminé si on connaît le rayon du cercle circonscrit.



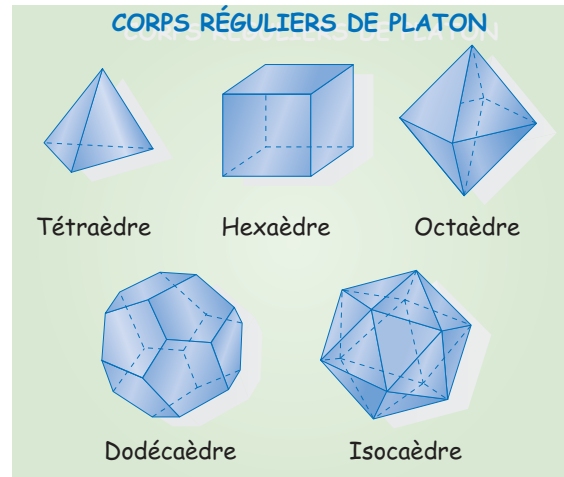
Dans le triangle OAB, l'hypoténuse et le rayon du cercle circonscrit et le côté OB et le rayon du cercle inscrit. De plus, l'angle en A est de  $30^\circ$ . Or, dans un triangle rectangle qui a un angle de  $30^\circ$ , le côté opposé à l'angle de  $30^\circ$  est égal à la moitié de l'hypoténuse. Par conséquent, le rayon du cercle inscrit est égal à  $r/2$ . On a donc une relation très simple entre les rayons de ces cercles.

Cette propriété peut-elle permettre de découvrir le secret de l'harmonie céleste? Kepler le croit. Il sait que dans ses *Éléments*, Euclide a démontré des propriétés analogues pour les corps réguliers de Platon. Chacun de ces corps peut être inscrit dans une sphère et circonscrit à une autre sphère. On peut donc établir une relation entre les rayons de la sphère circonscrite et de la sphère inscrite dans chacun de ces corps réguliers.

Kepler fit un rapprochement entre le nombre de corps réguliers de Platon et les planètes connues à l'époque. Il tenta donc d'expliquer les positions relatives des planètes à l'aide des corps réguliers de Platon. Impressionné par le fait qu'il n'existait que 5 polyèdres réguliers, les cinq corps de Platon, il croyait que ceux-ci avaient été utilisés par Dieu pour créer l'univers.

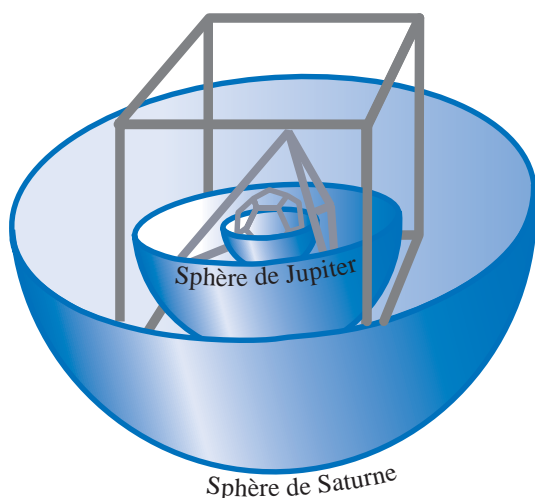
Dans la préface de *Mystère du Cosmos*, publié en 1596, il écrit :

*Je vais tenter de prouver que Dieu en créant l'univers et en déterminant l'ordre dans le cosmos a utilisé les cinq corps réguliers de la géométrie, connus depuis l'époque de Pythagore et Platon.*



Kepler supposa que Saturne, la plus éloignée des planètes connues à l'époque se déplaçait sur une sphère dont le centre était le Soleil. Il supposa de plus qu'à l'intérieur de cette sphère était inscrit un cube (hexaèdre) à l'intérieur duquel était inscrite une deuxième sphère sur laquelle se déplaçait la planète Jupiter. La sphère de Jupiter contenait un tétraèdre à l'intérieur duquel était inscrite une troisième sphère sur laquelle se déplaçait la planète Mars.

En utilisant les cinq corps réguliers, il obtenait ainsi six sphères, ce qui correspondait au nombre de planètes connues à l'époque. Cette coïncidence semblait à Kepler un argument de poids en faveur de sa théorie. Une fois connu le rayon de la sphère extérieure, soit la distance du Soleil à Saturne pour rayon de la sphère extérieure, il espérait pouvoir calculer les rayons des autres sphères et obtenir ainsi les distances du Soleil aux autres planètes. Le projet de Kepler était ambitieux, mais son modèle a été invalidé par la découverte d'autre planète.

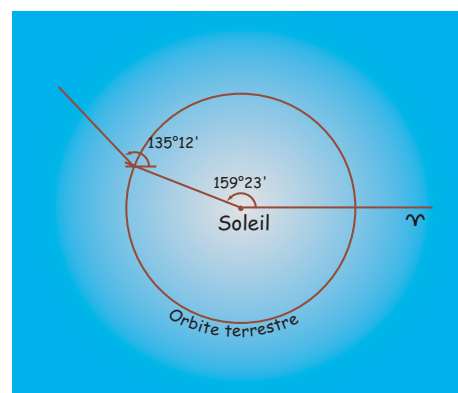


### L'ORBITE DE MARS

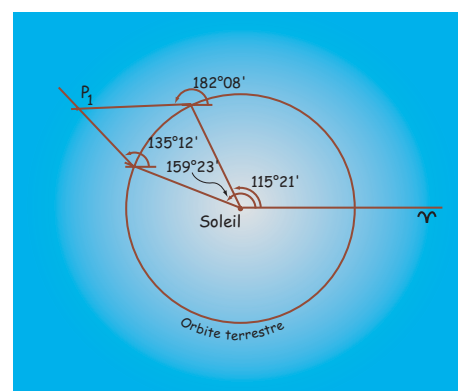
En 1600, Kepler est chassé de l'école par les persécutions religieuses de la Contre-Réforme. En quittant Graz, Kepler se joint à Tycho Brahe à Prague en 1600. À la mort de Tycho en octobre 1601, Kepler hérite des observations de celui-ci et l'empereur Rodolphe le nomme Mathématicien de Sa Majesté Très Chrétienne. Les observations de la planète Mars faites par Tycho Brahe ont été particulièrement utiles à Kepler.

OBSERVATIONS DE MARS PAR TYCHO		
Date de l'observation	Terre Longitude héliocentrique	Mars Longitude géocentrique
17 février 1585	159°23'	135°12'
5 janvier 1587	115°21'	182°08'
19 septembre 1591	5°47'	284°18'
6 août 1593	323°26'	346°56°
7 décembre 1593	85°23'	3°04'
25 octobre 1595	41°42'	49°42'
28 mars 1587	196°50'	168°12'
12 février 1589	153°42'	218°48°
10 mars 1585	179°41'	131°48'
26 janvier 1587	136°06'	184°42'

Considérons le Soleil au centre de l'orbite terrestre et prenons le point vernal (équinoxe de printemps) comme la direction 0°. En reportant la longitude héliocentrique de 159°23' de la Terre, on détermine la position de la Terre par rapport au Soleil. Puis, à partir de cette position, on peut tracer la droite donnant la direction de la planète Mars puisque sa longitude par rapport à la Terre est alors de 135°12'.



En procédant de la même façon pour les données du 5 janvier 1587, soit 115°21' pour la longitude héliocentrique de la Terre et 182°08' pour la longitude géocentrique de Mars, on obtient la direction de Mars à cette date.

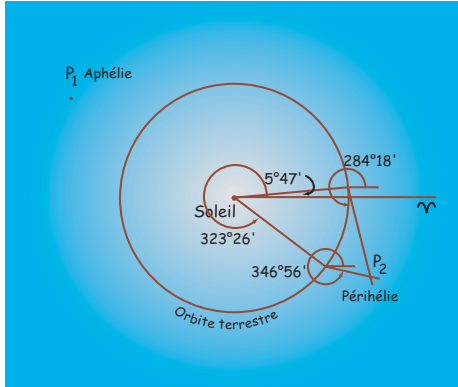


Le point de rencontre des directions de Mars du 17 février 1585 et du 5 janvier 1587 donne alors un premier point  $P_1$  de l'orbite de la planète.

En procédant de la même façon pour les données du 15 septembre 1591, et celles du 6 août 1593, on peut déterminer un deuxième point  $P_2$  de l'orbite de Mars. Ces deux points sont ceux choisis par Kepler pour l'aphélie et le périhélie de Mars.

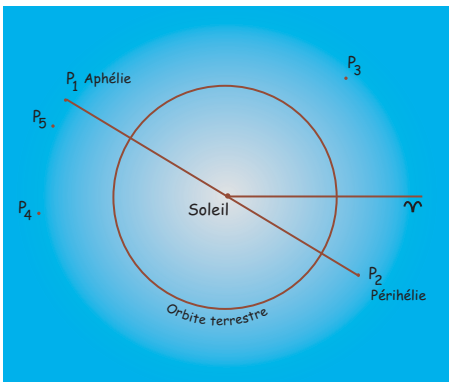
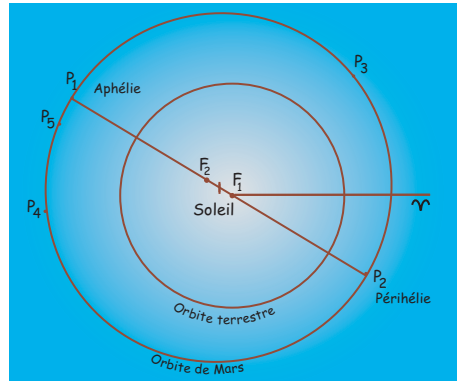
Aphélie : point de l'orbite d'une planète qui est le plus éloigné du Soleil.

Périhélie : point de l'orbite qui est le plus rapproché du Soleil.



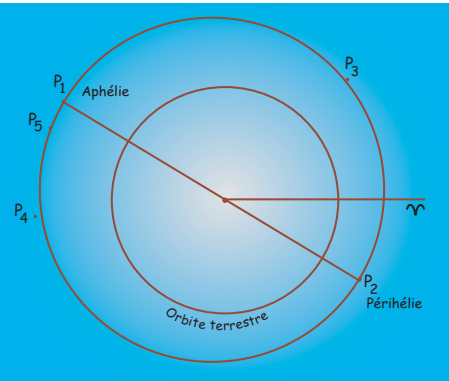
En procédant de la même façon pour les autres données, on obtient cinq points de l'orbite de Mars. En joignant le périhélie et l'aphélie de Mars, on obtient ce qui devrait être le diamètre de l'orbite de Mars si celle-ci est bien circulaire.

Puisque par trois points passe un et un seul cercle, on peut choisir trois des points et tracer le cercle qu'ils déterminent. Aucun des dix cercles ainsi tracés ne passe par les cinq points de l'orbite. L'orbite est-elle bien circulaire? En considérant plutôt une ellipse, le segment joignant le périhélie et l'aphélie est alors l'axe focal. En considérant que le Soleil est l'un des foyers, le second est à égale distance de l'autre côté du centre. On peut alors tracer une ellipse dont le paramètre  $a$  est la distance moyenne de la planète au Soleil.

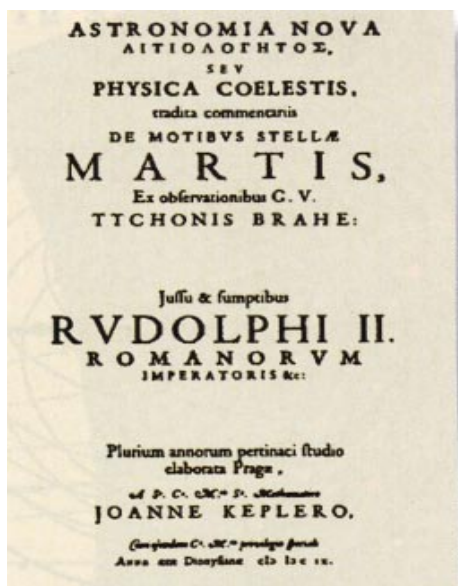


On peut alors déterminer le point milieu de ce diamètre et tracer le cercle passant par l'aphélie et le périhélie. Mais, ce cercle ne passe pas par tous les points de l'orbite.

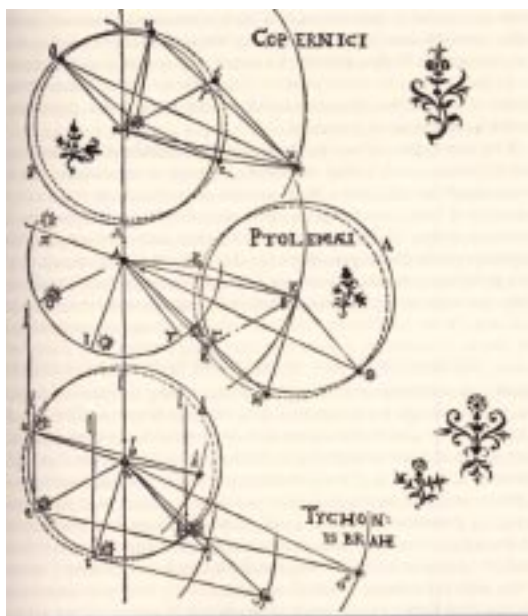
L'ellipse dont l'axe focal est le segment joignant le périhélie et l'aphélie est une meilleure représentation, un meilleur modèle des points de l'orbite de la planète Mars. Signalons toutefois que Kepler n'a pas procédé par une analyse graphique des données comme nous l'avons fait. C'est par des calculs échelonnés sur plusieurs années que Kepler est parvenu à montrer que les orbites des planètes étaient elliptiques. On considère aujourd'hui que c'est un heureux hasard qu'il se soit attaqué d'abord à l'orbite de Mars, car c'est la planète dont la trajectoire elliptique présente la plus grande excentricité. S'il avait commencé son étude par une autre planète, les différences entre les valeurs observées et le modèle circulaire n'auraient probablement pas été assez significatives et auraient pu être attribuées à des erreurs de mesure. Signalons également que la précision et la quantité des observations de Tycho Brahe ont été des facteurs déterminants. Si Kepler n'avait pu situer que trois points de l'orbite, le modèle circulaire aurait été retenu puisque par trois points on peut faire passer un et un seul cercle.



Kepler a communiqué les résultats de ses travaux sur l'orbite de Mars dans un ouvrage dédié à Rodolphe II. La page titre de cet ouvrage indique que les calculs sont basés sur les observations de Tycho Brahe.



Dans le chapitre XXIV de cet ouvrage, Kepler compare les calculs des orbites de Mars et de la Terre dans les systèmes de Copernic, de Ptolémée et de Tycho Brahe.



Dans ses derniers calculs, Kepler utilise les logarithmes inventés par le mathématicien écossais John Napier (1550-1617). Cette invention, qui date de 1614, avait pour but d'alléger les calculs des astronomes. Kepler a lui-même publié des tables de logarithmes en 1624. Elles seront rééditées tout au long du XVII<sup>e</sup> siècle.

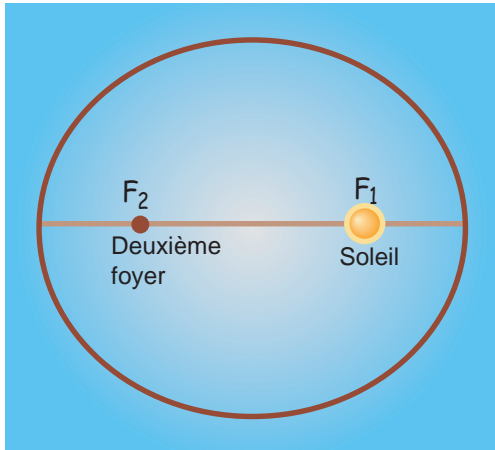


## LES LOIS DE KEPLER

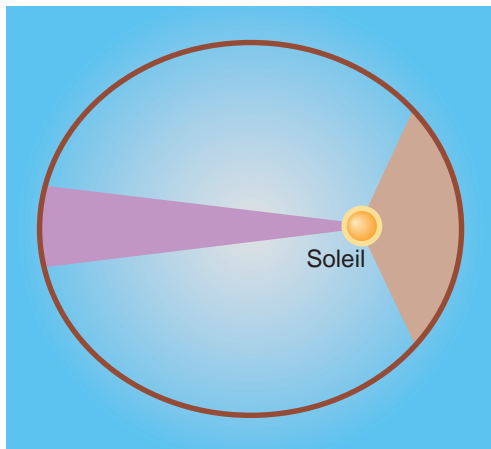
En utilisant les observations de Tycho Brahe, Kepler a poursuivi ses travaux sur l'orbite des autres planètes et a énoncé les trois lois des mouvements planétaires qui portent son nom. Les deux premières lois furent publiées en 1609 et la troisième en 1619. Ces lois constituaient un changement important. Avant l'énoncé de ces lois, on considérait que les planètes se déplaçaient sur des cercles à une vitesse constante. Les trajectoires devenaient elliptiques et les vitesses variables. Les lois des mouvements planétaires que Kepler a énoncées sont les suivantes :

**PREMIÈRE LOI**

Chaque planète décrit une ellipse dont un des foyers est occupé par le Soleil.

**DEUXIÈME LOI**

La droite joignant la planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux.

**TROISIÈME LOI**

Le carré du temps de révolution d'une planète autour de son orbite est proportionnel au cube de la distance moyenne au Soleil.

Mathématiquement, la troisième loi s'écrit :

$$T^2 = k r^3$$

La constante  $k$  étant la même pour toutes les planètes. Comme l'illustre le tableau suivant, cette troisième loi établit une relation entre les mouvements de toutes les planètes. L'unité astronomique (UA) est la distance moyenne de la Terre au Soleil

<b>RELATION ENTRE LES PÉRIODES ET LES DISTANCES MOYENNES</b>			
Planète	Rayon $r$ (UA)	Période $T$ (années)	$T^2/r^3$
Mercure	0,387	0,241	1,002
Vénus	0,723	0,615	1,001
Terre	1,000	1,000	1,000
Mars	1,524	1,881	1,001
Jupiter	5,203	11,862	0,999
Saturne	9,534	29,456	1,001

Selon Newton, la troisième loi implique que les masses des planètes sont nulles, ce qui n'est pas le cas. La troisième loi n'est vérifiée qu'à 0,1% près.

En 1612, Kepler a perdu sa femme et un de ses fils. Il quitte alors Prague pour devenir professeur dans un petit collège de Linz. En 1628, il se mit au service du Duc de Wallenstein à Sagan. Il est mort le 2 novembre 1630, à Ragensburg (Ratisbonne), où il était allé pour réclamer le règlement de ses arriérés de salaire.

**CONCLUSION**

Il restait un premier problème important :

*Quelle force maintient les planètes sur leur orbite autour du Soleil?*

Kepler, inspiré par les expériences sur le magnétisme de l'anglais William Gilbert (1554-1603) qui avait comparé la Terre à un aimant, suppose que le Soleil émet un magnétisme qui garde les planètes sur leur

orbite. Il n'échafaudera cependant pas de théorie sur cette vague idée.

Un deuxième problème important n'obtenait pas réponse dans les lois de Kepler.

*Comment expliquer les mouvements terrestres dans une telle représentation de l'Univers?*

L'idée du mouvement de la Terre entraînait toujours en contradiction avec la théorie du mouvement d'Aristote. C'est Galilée, par son étude du mouvement, qui apportera les premiers éléments de réponse à la deuxième question. Les travaux de Newton compléteront les réponses de us aurons des réponses satisfaisantes à ces deux questions.

Kepler était un très bon mathématicien. Ses travaux sur les mouvements planétaires l'ont amené à s'intéresser au calcul d'aires. D'autres questions relatives au calcul de volumes ont également occupé ses pensées. Il a réalisé des travaux importants en optique. Il est le premier à avoir affirmé que la vision était produite par une image formée sur la rétine. Il a expliqué la myopie, la presbytie et l'optique des lunettes. Il a fondé l'optique géométrique en faisant l'étude des lentilles et des télescopes. Il a étudié les lois de la réfraction pour améliorer les mesures astronomiques. En étudiant les lentilles provenant de sections coniques, il a décidé de nommer *foyers* les points où convergent tous les rayons émis par un autre *foyer*.

Lorsqu'il se hasardait à expliquer les causes des phénomènes physiques, Kepler tombait facilement dans le mysticisme et ce travers a nui à la reconnaissance de ses travaux. Cependant, par ses travaux, il a montré que les mathématiques sont indispensables dans la construction de la connaissance scientifique.

La démarche de Kepler a été de voir si les modèles échafaudés par les mathématiciens pouvaient servir à décrire les mouvements planétaires. Le premier mo-

dèle n'étant pas conforme à la réalité, il en a cherché un autre. Les orbites circulaires ont également été mises de côté car elles ne rendait pas compte des observations. Entre le modèle préconçu et les observations, il a choisi les observations et cherché un autre modèle. Pour rendre compte efficacement de la réalité, on doit juger la validité du modèle en tenant compte des observations.

C'est une démarche efficace de comparer les observations et les mesures des variables d'un phénomène physique à des modèles mathématiques connus et de retenir celui qui décrit le plus adéquatement le lien entre les variables. Les mathématiciens ont développé plusieurs formes générales de modèles à l'aide desquels on peut décrire beaucoup de phénomènes selon les valeurs assignées aux paramètres de ces modèles.

## BIBLIOGRAPHIE

- Astronomy before the telescope, Édité par Christopher Walker, The trustees of the British Museum St. Martin press, New-York.
- Gingerich, Owen, Laboratory Exercise in Astronomy- The orbit of Mars, Sky and Telescope, Octobre, 1983.
- Les génies de la science, Pour la science, Kepler, Le musicien du ciel, Trimestriel août 2001– novembre 2001.
- Les génies de la science, Pour la science, Galilée, novembre 1999.
- Les cahiers de Science et Vie, Les pères fondateurs de la science, Kepler, hors série N°21, juin 1994.
- Les cahiers de Science et Vie, Révolutions scientifiques, Nicolas Copernic, hors série N°39, juin 1997.
- Les cahiers de Science et Vie, Dossier, Galilée, un génie redécouvert, février 2001.