

# LE CALCUL INTÉGRAL ET LA FORMATION TECHNIQUE

**André Ross**

Cégep de Lévis-Lauzon

## INTRODUCTION

Les concepts du calcul différentiel et intégral sont une composante importante de la formation technique au collégial. Les besoins de formation sont cependant très différents de ceux des étudiants de sciences de la nature. L'enseignement traditionnel du calcul est-il adapté à la formation préalable des étudiants en techniques et à leurs besoins de formation ? Peut-on développer des approches nouvelles permettant l'acquisition des concepts fondamentaux du calcul chez les futurs techniciens ? Ces questions se posent avec insistance depuis la réforme de l'enseignement collégial.

On sait que les programmes techniques seront dorénavant définis par compétences, c'est-à-dire que les Cégeps recevront une liste de sept ou huit grandes compétences génériques et qu'ils devront définir localement les activités d'apprentissage, le découpage par cours et l'appartenance disciplinaire de ces cours. C'est localement qu'il faudra justifier les activités d'apprentissage en regard des compétences à développer et l'avancement des réflexions sur le sujet est préoccupant.

L'objectif de cet atelier est de donner un aperçu des approches pédagogiques pour l'enseignement du calcul intégral qui ont été développées dans le cadre de la révision des programmes des Technologies du génie électrique (TGÉ). Ces approches pourront peut-être servir aux enseignants de mathématiques qui auront à décrire localement l'apport du calcul différentiel et intégral dans la formation des futurs techniciens.

## DONNER UN SENS PHYSIQUE AU CONCEPT D'AIRE SOUS LA COURBE

Pour donner un sens aux concepts, il faut utiliser des situations ne nécessitant pas l'introduction de concepts trop compliqués mais permettant à l'étudiant de concevoir l'aire sous une courbe comme un instrument d'analyse et de description de phénomènes physiques. Le cas du mobile, initialement au repos, est particulièrement intéressant. Considérons un mobile, initialement au repos, qui a une accélération constante de  $0,2 \text{ m/s}^2$ , par exemple. À partir de la représentation graphique de cette situation, on peut donner un sens physique à l'aire sous la courbe en faisant constater que la vitesse atteinte après trois secondes, par exemple, est l'aire sous la courbe dans l'intervalle  $[0; 3]$  et, en généralisant, que la vitesse atteinte au temps  $t$  est l'aire sous la courbe dans l'intervalle  $[0;t]$ .

La figure formée étant un rectangle, il suffit de faire le produit de la base par la hauteur pour trouver l'aire et dans le cas présent, on décrit la vitesse au temps  $t$  par:

$$v(t) = 0,2 \text{ m/s}^2 \times t \text{ s} = 0,2t \text{ m/s}$$

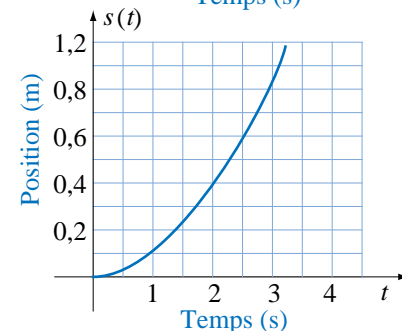
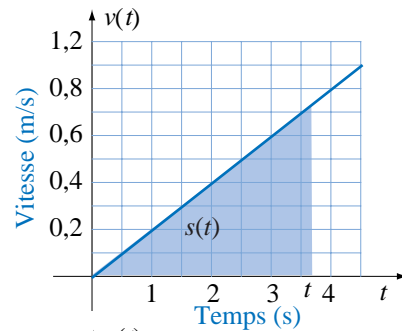
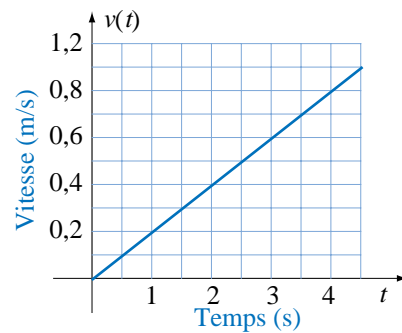
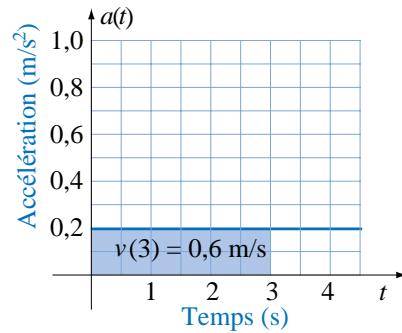
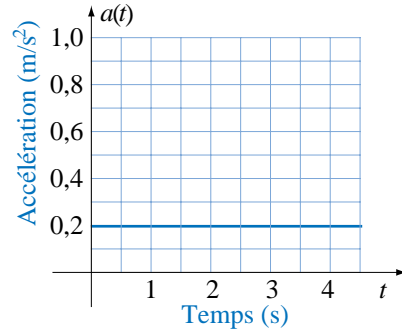
On peut alors faire ressortir le fait que la vitesse est décrite par un modèle affine et que sa représentation graphique est une droite de pente  $0,2 \text{ m/s}^2$ . Cette droite passe à l'origine puisque le mobile était initialement au repos. L'image en un instant donné par la fonction

$$v(t) = 0,2 \text{ m/s}^2 \times t \text{ s} = 0,2t \text{ m/s}$$

représente alors l'aire sous la courbe de l'accélération dans l'intervalle  $[0;t]$ .

On peut de la même façon, faire calculer la distance parcourue en différents instants et constater que, graphiquement, la distance parcourue au temps  $t$  est représentée par l'aire sous la courbe de la vitesse dans l'intervalle  $[0;t]$ . La figure formée étant un triangle, il suffit de faire le demi-produit de la base par la hauteur pour décrire la distance par une fonction, soit:

$$s(t) = \frac{0,2t \text{ m/s} \times t \text{ s}}{2} = 0,1t^2 \text{ m}$$



On peut alors généraliser cette situation en considérant une accélération constante de  $a \text{ m/s}^2$  et obtenir les modèles:

$$a(t) = a \text{ m/s}^2$$

$$v(t) = a t \text{ m/s}$$

$$d(t) = \frac{a}{2} t^2 \text{ m}$$

On peut également considérer le cas du mobile ayant une accélération constante  $a \text{ m/s}^2$  et une vitesse initiale  $v_0$  pour obtenir les résultats:

$$a(t) = a \text{ m/s}^2$$

$$v(t) = a t + v_0 \text{ m/s}$$

$$d(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t \text{ m}$$

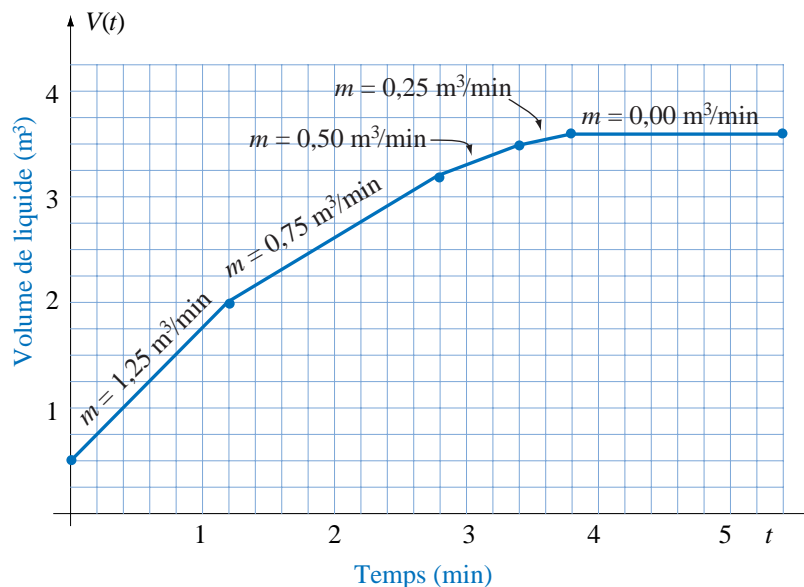
### LA DIFFÉRENTIELLE ET LE RÉSERVOIR

Le problème de réservoir permet d'insister sur le fait que l'aire sous la courbe représente une quantité physique, le volume de liquide accumulé dans le réservoir, et d'utiliser la notion de différentielle, soit l'accroissement de volume sur un intervalle de temps. Dans toutes les situations, on insiste pour que l'étudiant prenne en considération les unités de mesure. Considérons par exemple, un réservoir contenant initialement  $0,5 \text{ m}^3$  de liquide. On ouvre les vannes à pleine capacité pour emplir le réservoir et on diminue graduellement l'ouverture de ces vannes au fur et à mesure que le réservoir s'emplit. Initialement, l'ouverture des vannes permet une arrivée de liquide de  $V'(0) = 1,25 \text{ m}^3/\text{min}$ . On referme graduellement les vannes pour qu'il n'y ait pas de débordement et à chaque fois que l'ouverture des vannes a été diminuée, on a fait la lecture de l'indicateur de débit et on a obtenu les données suivantes:

$$V'(0) = 1,25 \text{ m}^3/\text{min}, V'(1,2) = 0,75, \text{m}^3/\text{min}$$

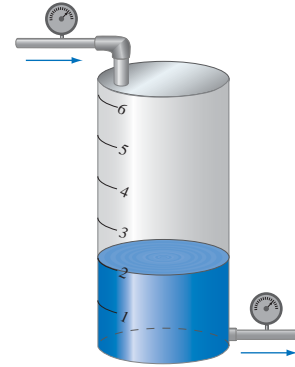
$$V'(2,8) = 0,50 \text{ m}^3/\text{min}, V'(3,4) = 0,25 \text{ m}^3/\text{min} \text{ et } V'(3,8) = 0,00 \text{ m}^3/\text{min}$$

À l'aide de ces données, l'étudiant doit alors représenter graphiquement la fonction décrivant le volume de liquide en fonction du temps  $t$ .



Le cas du réservoir est intéressant pour les étudiants du génie électrique car, en industrie, le niveau de liquide dans les réservoirs de refroidissement est contrôlé électroniquement. Considérons le cas suivant:

Un système de refroidissement comporte un réservoir d'eau doté d'un dispositif électronique permettant de contrôler la quantité de liquide dans le réservoir. À chaque minute, l'appareil de contrôle fait la lecture du niveau de liquide et commande l'ouverture d'une valve d'entrée lorsque le niveau est trop bas et d'une valve de sortie lorsque le niveau est trop élevé. Pour permettre un ajustement en douceur du niveau de liquide dans le réservoir, l'ouverture des vannes permet, par unité de temps, l'entrée ou la sortie de la moitié de la différence entre le niveau demandé et le niveau mesuré. La graduation du réservoir indique le nombre de litres de liquide dans le réservoir. Celui-ci contient initialement 40 litres et on modifie la directive pour que le niveau atteigne la marque de 80 litres.



Dans cette situation, le taux de variation est proportionnel à la différence entre le niveau demandé et le niveau mesuré, la constante de proportionnalité étant  $1/2$ , on peut donc décrire symboliquement cette situation par l'équation

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} (80 - V) \text{ l/min}$$

où  $V$  est la quantité de liquide dans le réservoir mesurée en litres,  $t$  est le temps en minutes et  $dV/dt$  est le taux de variation de la quantité de liquide dans le réservoir en litres par minute. Au moment du changement de la directive, le réservoir contient 40 litres et le taux de variation est alors:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_0 = \frac{1}{2} (80 - 40) = 20 \text{ l/min}$$

Au bout d'une minute, le volume de liquide est:

$$V(1) = V(0) + \left. \frac{dV}{dt} \right|_0 \times dt = 40 + 20 \times 1 = 60 \text{ litres}$$

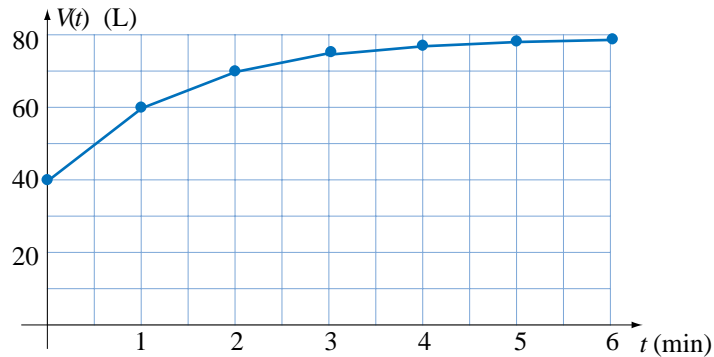
On a évalué le volume de liquide au bout d'une minute à l'aide de la différentielle, donnant ainsi une interprétation physique de cette notion. Le réservoir contient maintenant 60 litres et le dispositif électronique fait la lecture du niveau et modifie le taux de variation qui devient:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_1 = \frac{1}{2} (80 - 60) = 10 \text{ l/min}$$

Au bout de deux minutes, le volume de liquide est:

$$V(2) = V(1) + \left. \frac{dV}{dt} \right|_1 \times dt = 60 + 10 \times 1 = 70 \text{ litres}$$

En poursuivant le processus, et en représentant graphiquement les valeurs obtenues, on a la description du volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.



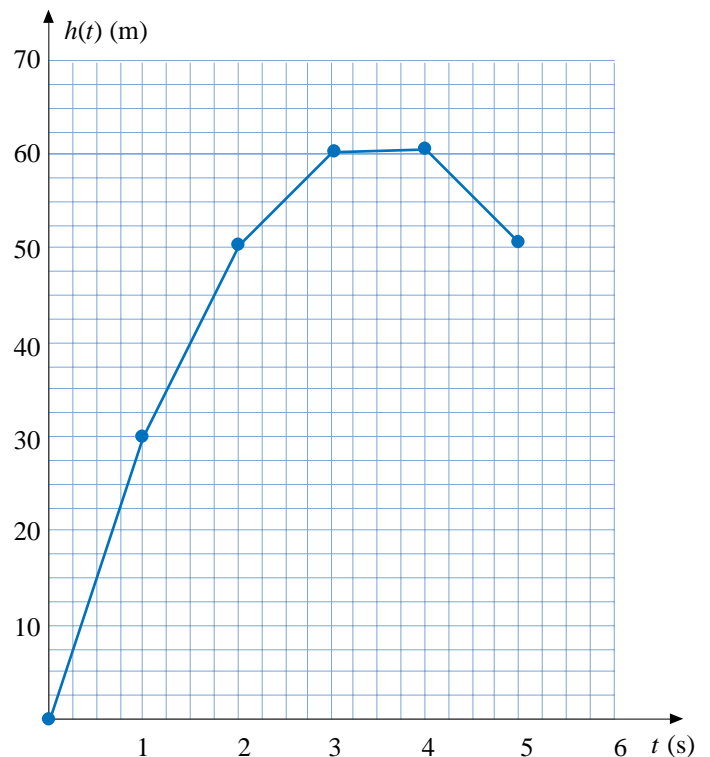
On peut faire le même genre d'exercice en considérant un objet qui est propulsé verticalement avec une vitesse initiale de telle sorte que le taux de variation de la hauteur au temps  $t$  est:

$$\frac{dh}{dt} = 30 - 9,8t \text{ m/s}$$

L'étudiant doit alors estimer la hauteur de l'objet au temps  $t$  en prenant un pas de 1 seconde puis de 0,5 seconde et il doit représenter graphiquement les valeurs obtenues. Pour un pas de 1 seconde, il obtient les résultats suivants:

$\frac{g}{t}$	0	1	2	3	4	5
	0	30	50,2	60,6	61,2	52

Dans ces exemples, on fait construire graphiquement la solution des équations différentielles.



**MÉTHODE D'EULER**

L'interprétation graphique de la méthode d'EULER nous permet d'établir le lien entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie.

Considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 0,5 x$$

décrivant la variation du taux ponctuel en fonction de la variable  $x$ . En construisant graphiquement la solution, pour construire graphiquement la solution, on considère que le taux ponctuel est constant sur un sous-intervalle et on s'en sert pour estimer la différentielle dans chaque sous-intervalle.

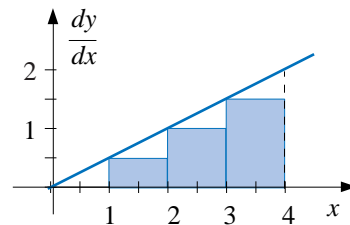
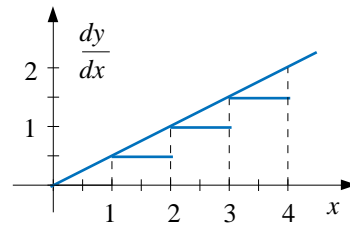
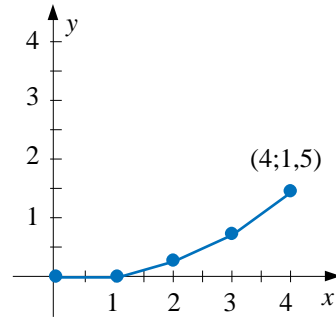
En partant de la valeur initiale  $y_0 = 0$  et en prenant un pas unitaire pour la variable indépendante, on peut alors additionner les différentes valeurs de la différentielle pour chacun des sous-intervalles et obtenir un tableau de correspondance et une esquisse approximative de la solution de l'équation différentielle, soit:

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n dy_i$$

$x$	0	1	2	3	4
$y$	0	0	0,25	0,75	1,5

Cependant, puisque le taux de variation est décrit en fonction de la variable indépendante, on peut facilement représenter cette correspondance graphiquement. Dans l'exemple choisi, la représentation graphique de cette correspondance donne une droite de pente 0,5 passant par l'origine. En utilisant des valeurs constantes comme approximation du taux de variation sur chaque sous-intervalle, on a substitué une fonction en escalier à la fonction décrivant le taux de variation ponctuel qui, dans le présent exemple, est une fonction affine, comme l'illustre la figure ci-contre.

Pour estimer la variation de la fonction dont le taux ponctuel est décrit par l'équation différentielle, on a fait, dans chaque intervalle, le produit de la largeur de l'intervalle et de la valeur du taux de variation. Chacun de ces produits donne la différentielle, qui graphiquement est représentée par l'aire du rectangle sous la courbe dans l'intervalle en cause.



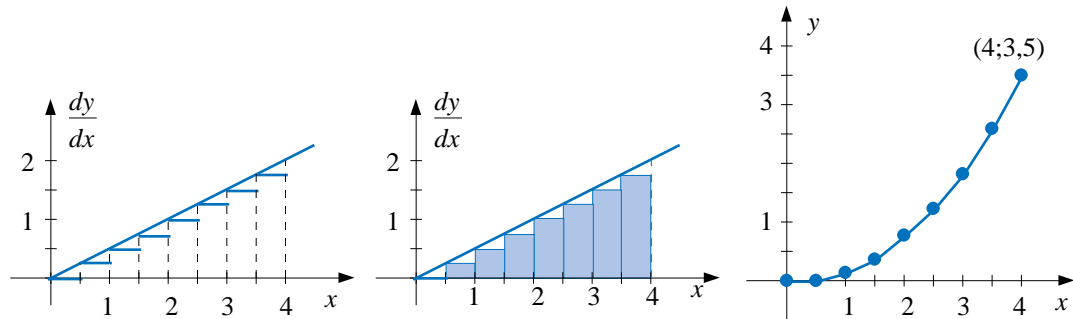
$$\frac{dy}{dx} = 0,5 x$$

$x$	$[0;1[$	$[1,2[$	$[2,3[$	$[3;4[$
$dy/dx$	0	0,5	1	1,5

$$dy|_a = \frac{dy}{dx} \Big|_a dx$$

En prenant un pas de 0,5 unité, on peut calculer une meilleure approximation de la variation de la fonction, on trouve alors:

$x$	$[0;0,5[$	$[0,5;1[$	$[1;1,5[$	$[1,5;2[$	$[2;2,5[$	$[2,5;3[$	$[3;3,5[$	$[3,5;4[$
$dy/dx$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
$dy$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875



$x$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$y$	0	0	0,125	0,375	0,75	1,25	1,875	2,625	3,5

#### PREMIÈRE CONSTATATION:

La somme de la valeur initiale et des différentielles

$$y = y_0 + dy_1 + dy_2 + \dots + dy_n = y_0 + \sum_{i=1}^n dy_i$$

donne une approximation de l'aire sous la courbe décrivant la variation du taux ponctuel. On peut également estimer la variation de la fonction solution dans l'intervalle considéré et cette variation est représentée algébriquement par:

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^n dy_i$$

Dans le cas de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = 0,5x$$

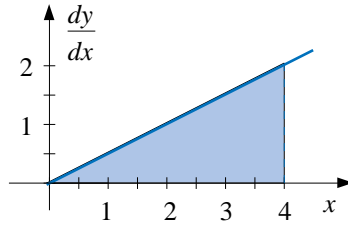
on peut trouver l'aire sous la courbe dans l'intervalle  $[0;4]$  sans avoir recours à une somme d'aires de rectangles puisque l'aire sous la courbe est celle d'un triangle. L'aire d'un triangle étant la moitié du produit de la base par la hauteur. Dans ce cas, la base est la largeur de l'intervalle  $[0;4]$  et la hauteur est le taux de variation à  $x = 4$ , soit:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_4 = 2$$

L'aire est donc:

$$A = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

La valeur exacte de la variation de la fonction  $y = f(x)$  sur l'intervalle  $[0;4]$  est donc de 4 unités.



On peut même décrire algébriquement l'aire sous la courbe dans l'intervalle  $[0;x]$ , on obtient alors:

$$F(x) = \frac{(x/2) \times x}{2} = \frac{x^2}{4}$$

Cette description de l'aire en fonction de  $x$  est intéressante, car elle permet de voir que la solution de l'équation différentielle est la fonction décrivant l'aire sous la courbe.

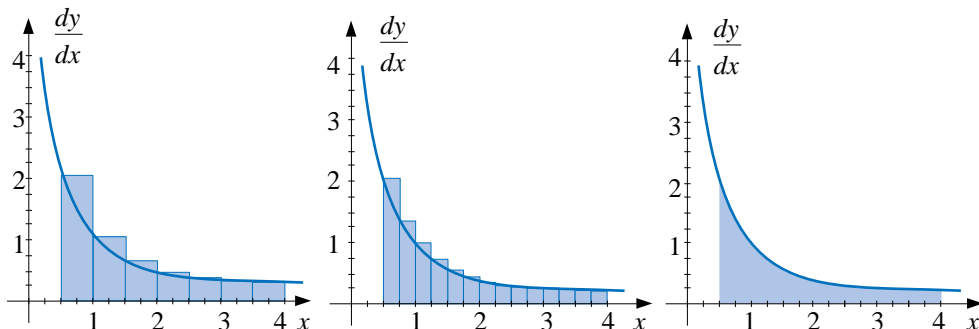
$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = 0,5x$$

**DEUXIÈME CONSTATATION**

La fonction primitive qui est la solution de l'équation différentielle décrit l'aire sous la courbe dans l'intervalle  $[0;x]$ . On peut donc trouver l'aire sous la courbe d'une fonction en trouvant la primitive de cette fonction et en calculant l'image par la primitive des bornes de l'intervalle.

Les constatations restent les mêmes lorsque la représentation graphique du taux de variation est une courbe. Par la méthode d'Euler, on considère que le taux est constant sur des intervalles de largeur constante et la somme des différentielles représente alors une valeur approchée de l'aire sous la courbe. En prenant une largeur d'intervalle plus petite, on calcule une meilleure approximation de l'aire sous la courbe et à la limite lorsque la largeur  $dx$  tend vers 0, on obtient l'aire sous la courbe. En considérant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$



### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À VARIABLES SÉPARABLES

On peut considérer à nouveau le problème du système de refroidissement comportant un réservoir d'eau doté d'un dispositif électronique permettant de contrôler la quantité de liquide dans le réservoir. Le taux de variation étant décrit par l'équation différentielle

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} (80 - V)$$

Dans ce cas, le taux de variation n'est pas décrit en fonction de la variable indépendante mais en fonction de la variable dépendante. Par conséquent, il ne suffit pas de rechercher la primitive pour connaître la fonction décrivant le volume de liquide au temps  $t$ . On peut cependant résoudre en introduisant la notion d'équation différentielle à variables séparables. En isolant les variables, on a:

$$\frac{dV}{(80 - V)} = 0,5 dt$$

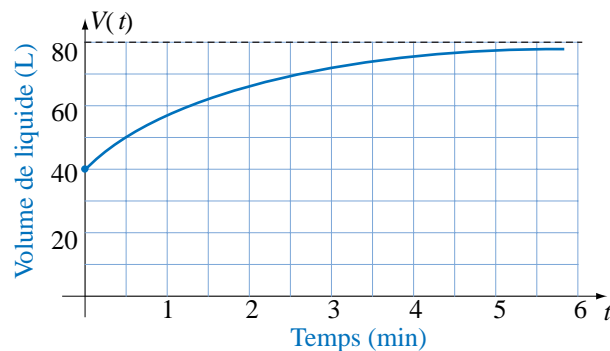
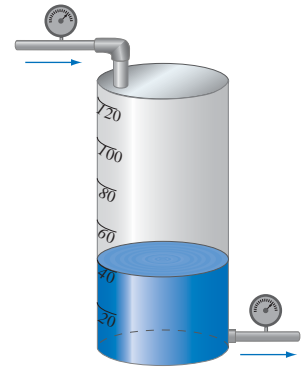
En intégrant les deux membres de l'équation, on a alors:

$$\int \frac{du}{u} = -0,5 \int dt$$

$$\ln|u| = -0,5t + k$$

D'où l'on tire:

$$V(t) = 80 - 40 e^{-0,5t}$$



## EN GUISE DE CONCLUSION

Dans les approches développées pour l'enseignement du calcul différentiel et intégral aux étudiants des Technologies du génie électrique, on cherche à exploiter des contextes permettant de donner rapidement un sens aux concepts de telle sorte que les étudiants puissent intégrer ces concepts en lien avec des situations et des exemples. Ensuite, on généralise les concepts pour pouvoir les réutiliser dans d'autres situations. En pratique, l'apprentissage se fait en trois temps: contextualisation, décontextualisation et recontextualisation. « Contextualiser » signifie qu'à partir de situations concrètes qui ont du sens pour l'étudiant, on va construire un modèle mathématique particulier permettant d'analyser et de résoudre ces situations particulières. « Décontextualiser » signifie que l'on va abstraire, généraliser le modèle, la démarche de résolution. « Recontextualiser » signifie que l'on va par la suite transférer les acquis et les adapter à des situations nouvelles.

Il faut cependant être bien conscient que dans une telle démarche, les intervenants sont partenaires. Le professeur de mathématiques peut modifier ses stratégies pédagogiques pour adopter cette approche, mais cela ne garantira pas que les étudiants pourront transférer leurs acquis dans les autres cours du programme. Le transfert des connaissances est un apprentissage en soi et l'étudiant doit être guidé dans cet apprentissage. Les professeurs des départements techniques auront toujours une responsabilité dans ce transfert car il s'agit d'un transfert dans le domaine de leur spécialité et ils sont les professionnels en contact avec l'étudiant lorsque celui-ci doit effectuer ce transfert. Les professeurs des départements techniques, dans leurs cours, aident les étudiants à transférer les acquis des autres cours de leur spécialité car ils sont conscients de la difficulté qu'éprouvent les étudiants à faire ce transfert. L'utilisation des notions étudiées dans les cours de mathématiques ne peut être un automatisme au sortir du cours et en cela, l'apprentissage des mathématiques n'est pas différent des autres apprentissages. L'automatisme vient par l'application régulière dans le champ de spécialisation, l'apprentissage des mathématiques doit se poursuivre dans les autres cours des programmes techniques. Pour que cet objectif soit atteint, il faut pouvoir développer des approches permettant à l'étudiant de s'appropriier les concepts fondamentaux du calcul différentiel et intégral et aux professeurs des techniques de les réutiliser dans leur enseignement.

---

DÉSILETS, Mario, TARDIF, Jacques, «Un modèle pédagogique pour le développement des compétences», dans *Pédagogie collégiale*, vol. 7, n° 2, décembre 1993, p. 19-23.

TARDIF, Jacques, DÉSILETS, Mario, PARADIS, Fernand, LACHIVER, Gérard, «Le développement des compétences: cadres conceptuels pour l'enseignement professionnel» dans *Pédagogie collégiale*, vol. 6, n° 2, décembre 1992, p. 14-19.