MÉTHODE D'EXHAUSTION

Par André Ross
Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

INTRODUCTION

Dans l'histoire, les premiers problèmes reliées au calcul intégral portaient sur le calcul d'aires, de volumes et de longueurs d'arcs. En cherchant à résoudre ces problèmes, on est inévitablement confronté à la question de la divisibilité des grandeurs qui est une question très délicate et les paradoxes de Zénon ont permis d'en prendre conscience. Pour résoudre ces problèmes, les mathématiciens grecs de l'Antiquité ont développé la *méthode d'exhaustion* dont l'idée de départ est due à Antiphon, idée qui a été améliorée par Eudoxe pour répondre aux critiques des tenants de la divisibilité infinie des grandeurs. Cette méthode a été utilisée, en particulier par Eudoxe et par Archimède, pour démontrer des théorèmes portant sur les aires et les volume. Archimède s'en est également servi pour calculer une valeur approchée de π.

Dans cet article, nous allons voir comment la méthode d'exhaustion était utilisée par les mathématiciens grecs.

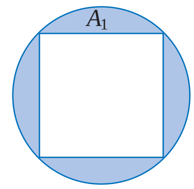
POSTULAT D'EXHAUSTION

L'idée de départ de la méthode d'exhaustion est due à Antiphon (vers 430 av. J.-C.), contemporain de Socrate. Le postulat qu'il a énoncé est le suivant :

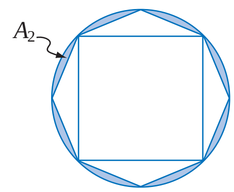
Postulat d'Antiphon

En doublant le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant successivement l'opération, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.

Pour les mathématiciens grecs, qui ne disposaient pas d'un symbolisme adéquat, ce postulat était interprété géométriquement. Considérons un cercle et le carré inscrit. Les aires de ces figures sont des grandeurs de même nature, tout comme leur différence.



En doublant le nombre de côtés, on obtient un octogone inscrit. Visuellement, on constate que la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone s'amenuise à chaque fois que l'on double le nombre de côtés.



Cette différence sera-t-elle éventuellement nulle? C'est ce que dit le postulat d'Antiphon. Avant de poursuivre notre réflexion, rappelons ce qu'était un postulat à l'époque.

Postulat

Un *postulat* est un principe d'un système déductif qui ne peut être utilisé sans l'accord de l'interlocuteur.

L'enjeu est de taille. Si l'interlocuteur accepte le postulat, il doit accepter les conclusions des théorèmes et démonstrations auxquels il sert de justification. Si l'interlocuteur n'accepte pas le postulat, il rejette toutes les conclusions qui en découlent.

Est-il envisageable de ne pas accepter ce postulat? À l'époque, il fut critiqué par les tenants de la thèse selon laquelle les grandeurs sont infiniment divisibles. Ils en concluaient que le procédé d'Antiphon ne pourrait jamais donner l'aire du cercle. Car, en acceptant le principe de la divisibilité infinie, il est toujours possible de diviser la différence entre l'aire d'un cercle et l'aire d'un polygone inscrit quel que soit son nombre de côtés. Il est donc impossible que l'aire du polygone puisse être égale à celle du cercle. Cette critique est similaire à celle du paradoxe de la flèche de Zénon. La flèche ne peut jamais atteindre la cible car il reste toujours une demi-longueur à parcourir.

Pour contourner cette critique et obtenir un postulat utilisable dans un argument déductif, il fallait formuler l'idée autrement. Cette nouvelle approche fut l'œuvre d'Eudoxe et pourrait également être une réponse aux paradoxes de Zénon. Le postulat d'Eudoxe s'énonce de la façon suivante :

Postulat d'Eudoxe

Si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste, on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié et ainsi de suite, à la longue, la grandeur restante peut être rendue plus petite que n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature.

Ce postulat est très intéressant, il reconnaît la divisibilité infinie des grandeurs et l'exploite. La divisibilité infinie étant possible, on peut rendre une grandeur donnée aussi petite que l'on voudra en lui soustrayant itérativement une partie supérieure ou égale à la moitié de la partie restante.

En utilisant la notation moderne, on peut illustrer numériquement ce postulat en considérant une grandeur a dont on soustrait les deux tiers de la valeur. On a alors :

$$a-\frac{2}{3}a=\frac{3a}{3}-\frac{2a}{3}=\frac{a}{3}$$

En soustrayant du reste les deux tiers de sa valeur, on a :

$$\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{a}{3}=\frac{3a}{9}-\frac{2a}{9}=\frac{a}{9}$$

En soustrayant à nouveau les deux tiers du reste, on a :

$$\frac{a}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{a}{9}=\frac{3a}{27}-\frac{2a}{27}=\frac{a}{27}$$

Le postulat affirme qu'en poursuivant le processus, on peut rendre le reste plus petit que toute grandeur prédéfinie. Par exemple, on peut le rendre plus petit que $a/1000$. Il suffit de remarquer que le reste est $a \times (1/3)^n$, où n est le nombre d'itérations. On doit donc déterminer n tel que :

$$a\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{a}{1000}$$

d'où :

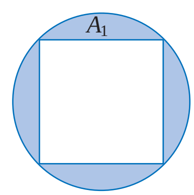
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{1000}$$

et :

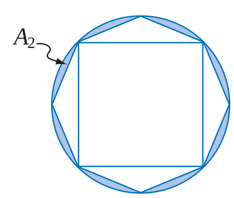
$$3^n>1000$$

On trouve alors qu'il suffit de 7 itérations pour que le reste soit rendu plus petit que $a/1000$. Le postulat affirme que quelle que soit la grandeur prédéfinie, il est toujours possible de rendre le reste plus petit que cette grandeur en effectuant ces soustractions successives.

Considérons à nouveau le cercle et le carré inscrit. L'aire du carré inscrit est supérieure à la moitié de l'aire du cercle. La différence de ces aires donne l'aire A_1 de la partie ombrée de la figure ci-dessous.



En doublant le nombre de côtés, on obtient un octogone inscrit. On constate que sur chaque côté du carré, on a construit un triangle dont l'aire est supérieure à la moitié de l'aire comprise entre le côté du carré et l'arc de cercle ayant ce côté comme corde. La somme des aires des quatre triangles est supérieure à la moitié de A_1. Si on soustrait cette somme de A_1, on obtient A_2, l'aire entre le cercle et l'octogone inscrit.



En poursuivant le processus, on peut rendre la différence entre l'aire du cercle et celle du polygone aussi petite que l'on voudra.

On remarque que dans son postulat, Eudoxe ne dit pas qu'en doublant l'aire du polygone inscrit on obtient l'aire du cercle ou que la différence entre les deux peut être rendue nulle. Il dit simplement que la différence entre l'aire du cercle et celle du polygone inscrit peut être rendue aussi petite que toute grandeur prédéfinie.

UTILISATION DU POSTULAT

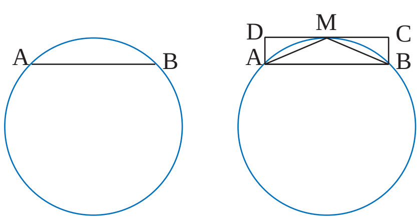
Les réflexions intuitives qui précèdent ne peuvent être utilisées comme justifications dans une démonstration. Il faut que ces réflexions débouchent sur un résultat obtenu déductivement et c'est ce résultat qui pourra être invoqué comme justification.

Théorème

Aire d'un cercle et du polygone régulier inscrit

La différence entre l'aire d'un cercle et l'aire d'un polygone régulier inscrit peut être rendue aussi petite que toute aire prédéfinie.

Voici l'idée de la preuve. Soit un cercle, AB un côté d'un polygone régulier inscrit et A la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



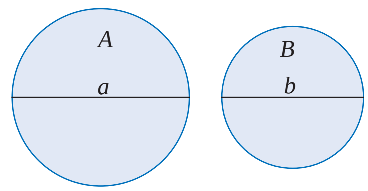
Sur AB comme côté, construisons le rectangle ABCD tel que le côté CD soit tangent au cercle et déterminons le point M milieu de CD. L'aire du triangle AMB est alors la moitié de l'aire du rectangle ABCD. Elle est donc supérieure à la moitié de l'aire du segment circulaire AMB. En soustrayant de A le produit de l'aire du triangle par le nombre de côtés du polygone régulier, on obtient la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone obtenu en doublant le nombre de côtés. En poursuivant le processus, on peut rendre la différence entre ces aires plus petite que toute grandeur d'aire prédéfinie.

Théorème

Aire du cercle et diamètre

Le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres.

Voici l'idée de la preuve. Soit deux cercles de diamètres a et b et dont les aires sont A et B respectivement.

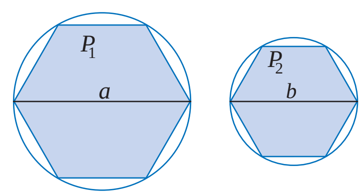


Supposons que le rapport des aires est plus grand que le rapport des carrés des diamètres, soit :

$$\frac{A}{B} > \frac{a^2}{b^2}$$

Dans le premier cercle, inscrivons un polygone régulier dont l'aire diffère si peu de A que l'on a :

$$\frac{A}{B} > \frac{P_1}{B} > \frac{a^2}{b^2}$$



Cela est possible en vertu du théorème précédent. Considérons de plus le polygone régulier semblable inscrit dans le deuxième cercle et notons P_2 son aire. Alors, puisque les polygones sont semblables, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

On a donc : $$\frac{A}{B} > \frac{P_1}{B} > \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

et : $$\frac{P_1}{B} > \frac{P_1}{P_2}$$

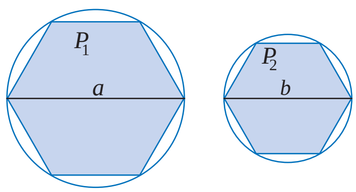
Puisque les numérateurs sont égaux, on obtient $P_2 > B$, ce qui est une contradiction puisque l'aire du polygone régulier ne peut excéder l'aire du cercle circonscrit. Par conséquent, le rapport des aires ne peut être plus grand que le rapport des carrés des diamètres.

Supposons donc que le rapport des aires est plus petit que le rapport des carrés des diamètres, soit :

$$\frac{A}{B} < \frac{a^2}{b^2}$$

Dans le second cercle, inscrivons un polygone régulier dont l'aire diffère si peu de B que l'on a :

$$\frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2}$$



Cela est possible en vertu du théorème précédent. Considérons de plus le polygone régulier semblable inscrit dans le premier cercle dont l'aire est P_1. Alors, puisque les polygones sont semblables, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Cela donne : $$\frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

et : $$\frac{A}{P_2} < \frac{P_1}{P_2}$$

Puisque les dénominateurs sont égaux, on obtient $P_1 > A$, ce qui est une contradiction puisque l'aire du polygone régulier ne peut excéder l'aire du cercle circonscrit. Par conséquent, le rapport des aires ne peut être ni plus grand ni plus petit que le rapport des carrés des diamètres.

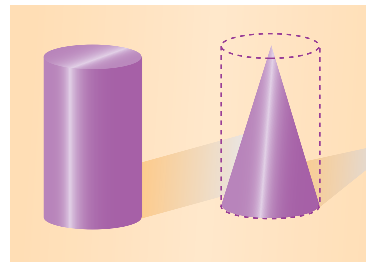
Cette double *réduction à l'absurde* permet alors de conclure que le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres. Signalons que le signe d'égalité n'a été introduit qu'en 1557 par Robert Recorde. La démonstration qui précède n'apparaît donc pas sous cette forme dans les ouvrages de l'Antiquité.

PYRAMIDES ET CÔNES

Eudoxe procède de façon analogue pour montrer que :

Théorème

Le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre ayant même base et même hauteur.



CONCLUSION

Les mathématiques grecques ont été fortement ébranlées par les paradoxes de Zénon et la découverte de l'incommensurabilité du côté et de la diagonale d'un carré. Cela invalidait une bonne partie des résultats obtenus en se basant sur la commensurabilité et une notion intuitive de la limite. Il fallait établir de nouveaux fondements aux mathématiques et démontrer l'ensemble des théorèmes à partir de ces nouveaux fondements.

Eudoxe a été l'architecte de ce nouvel édifice. Il a donné de nouveaux fondements à la théorie des proportions qui reconnaissaient l'existence des irrationnels et il a modifié le postulat intuitif d'Antiphon pour contourner la difficulté que posait le passage à la limite. Cela a donné la méthode d'exhaustion qu'il a utilisée pour démontrer plusieurs résultats portant sur les aires de figures délimitée par des courbes.

Le fondement de ce procédé qui peut servir aussi bien à calculer une valeur approchée qu'à démontrer un résultat général sera également utilisé par Archimède pour le calcul de π et pour démontrer différents résultats sur le calcul d'aires et de volumes.