Pierre de Fermat

par André Ross
professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

NOTES BIOGRAPHIQUES

Pierre de Fermat, mathématicien français, est né à Beaumont de Lomagne près de Montauban le 17 août 1601. Son père, un riche marchand de cuir l'envoie étudier le droit à Toulouse. Au milieu des années 1620, il s'installe à Bordeaux, où il débute ses travaux en mathématiques. Il s'intéresse à la retauration des œuvres de grands classiques d'Alexandrie. Il entreprend alors la restauration des deux livres d'Apollonius sur les *Lieux plans* à partir des informations contenues dans la *Collection mathématique* de Pappus. Il se rend ensuite à Orléans pour y étudier le droit. Il y reçoit un diplôme en droit civil et fait application pour un poste de conseiller au parlement de Toulouse, poste qu'il occupe à partir de 1631. C'est vers cette époque qu'il produit un court essai intitulé *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introduction aux lieux plans et solides) dans lequel il utilise la notation de Viète pour présenter les principes fondamentaux de la géométrie analytique. À Toulouse, il fait la connaissance de Pierre de Carcavi (1600-1684), également conseiller, qui s'intéresse lui aussi aux mathématiques.

En 1636, Carcavi entreprend un voyage à Paris comme bibliothécaire royal. Il rencontre alors Marin Mersenne et son groupe et leur fait une description des travaux de Fermat. Mersenne entreprend d'écrire à Fermat pour avoir plus de détails sur ses travaux. Celui-ci répond le 26 avril 1636 et communique à Mersenne ses travaux sur les spirales et sa retauration des ouvrages d'Apollonius. Il pose également deux problèmes de maximisation qu'il demande à Mersenne de soumettre aux mathématiciens de Paris. Fermat aimait proposer aux autres mathématiciens des problèmes qu'il avait déjà résolus. Roberval et Mersenne, trouvant les problèmes de Fermat difficiles, et souvent insolubles avec les techniques de l'époque, lui ont demandé de révéler ses méthodes de résolution. Fermat leur fait alors parvenir un texte intitulé *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* (*Méthode* pour déterminer les maxima et les minima) ainsi que son texte restauré des *Lieux plans* (*Plane loci*) d'Apollonius et son approche algébrique de la géométrie sous le titre *Ad locos planos et solidos isagoge*. Grâce à ces travaux, il devint rapidement célèbre comme mathématicien, mais il se refusa toujours à publier. Il n'était pas intéressé par la célébrité et il lui aurait fallu polir la présentation de ses travaux ce qui l'aurait détourné de la poursuite de ses recherches. Fermat eut une controverse avec Descartes qui reconnaissait difficilement que l'on puisse parvenir à des résultats valides sans utiliser sa propre démarche, décrite dans le *Discours de la méthode* et illustrée, dans le domaine mathématique, par *La Géométrie*. Descartes prétendait que la méthode des maxima et minima donnait des résultats incorrects. Dans une lettre à Fermat, il reconnut finalement que ses résultats étaient corrects, tout en continuant à ternir la réputation de celui-ci comme mathématicien.

À part cet épisode, Fermat eut une carrière paisible et meubla ses moments de loisir par des occupations littéraires et mathématiques. Sa correspondance avec Mersenne le mit en contact avec les travaux de Galilée, Torricelli, Descartes, Pascal et Roberval. Durant la période de 1643 à 1554, il eut peu de contacts avec ses collègues parisiens et ce, pour différentes raisons. Fermat avait peu de temps à consacrer aux mathématiques à cause d'un surcroît de travail. La Fronde, guerre civile, qui eut lieu durant cette période affecta grandement la ville de Toulouse. De plus, la Peste fit rage en 1651 et Fermat lui-même faillit en mourir. C'est à cette époque qu'il se consacra à la théorie des nombres.

Fermat, qui faisait des mathématiques en amateur, est cependant considéré comme le plus grand mathématicien du XVII^{e} siècle. Créateur de la théorie des nombres, il a développé la géométrie analytique, indépendamment de Descartes, et il partage avec Pascal la création de la théorie des probabilités. Il a conçu et appliqué l'idée maîtresse du calcul différentiel et intégral treize ans avant la naissance de Newton et dix-sept ans avant celle de Leibniz. Il n'a cependant pas présenté sa méthode en un ensemble de règles pratiques et facilement applicables comme Leibniz l'a fait. Une bonne partie de ses recherches ont été perdues car il ne publiait jamais ses découvertes; il se contentait de les noter dans la marge de traités écrits par d'autres. Les principaux résultats de Fermat ont été publiés en 1679 par son fils aîné Samuel sous le titre *Varia Opera Mathematica*. Même si les mathématiques n'étaient pour lui qu'un passe-temps, il a été un précurseur dans plusieurs domaines : calcul différentiel, géométrie analytique, théorie des nombres et calcul des probabilités. Il est mort à Castres le 12 janvier 1665.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

La création de la géométrie analytique a eu une influence importante sur la représentation des fonctions et le traitement du problème de la tangente et du problème de l'aire. C'est dans le traité *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introduction aux lieux plans et solides) que Fermat présente ses réflexions qui constituent les fondements de la géométrie analytique. Le principe fondamental de la géométrie analytique tel qu'énoncé par Fermat est :

Principe fondamental

Dès qu'une équation contient deux quantités inconnues, il y a un lieu correspondant et le point extrême de l'une de ces quantités décrit une ligne droite ou une ligne courbe.

L'exemple ci-dessous, utilisant des notations modernes, illustre cet énoncé (Fermat utilisait la notation de François Viète; les symboles qu'il utilise pour représenter les variables ne sont donc pas x et y, mais les majuscules des premières lettres de l'alphabet; les voyelles pour les variables et les consonnes pour les constantes et les coefficients). Considérons, par exemple, l'équation suivante :

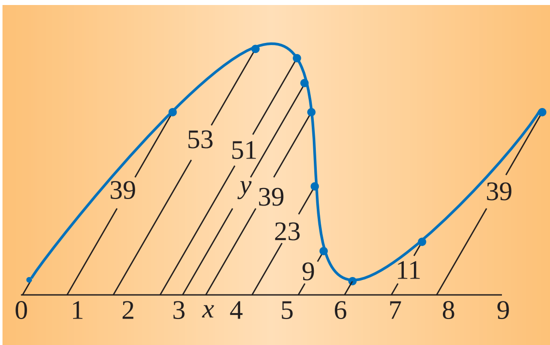
$$y = x^3 - 14x^2 + 49x + 3$$

C'est une équation qui selon l'expression de Fermat « *contient deux quantités inconnues* ».

Il y a donc un lieu correspondant décrit par le point extrême de l'une des quantités. Pour représenter ce lieu, on peut calculer un certain nombre de correspondances. Par exemple, celles du tableau ci-contre, qui donne, pour différentes valeurs de la variable x, la valeur correpondante de la variable y.

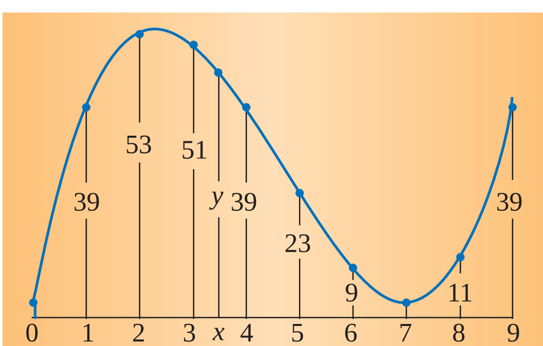
x	y
0	3
1	39
2	53
3	51
4	39
5	23
6	9
7	3
8	11
9	39

Dans cette figure, lorsque la variable *x* prend la valeur 1, la variable *y* prend la valeur 39. Lorsque la variable *x* prend la valeur 2, la variable *y* prend la valeur 53. Lorsque la variable *x* prend la valeur 3, la variable *y* prend la valeur 51, ainsi de suite. En considérant les valeurs intermédiaires, le point extrême de *y* décrit une courbe.



On obtient alors une image de la relation entre les variables décrite par l'équation à l'aide de laquelle les valeurs sont calculées.

On remarque qu'au début de la géométrie analytique, il n'y a qu'un axe horizontal, l'axe vertical viendra plus tard. Dans la figure ci-dessous, les valeurs correspondantes sont représentées perpendiculairement à l'horizontale. Le principe est cependant le même. En chaque valeur d'abscisse, on calcule la valeur correspondante de la variable dépendante, ce qui détermine la valeur de l'ordonnée représentée graphiquement par la longueur de la perpendiculaire.



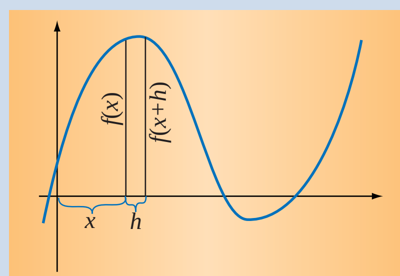
VALEURS EXTRÊMES D'UNE FONCTION

Parmi les contributions de Fermat au développement du calcul, on remarque une méthode pour déterminer les maxima et minima d'une fonction qui est assez proche de la méthode moderne. En utilisant les notations actuelles, la méthode de Fermat pour trouver les maxima et minima d'une fonction $f(x)$ peut être décrite comme suit :

Procédure

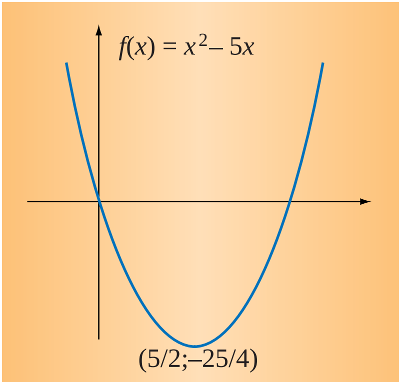
pour trouver les maxima et minima

- considérer une variable h dont la valeur est petite comparativement à la valeur de x au voisinage d'une valeur optimale et évaluer $f(x + h)$;
  (Normalement, les valeurs de $f(x + h)$ et $f(x)$ dans une partie quelconque de la courbe sont très différentes. Mais au voisinage d'un maximum ou d'un minimum la différence sera imperceptible si h est suffisamment proche de 0).



- égaler $f(x + h)$ à $f(x)$;
- éliminer les termes qui se simplifient;
- diviser les deux membres de l'équation par h;
- poser $h = 0$ dans l'expression obtenue et isoler la variable indépendante pour connaître l'abscisse des points extrêmes.

Utilisons cette méthode pour trouver la valeur optimale de la fonction définie par $f(x) = x^2 – 5x$.



En évaluant $f(x + h)$, on obtient :

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 5(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h$$

En posant $f(x) = f(x + h)$, on a :

$$x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h = x^2 - 5x,$$

d'où, en simplifiant :

$$2xh + h^2 - 5h = 0$$

En divisant les deux membres de l'équation par h, on obtient :

$$2x + h - 5 = 0$$

En posant $h = 0$, on trouve $2x - 5 = 0$ d'où $x = 5/2$. La fonction a donc une valeur optimale à $x = 5/2$.

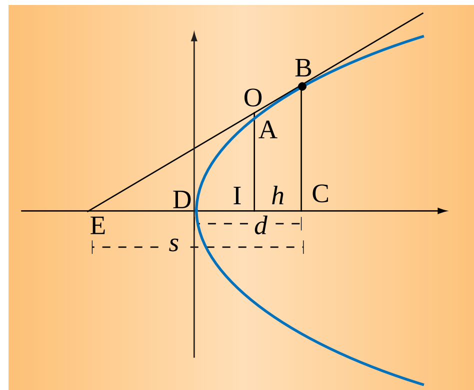
On remarque que la méthode ne permet pas de distinguer une valeur maximale d'une valeur minimale ou d'une valeur stationnaire dont la tangente est également horizontale. De plus, la méthode contourne la problème de la division par 0. Puisque l'intention est de poser $h = 0$, peut-diviser les deux membres de l'équation par h? la divison par h a-t-elle un sens?

RECHERCHE DE LA TANGENTE

Vers 1632, Fermat applique sa méthode des extremums à la recherche des tangentes. Avant de voir comment il utilise cette méthode, signalons que la tangente sera connue si l'on détermine deux de ses points : le point de tangence est l'un de ces points et l'autre est le point d'intersection avec l'axe horizontal. Pour déterminer le point d'intersection avec l'axe horizontal, il suffit de trouver la longueur de la projection de la tangente sur l'axe horizontal entre le point de tangence et le point d'intersection. Cette projection était appelée la *sous-tangente*.

Considérons la parabole $\dfrac{y^2}{x} = p$, dont le graphique est donné ci-dessous, et un point B quelconque de la courbe. On a alors :

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AI}^2}{\overline{DI}} = p \quad \text{et} \quad \frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}} < \frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$$



Si le point O se déplace sur la tangente, le rapport :

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$$

atteint sa valeur minimale lorsque O et B coïncident. Par sa méthode des extremums, Fermat doit égaler les deux rapports, soit :

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$$

De plus, puisque les triangles EOI et EBC sont semblables, les côtés homologues sont proportionnels, et on a :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{EI}} = k$$

D'où l'on obtient :

$$\overline{BC} = k\overline{EC} \quad \text{et} \quad \overline{OI} = k\overline{EI}$$

Par substitution, on a :

$$\frac{k^2\overline{EC}^2}{\overline{DC}} = \frac{k^2\overline{EI}^2}{\overline{DI}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{EC}^2}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EI}^2}{\overline{DI}}$$

Puisque $\overline{EC} = s, \overline{DC} = d, \overline{DI} = d - h$ et $\overline{EI} = s - h,$ on a :

$$\frac{s^2}{d} = \frac{(s-h)^2}{d-h}$$

d'où : $s^2(d - h) = d(s - h)^2$

et : $s^2d - s^2h = s^2d - 2shd + h^2d$

$$- s^2h = - 2shd + h^2d$$

$$s^2 = 2sd - hd$$

Posant $h = 0$, $s^2 = 2sd$

puis en divisant par s, on obtient :

$$s = 2d$$

La longueur de la sous-tangente est égale à $2d$, où d est la distance du sommet de la parabole à l'abscisse du point considéré. On peut alors déterminer le point d'intersection de la tangente avec l'axe horizontal et tracer cette tangente en joignant ce point au point de tangence.

On remarque l'importance de la géométrie analytique dans la méthode de Fermat qui est assez proche de la méthode moderne.

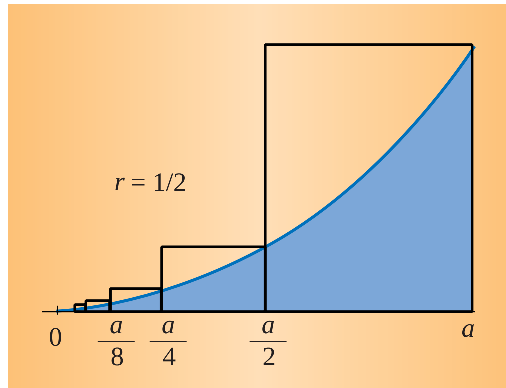
FERMAT ET LE CALCUL D'AIRES

Fermat s'est également intéressé au problème de l'aire sous la courbe d'une fonction de la forme $y = x^n$ et a développé une méthode ingénieuse, applicable pour les valeurs entières et fractionnaires de n pour trouver l'aire sous la courbe dans un intervalle. Voici comment il procède.

Procédure
pour calculer l'aire sous une courbe

- diviser l'intervalle selon une progression géométrique à partir de l'extrémité droite de l'intervalle en multipliant successivement la valeur frontière de l'intervalle par une fraction plus petite que 1;
- faire la somme des aires des rectangles construits à partir de la droite de l'intervalle;
- déterminer la valeur limite lorsque la raison de la progression géométrique tend vers 1. C'est la valeur cherchée.

Pour illustrer cette méthode, considérons la courbe $y = x^n$ et l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[0; a]$. Fermat subdivise l'intervalle en un nombre infini de sous-intervalles en prenant comme abscisses les valeurs $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^n$ où r est une fraction positive et plus petite que 1.



Ainsi, pour $r = 1/2$, les subdivisions de l'intervalle, à partir de la droite, sont :

$$\left\{..., \frac{a}{8}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, a\right\}$$

La somme des aires des rectangles construits à partir de la droite est alors :

$$\sum A_i = a^n\left(a - \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^n\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right) + \left(\frac{a}{4}\right)^n\left(\frac{a}{4} - \frac{a}{8}\right) + ...$$
$$= a^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + a^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$+ a^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} + a^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+3} + ...$$

On a donc une progression géométrique dont le premier terme est $a^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ et dont la raison est $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Puisque la somme infinie d'une progression géométrique infinie de raison r $(0 < r < 1)$ et dont le premier terme est a est donnée par $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, on obtient donc :

$$\sum A_i = \frac{a^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

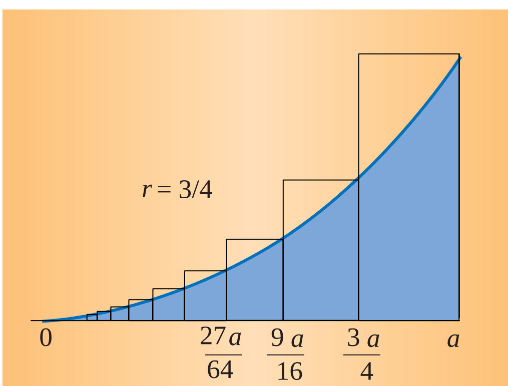
En factorisant et en simplifiant, on a alors :

$$\sum A_i = \frac{a^{n+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$
$$= \frac{a^{n+1}}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Considérons maintenant ce qui se passe lorsque la raison de la progression géométrique s'approche de 1. Prenons, par exemple, r = 3/4. Les subdivisions de l'intervalle, à partir de la droite, sont alors :

$$\left\{\ldots, \frac{27a}{64}, \frac{9a}{16}, \frac{3a}{4}, a\right\}$$

Comme l'illustre la figure ci-dessous, en prenant r = 3/4, le nombre de rectangles, qui était déjà infini, augmente et la largeur des rectangles diminue. En fait, plus la valeur de r s'approche de 1, plus la somme des aires des triangles est proche de l'aire sous la courbe.



Il suffit donc de trouver la somme des aires lorsque r tend vers 1 pour obtenir l'aire sous la courbe. Les aires des rectangles, en débutant par celui de droite, forment alors une progression géométrique dont la raison est plus petite que 1. C'est la progression :

$$a^n(a-ar),\ a^n r^n(ar-ar^2),\ a^n r^{2n}(ar^2-ar^3),\ \ldots$$

Dans cette progression, le premier terme est $a^n(a-ar)$ et la raison est r^{n+1}. La somme est alors :

$$\sum A_i = \frac{a^n(a-ar)}{1-r^{n+1}}$$
$$= \frac{a^{n+1}(1-r)}{(1-r)(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n)}$$
$$= \frac{a^{n+1}}{(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n)}$$

et, lorsque r tend vers 1, on a :

$$\sum A_i = \frac{a^{n+1}}{(1+1+1+1+\ldots+1)} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Ce résultat est équivalent, en écriture moderne, à la formule d'intégration

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

C'est vers 1635 que Fermat démontra ce résultat pour un entier n positif quelconque, résultat qu'il étendit aux puissances fractionnaires positives. On remarque que le procédé est particulier parce qu'il comporte dès le départ une infinité de rectangles pour calculer une valeur approchée de l'aire sous la courbe. De plus, le procédé donne un résultat correct, même si on a une infinité de segments de longueur a^n qui se superposent à la verticale de $x = a$ lorsque r devient égal à 1.

Remarquons également que cette procédure en est une de géométrie analytique, contrairement aux approches des autres mathématiciens de l'époque et des époques précédentes.

DESCENTE INFINIE

La *descente infinie* est une méthode de démonstration développée par Fermat. La description de cette méthode, qui est une sorte d'*induction inversée*, a été retrouvée à Leyde parmi les manuscrits de Christiaan Huygens. La descente infinie est un raisonnement par l'absurde qui consiste à supposer que des nombres positifs jouissent d'une propriété spécifique. À partir de cette supposition, on montre qu'il existe des nombres plus petits qui ont également cette propriété. Alors, par itération, il existe toujours des entiers plus petits pour lequels la propriété est vraie. Cela amène une contradiction puisque les nombres entiers positifs ne peuvent décroître indéfiniment.

IRRATIONNALITÉ

Utilisons la descente infinie pour démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{3}$.

Supposons que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des nombres entiers positifs a_1 et b_1 tels que :

$$a_1 > b_1 \text{ et } \sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1}$$

Considérons l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

En la rationalisant, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

On a donc : $$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

En isolant le $\sqrt{3}$ du numérateur du membre de droite, on obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \text{ et } \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - 1$$

En substituant a_1/b_1 à $\sqrt{3}$ au dénominateur du membre de droite de cette égalité, on obtient :

$$\sqrt{3} = \frac{2}{\frac{a_1}{b_1} - 1} - 1 = \frac{2}{\frac{a_1 - b_1}{b_1}} - 1 = \frac{2b_1}{a_1 - b_1} - 1$$
$$= \frac{2b_1 - (a_1 - b_1)}{a_1 - b_1} = \frac{3b_1 - a_1}{a_1 - b_1}$$

On a donc : $$\sqrt{3} = \frac{3b_1 - a_1}{a_1 - b_1}$$

Cependant, puisque $\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1}$, on a $\frac{3}{2} < \frac{a_1}{b_1} < 2$. En considérant la deuxième inégalité, on a $a_1 < 2b_1$, d'où l'on tire $a_1 < 3b_1$. Ce qui donne :

$$0 < 3b_1 - a_1$$

De plus, en considérant la première inégalité, on a également $3b_1 < 2a_1$. En soustrayant a aux deux membres de cette inégalité, on obtient :

$$3b_1 - a_1 < a_1$$

Par conséquent, $\quad 0 < 3b_1 - a_1 < a_1$

De plus, puisque $a_1 > b_1$, on a $a_1 - b_1 > 0$. Et, de l'inégalité $a_1 < 2b_1$, on obtient $a_1 - b_1 < b_1$ en soustrayant b_1 de chaque membre, on a donc :

$$0 < a_1 - b_1 < b_1$$

D'où : $$\sqrt{3} = \frac{3b_1 - a_1}{a_1 - b_1} < \frac{a_1}{b_1}$$

Le numérateur, $3b_1 - a_1$, et le dénominateur, $a_1 - b_1$, sont tous deux des entiers positifs, cela signifie qu'il existe des entiers positifs :

$$a_2 = 3b_1 - a_1 < a_1 \text{ et } b_2 = a_1 - b_1 < b_1$$

tels que : $$\sqrt{3} = \frac{a_2}{b_2}$$

En répétant le processus, on obtient alors qu'il existe d'autres nombres entiers a_3 et b_3 dont le rapport donne $\sqrt{3}$. Par itération, on a une « descente infinie » et il existe toujours des entiers positifs a_n et b_n plus petits que a_{n-1} et b_{n-1} tels que :

$$\sqrt{3} = \ldots < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \ldots < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1}$$

Par conséquent, il n'existe pas de plus petit entier positif. Cela est une contradiction. La prémisse à l'effet que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel est donc fausse. Il faut donc conclure que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

THÉORIE DES NOMBRES

À la Renaissance, les travaux de plusieurs Grecs revivent, grâce à des traductions arabes. C'est ainsi, qu'au XVII^e siècle, le mathématicien français Pierre de Fermat (1601-1665) prend connaissance des écrits de Diophante. C'est la lecture d'une traduction latine de l'*Arithmétique de Diophante* réalisée par Bachet de Méziriac en 1621 qui a suscité son intérêt pour ce domaine des mathématiques. La majorité de ses énoncés, que l'on considère maintenant comme les fondements modernes de la théorie des nombres, sont inscrits en marge de sa copie de cet ouvrage. Plusieurs de ces énoncés, dont Fermat ne donne pas de preuve dans ce texte, faute d'espace dans la marge, seront démontrés plus tard. Voici quelques-uns de ces énoncés :

Théorème

Si p est premier et que a n'est pas divisible par p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Ainsi, considérons $p = 7$ et $a = 2$. On a alors :
$a^{p-1} - 1 = 2^6 - 1 = 63 = 7 \times 9$.
Considérons $p = 5$ et $a = 4$. On a alors :
$a^{p-1} - 1 = 4^4 - 1 = 255 = 3 \times 85$.

Cet énoncé, appelé *petit théorème de Fermat*, fut communiqué par celui-ci sans démonstration dans une lettre à Frénicle de Bessy, le 18 octobre 1640. La première démonstration connue est due à Euler en 1736.

Théorème

Tout nombre premier impair peut s'exprimer de façon unique comme la différence de deux nombres carrés.

Fermat donne une démonstration de ce théorème.

$\Rightarrow$ Si p est un nombre premier impair, alors on vérifie facilement que :

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

$\Leftarrow$ Si p est un nombre premier tel que $p = x^2 - y^2$, alors :

$$p = (x + y)(x + y)$$

Mais, puisque p est premier ses seuls facteurs sont p et 1. Par conséquent, $x + y = p$ et $x - y = 1$, d'où :

$$x = \frac{p+1}{2} \text{ et } y = \frac{p-1}{2}$$

Théorème

Tout nombre premier de la forme $4n + 1$ peut s'exprimer comme somme de deux carrés.

Le tableau suivant donne quelques nombres premiers et leur décomposition comme somme de deux carrés.

5 = 4 + 1	13 = 9 +4
17 = 16 + 1	29 = 25 + 4
37 = 36 + 1	41 = 25 + 16
53 = 49 + 4	61 = 36 + 25

On pourrait en énumérer encore plusieurs, mais cela ne démontre pas que l'énoncé est vrai. C'est Leonhard Euler en 1754 qui le premier en a donné une démonstration

LE GRAND THÉORÈME

Examinons un dernier énoncé qui, à lui seul, constitue l'un des problèmes les plus célèbres des mathématiques modernes. Son origine remonte à l'Antiquité et il vient tout juste d'être démontré.

Comme vous le savez déjà, dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés : c'est un des résultats dont la démonstration est attribuée à Pythagore (vers 550 av. J.-C.). Mais Pythagore n'était certes pas le premier à réfléchir là-dessus. Des tablettes babyloniennes datant de 1 000 ans avant la naissance de ce célèbre Grec montrent plusieurs triplets pythagoriciens c'est-à-dire des nombres entiers distincts respectant l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Après Pythagore, plusieurs mathématiciens se sont intéressés aux solutions entières de ce genre d'équations. Le Grec Diophante d'Alexandrie (200-284) en parle dans son volume intitulé *L'Arithmétique*. À la lecture de cet ouvrage, Fermat écrit en marge d'un problème traitant des triplets pythagoriciens :

Théorème

D'autre part, un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux autres puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à 2 n'est la somme de deux puissances analogues.

Il venait d'énoncer le théorème appelé maintenant *Grand théorème de Fermat* :

Théorème

Si $n > 2$, il est impossible de trouver des nombres entiers non nuls x, y, z qui vérifient l'équation :

$$x^n + y^n = z^n.$$

Dans la marge il écrit, en latin, une note qui peut être traduite par : « ... j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge trop étroite ne peut contenir. » Faute de preuve mathématique, cette proposition demeura conjecture durant trois siècles. Quelques mathématiciens, comme Euler (1707-1783) et Kummer (1810-1893) ont prouvé cette proposition pour certains entiers n, mais sans pour autant la prouver pour tous les entiers supérieurs à 2. L'avènement des ordinateurs permit de pousser davantage les vérifications pour des entiers de plus en plus grands, mais la proposition n'était pas démontrée pour autant. Ce n'est qu'en juin 1993, que le mathématicien britannique Andrew Wiles présente une preuve de la conjecture de Fermat devant une cinquantaine de spécialistes réunis à l'Université de Cambridge.

CONCLUSION

Fermat a apporté des contributions remarquables au développement du calcul. Il ne peut cependant être crédité de la découverte du calcul différentiel et intégral car il n'a pas vu ou n'a pas cru important de souligner le fait que le problème de la tangente et le problème de l'aire sont les problèmes inverses l'un de l'autre. Sans cette constatation qui se traduit par l'énoncé du théorème fondamental du calcul intégral, on ne peut créditer un mathématicien de cette découverte. Cependant, on constate, à partir des exemples présentés, que Fermat est passé très près de cette découverte.

EXERCICES

1. En utilisant la méthode de Fermat pour trouver les maxima et les minima, déterminer ceux de l'équation définie par l'équation suivante :
$$y = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$$
2. En utilisant la méthode de Fermat pour trouver les tangentes, déterminer ceux de l'équation définie par l'équation suivante :
$$y = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$$
3. En utilisant la méthode de « descente infinie », montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
4. En vous référant à l'exercice sur le crible d'Ératosthène, vérifier que les nombres premiers de la forme $4n + 1$ peuvent s'exprimer comme somme de deux carrés.

BIBLIOGRAPHIE

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc., 1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Devlin, Keith, *The Language of Mathematics, making the invisible visible*, New York, W.H.Freeman and Company, 1998, 344 p.

Dewdney, A.K. *A Mathematical Mystery Tour*, New York, John Wiley &218 p. Sons, Inc. 1999,

Heath, Sir Thomas, L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vol. New York, Dover Publications, Inc. 1956.

Hersh, Reuben, *What is Mathematics Really?*, New York, Oxford University Press, Inc, 1997, 343 p.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*, New-York, Holt Rinehart and Winston, 1976, 588 p.

Kline, Morris. *Mathematical Thought fron Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972, 1238 p.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc. 1958, 2 vol. 1 299 p.

Struik, David. *A Concise History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc. 1967, 195 p.