ARCHIMÈDE ET LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

Par André Ross
Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

AIRE D'UN CERCLE

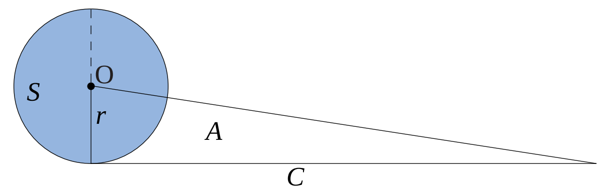
À toutes les époques, l'aide des mathématiciens a été sollicitée pour effectuer le calcul des aires et des volumes. L'intérêt pour le calcul des aires vient du fait que les redevances et impôts étaient souvent calculés en fonction de l'aire des terrains cultivés. Le calcul des volumes était surtout une préoccupation de marchands. Le marchand qui échange des marchandises comme du blé, du vin ou toute autre denrée qui prend la forme de son contenant doit pouvoir en connaître le volume sous peine de faillite. Dans notre monde moderne, les contenants ne sont plus fabriqués par des artisans qui définissent leurs propres normes mais par l'industrie qui se plie aux normes négociées et imposées par les gouvernements. Les mathématiciens ne se sont pas contentés de résoudre les problèmes particuliers qui leur étaient proposés mais ont cherché à développer des méthodes générales auxquelles on peut avoir recours dans une multitude de cas particuliers.

Archimède s'est intéressé à l'aire de toutes les figures délimitées par des courbes : les cercles, les paraboles, les cônes, les cylindres, les conoïdes, les sphéroïdes. En cherchant à résoudre le problème de la quadrature du cercle, il va obtenir des résultats fort intéressants tout en utilisant et en perfectionnant la méthode d'exhaustion. De tous les savants grecs, c'est lui qui a apporté les contributions les plus importantes au calcul d'aires. Nous allons voir comment il a utilisé la méthode d'exhaustion pour démontrer que :

Théorème

L'aire d'un cercle est égale à l'aire d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence.

Soit un cercle de rayon r. Construisons un triangle dont la hauteur est le rayon du cercle et la base est la longueur C de la circonférence. Représentons par S l'aire du cercle et par A l'aire du triangle.



Pour démontrer le résultat par exhaustion, il faut faire deux démonstrations par l'absurde de façon à pouvoir conclure que l'aire du cercle ne peut être ni plus grande ni plus petite que l'aire du triangle.

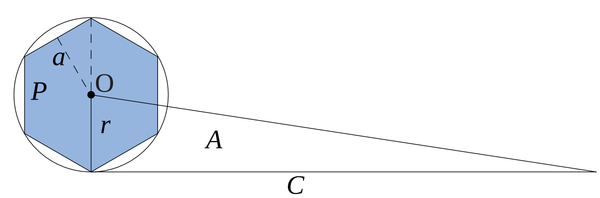
Supposons que l'aire du cercle est plus grande que l'aire du triangle, c'est-à-dire, supposons que :

$$S > A.$$

Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $S = A + \varepsilon$, d'où $S - A = \varepsilon$. On peut construire un polygone inscrit dans le cercle de telle sorte que la différence entre l'aire S du cercle et l'aire P du polygone soit plus petite que ε. On a alors la condition suivante :

$$S > P > A.$$

Il suffit, au besoin, de doubler le nombre de côtés pour trouver le polygone qui satisfait à cette condition (voir Eudoxe et la méthode d'exhaustion).



Puisque le polygone est inscrit dans le cercle, son périmètre p est plus petit que la circonférence du cercle et son apothème est plus petite que le rayon du cercle. On a donc :

$$p < C \text{ et } a < r$$

Par conséquent :

$$pa < Cr$$

Or, par construction, l'aire du triangle est donnée par :

$$A = \frac{Cr}{2}$$

et l'aire du polygone est le demi-produit de son périmètre par son apothème, soit :

$$P = \frac{pa}{2}$$

D'où $P < A$. Ce qui vient en contradiction avec le fait que $S > P > A$. Cette contradiction est engendrée par l'hypothèse $S > A$. Il faut en conclure que l'hypothèse est fausse et l'aire du cercle ne peut être plus grande que celle du triangle. De façon analogue, on démontre que l'aire du cercle ne peut être plus petite que celle du triangle. Puisque l'aire du triangle ne peut être ni plus grande ni plus petite que celle du cercle, elles sont égales. C'est-à-dire :

$$A = \frac{Cr}{2}.$$

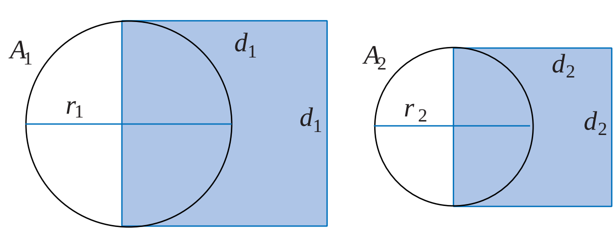
EUCLIDE ET L'AIRE DU CERCLE

Euclide avait déjà démontré, en procédant lui aussi par exhaustion, la proposition suivante :

Proposition 2, Livre XII

Les aires de deux cercles sont dans le rapport des carrés de leurs diamètres.

Euclide utilise la méthode d'exhaustion pour démontrer ce résultat.



En symbolisme moderne, cette proposition s'écrit :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

où S_i est l'aire de la surface du cercle i et d_i est son diamètre. De cette proposition, on peut déduire :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

où r_i est le rayon du cercle i. Par les propriétés des proportions, on obtient :

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$$

Cette proposition étant vraie pour tous les cercles, cela implique que le rapport de l'aire d'un cercle sur le carré de son rayon donne une constante. Ce rapport, que nous notons π, est indépendant du cercle considéré. On peut donc écrire :

$$\frac{A}{r^2} = \pi$$

De plus, en jumelant ce résultat et celui d'Archimède, on déduit que :

$$\frac{A}{r^2} = \frac{Cr/2}{r^2} = \frac{C}{2r} = \pi$$

On peut donc calculer la valeur de la constante π en divisant la circonférence d'un cercle par son diamètre. Archimède utilise ce fait pour calculer une valeur approchée de π. Il parvient à montrer que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

(voir Archimède, calcul par exhaustion).

MÉTHODE D'ARCHIMÈDE

Démontrer un résultat c'est intéressant et cela nécessite souvent de l'imagination, mais encore faut-il trouver quoi démontrer. Dans certains cas, il faut peut-être beaucoup plus d'imagination pour trouver quoi démontrer. Érathostène avait probablement demandé à Archimède comment il s'y prenait pour trouver les proportions qu'il démontrait. En effet, la méthode d'exhaustion est une méthode rigoureuse qui permet de démontrer efficacement des résultats sur les aires et les volumes cependant, ce n'est pas une méthode utilisable pour trouver la proposition à démontrer. Les preuves permettent de communiquer les résultats sous une forme que les autres mathématiciens peuvent comprendre et vérifier, mais ce n'est pas en écrivant des preuves que l'on trouve les énoncés des propositions. Ceux-ci doivent être connus avant la construction de la preuve.

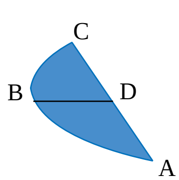
Comment Archimède procédait-il pour trouver ses propositions? Cette question a obtenu réponse en 1906 avec la découverte à Constantinople d'une copie du traité *Méthode* d'Archimède qui était adressé à Ératosthène. Le texte a été découvert sur un palimpseste, c'est-à-dire un parchemin dont la première écriture a été lavée ou grattée et sur lequel un nouveau texte a été écrit (le coût de production des parchemins justifiait le recyclage). Avec le temps, le texte original des palimpsestes réapparaît souvent, ce qui permet une restauration. Le texte original de la Méthode avait été lavé au XIII^{e} siècle pour faire place à un texte religieux. Heureusement, la plupart du texte original a pu être restauré, ce qui permet de comprendre comment Archimède est parvenu à certains de ses découvertes sur le calcul d'aires et de volumes.

Il est intéressant de constater qu'il s'est inspiré de ses travaux sur les leviers pour trouver plusieurs résultats sur les aires et volumes. Sa méthode est basée sur l'idée suivante. Pour trouver l'aire d'une figure ou le volume d'un solide, il faut le couper en plusieurs bandes parallèles, ou en plusieurs tranches parallèles, et suspendre mentalement ces bandes, ou ces tranches, à l'extrémité d'un levier de telle sorte qu'elles soient en équilibre avec une figure dont on connaît l'aire ou le volume et le centre de gravité.

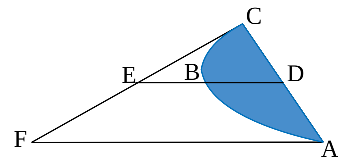
Pour bien saisir l'originalité de cette méthode, voyons comment il a déterminé l'aire d'un segment de parabole et le volume d'une sphère.

AIRE DE LA PARABOLE

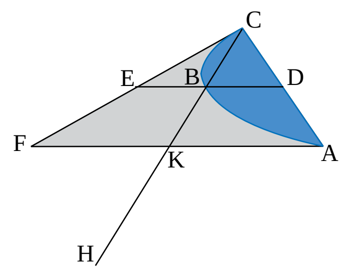
Soit un segment de parabole ABC et de diamètre BD (le diamètre de la parabole coupe la corde CD en deux parties égales).



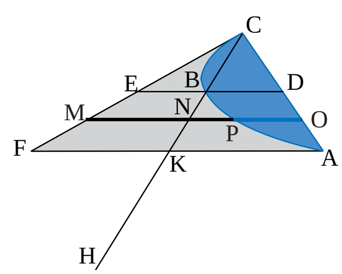
Du point C, il trace la tangente à la parabole et du point A une parallèle au diamètre BD jusqu'à leur point de rencontre F.



Il trace alors CB qui coupe AF en K et qu'il prolonge jusqu'en H de telle sorte que $\overline{CK} = \overline{KH}$ et il prolonge DB jusqu'en E sur CF.



Selon une proposition qu'Archimède attribue à Aristée et à Euclide, $\overline{DB} = \overline{BE}$ puisque CE est tangente au segment de parabole et CD est la demi-longueur de sa corde. Il s'ensuit que CK est la médiane du triangle AFC. Il considère alors que la surface du triangle et celle du segment de parabole sont constituées de bandes parallèles au diamètre de celle-ci. Dans la figure suivante, la bande MO du triangle et la bande OP du segment de parabole sont superposées.



Il cite alors un lemme qu'il a préalablement démontré à l'effet que :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}$$

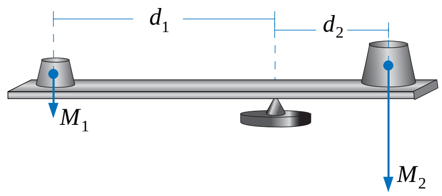
De plus, $\dfrac{\overline{CK}}{\overline{KN}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{AO}}$ par le théorème de Thalès et $\overline{CK} = \overline{HK}$ par construction. Il peut donc conclure que :

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}$$

Il utilise alors un résultat démontré dans son étude des leviers, soit :

Théorème

Des masses inégales à des distances inversement proportionnelles sont en équilibre.

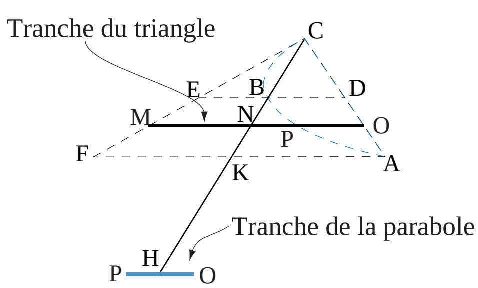


$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{d_2}{d_1} \text{ ou } M_1 d_1 = M_2 d_2$$

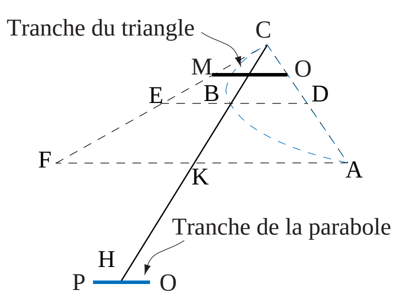
Dans le problème de l'aire du segment de parabole, les masses sont les bandes MO et OP et le levier est le segment CKH où K est le pivot. La proportion

$$\frac{\overline{\text{HK}}}{\overline{\text{KN}}} = \frac{\overline{\text{MO}}}{\overline{\text{OP}}}$$

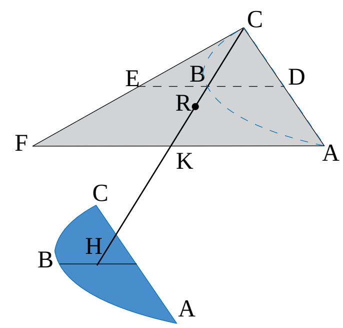
entre les masses et les distances signifie qu'en suspendant la bande OP au point H, elle équilibrera la bande MO suspendue au point N.



De la même façon, chaque tranche de la parabole suspendue au point H équilibrera la tranche correspondante du triangle suspendue en son point d'intersection avec le levier.



Par conséquent, l'aire de la parabole suspendue en son centre de gravité au point H équilibrera, par rapport au point K, l'aire du triangle suspendu en son centre de gravité sur KC.



Or, ce centre de gravité est en un point R situé au tiers de KC. On peut donc déterminer le rapport de l'aire du triangle AFC sur l'aire du segment de parabole ABC, soit :

$$\frac{\text{Aire du triangle AFC}}{\text{Aire du segment ABC}} = \frac{\overline{\text{HK}}}{\overline{\text{KR}}} = \frac{3}{1}$$

d'où l'on tire :

$$\text{Aire du segment ABC} = \frac{1}{3}\text{Aire du triange AFC}$$

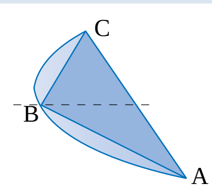
Cependant, l'aire du triangle AFC est quatre fois l'aire du triangle ABC. On obtient donc que :

$$\text{Aire du segment ABC} = \frac{4}{3}\text{Aire du triange ABC}$$

Il obtient alors la proposition à démontrer, soit :

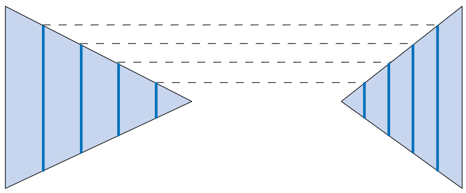
Proposition

L'aire d'un segment de parabole est égale à une fois et un tiers l'aire du triangle inscrit dans ce segment.



Archimède confie avoir suivi cette méthode pour trouver la conjecture sur l'aire de la parabole, mais il n'acceptait pas cette démarche comme preuve et c'est pourquoi il a ensuite démontré ce résultat par la méthode d'exhaustion. Pourquoi n'accepte-t-il pas cette démarche comme preuve?

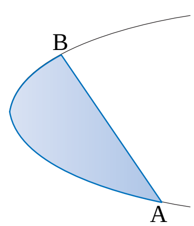
On peut en illustrer la raison. Considérons la figure suivante dans laquelle apparaissent deux triangles.



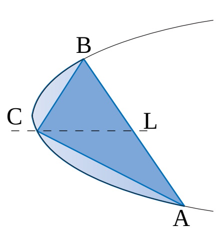
Ces triangles ont manifestement des aires différentes. Cependant, si on découpe des tranches dans ces triangles de la façon illustrée, et qu'on suspend ces tranches aux extrémités d'une balance, on obtient l'équilibre à chaque fois.

En faisant ensuite la somme des tranches, on obtient des résultats identiques ce qui n'implique pas que les aires sont égales. Il est donc important de distinguer la démarche pour échafauder une conjecture et la démarche pour valider ou démontrer celle-ci. Une procédure qui parfois donne des résultats exacts et parfois des résultats erronés ne peut en aucun cas être une justification suffisante comme preuve de la validité d'un résultat particulier. Par sa méthode d'équilibre des masses, Archimède obtient une conjecture mais il sait que ce n'est qu'une conjecture et qu'il doit la démontrer. Ce souci est celui d'un grand scientifique.

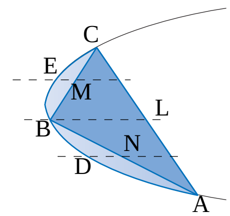
La démarche d'Archimède pour démontrer ce résultat par exhaustion, se résume de la façon suivante. Considérons un segment parabolique AB.



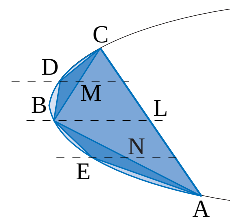
Du milieu L du segment AB, on trace une parallèle à l'axe de la parabole déterminant ainsi un point C.



Par les milieux N et M de AC et BC, traçons des droites parallèles à l'axe de la parabole, déterminant ainsi les points D et E.



Formons les triangles ACD et BCE.



Par les propriétés géométriques de la parabole qu'il a démontrées préalablement, Archimède écrit alors :

$$\Delta\mathrm{ACD} + \Delta\mathrm{BCE} = \frac{\Delta\mathrm{ABC}}{4}$$

En répétant le processus, il obtient que l'aire du segment parabolique est :

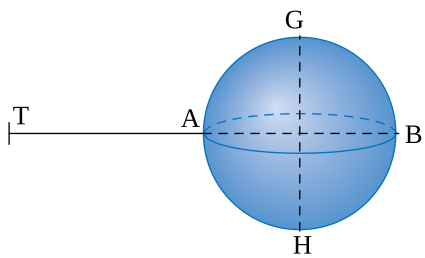
$$\begin{aligned} A &= \Delta\mathrm{ABC} + \frac{\Delta\mathrm{ABC}}{4} + \frac{\Delta\mathrm{ABC}}{4^2} + \frac{\Delta\mathrm{ABC}}{4^3} + \ldots \\ &= \Delta\mathrm{ABC}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Il procède ensuite par double réduction à l'absurde. En supposant que la somme des termes à l'intérieur de la parenthèse est plus grande que 4/3 il montre que cela entraîne une contradiction. En supposant que la somme est plus petite que 4/3, cela entraîne encore une contradiction. Par conséquent l'aire du segment parabolique est égale au 4/3 de l'aire du triangle inscrit, soit :

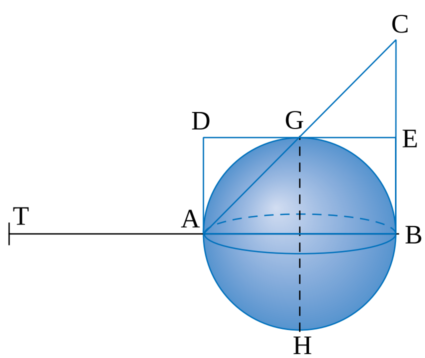
$$A = \frac{4}{3}\Delta\mathrm{ABC}$$

On a maintenant une méthode plus simple pour trouver la somme infinie d'une progression géométrique de cette nature en utilisant les notions de limite et de convergence des séries..

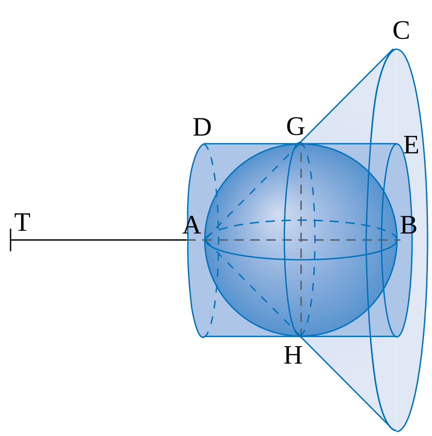
Voici maintenant comment la méthode du levier peut être utilisé pour trouver le volume de la sphère. Représentons par r le rayon de la sphère et plaçons celle-ci de telle sorte qu'un diamètre AB coïncide avec un axe horizontal et traçons le diamètre perpendiculaire GH.



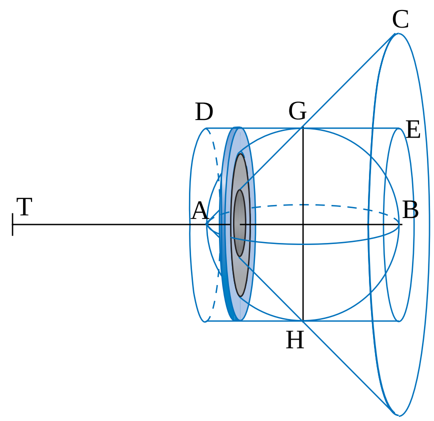
Dans le même plan que le diamètre GH, construisons le rectangle ABED de telle sorte que $\overline{\mathrm{AD}} = r$. En prolongeant le segment AG jusqu'à sa rencontre avec le prolongement du côté BE, construisons le triangle ABC.



Imaginons le cylindre engendré par la révolution du rectangle ABED autour de l'axe horizontal TB et le cône engendré par la révolution du triangle ABC autour du même axe.



Coupons ces trois solides en fines tranches d'épaisseur Δx, perpendiculaires à l'axe TB et à une distance x du pôle A que nous utiliserons comme pivot du levier.



Déterminons maintenant le volume de chacune de ces tranches. La tranche du cylindre est un disque dont le rayon est r, son volume est :

$$\Delta V_{\text{cylindre}} = \pi\, r^2\, \Delta x$$

La tranche du cône est est un disque dont le rayon est x, son volume est :

$$\Delta V_{\text{cône}} = \pi\, x^2\, \Delta x$$

La tranche de la sphère (fgure suivante) est un disque dont le rayon R est tel que :

$$r^2 = R^2 + |r - x|^2$$

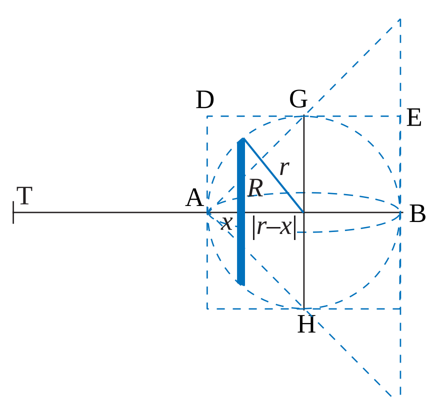
d'où :

$$r^2 = R^2 + r^2 - 2rx + x^2$$

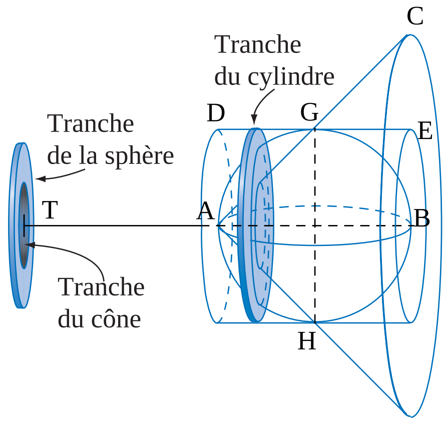
ce qui donne : $$R^2 = 2rx - x^2$$

Le volume de la tranche de la sphère est donc :

$$\Delta V_{\text{sphère}} = \pi\, x(2r - x)\, \Delta x.$$



Suspendons les tranches de la sphère et du cône à l'extrémité T de l'axe où $\overline{\mathrm{TA}} = 2r$.



Le moment d'un volume par rapport à un point étant le produit de ce volume par sa distance du point au centre de gravité du volume, on peut trouver le moment combiné de la tranche de sphère et de la tranche de cône par rapport à A, ce qui donne :

$$\begin{aligned}[\Delta V_{\text{sphère}} + \Delta V_{\text{cône}}]2r &= \\ [\pi(2rx - x^2)\,\Delta x + \pi x^2\,\Delta x]\;2r &= 4\pi r^2 x\,\Delta x \\ &= x\,\Delta V_{\text{cylindre}}\end{aligned}$$

Le moment combiné de la tranche de sphère et de la tranche de cône est donc égal au moment de la tranche cylindrique dans la position qu'elle occupe, à une distance x du point A. En additionnant les moments de toutes les tranches, on obtient que :

$$2r\,(V_{\text{sphère}} + V_{\text{cône}}) = 4r\,V_{\text{cylindre}}$$

Cependant, le volume du cylindre est le produit de l'aire de sa base, πr^2, par sa hauteur, $2r$, soit $V_{\text{cylindre}} = 2\pi r^3$. Selon un résultat démontré par Eudoxe, le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre de même rayon et de même hauteur, on a donc $V_{\text{cône}} = 8\pi r^3/3$. En substituant, on a donc :

$$2r\left[V_{\text{sphère}} + \frac{8\pi r^3}{3}\right] = 8\pi r^4$$

$$V_{\text{sphère}} + \frac{8\pi r^3}{3} = 4\pi r^3$$

$$V_{\text{sphère}} = 4\pi r^3 - \frac{8\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

et : $$V_{\text{sphère}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

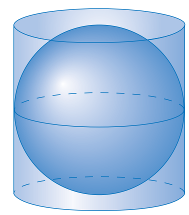
Archimède obtient donc la description du volume de la sphère en fonction de son rayon. Il démontre alors, par la méthode d'exhaustion, que ce résultat est exact. De plus, il établit le rapport du volume du cylindre sur le volume de la sphère et obtient :

$$\frac{V_{\text{cylindre}}}{V_{\text{sphère}}} = \frac{2\pi r^3}{4\pi r^3/3} = \frac{3}{2}$$

Il établit le même rapport entre les surfaces du cylindre et de la sphère.

Théorème

Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère avec un diamètre égal à celui de la sphère, le volume et la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et la surface de la sphère.



Cette présentation de quelques-uns des travaux d'Archimède permet d'apprécier l'imagination dont il a fait preuve dans sa démarche scientifique et le souci qu'il avait de démontrer les résultats que lui suggérait sa méthode de recherche.

CONCLUSION

Entre les mains habiles d'Archimède, la méthode d'exhaustion a permis d'établir plusieurs résultats intéressants que l'on obtient maintenant avec le calcul intégral. Il a utilisé cette méthode de deux façons : pour calculer une valeur approchée et pour démontrer des formules d'aires et de volumes. Le calcul de π est un exemple du premier type d'utilisation. La démonstration par exhaustion est en fait une double réduction à l'absurde. Ainsi, pour montrer que l'aire du cercle est égale à l'aire du triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence, il faut montrer que l'aire du triangle ne peut être ni plus grande ni plus petite que celle du cercle. Son idée de décomposer une surface en bandes parallèles et un volume en tranches parallèles sera reprise par Cavalieri dans sa méthode des indivisibles.

BIBLIOGRAPHIE

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc.,1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Caratini, Roger, *Les Mathématiques*, Paris, Bordas, 1985.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Cuomo, S. *Ancient Mathematics, London and New York, Routledge, Taylor and Francis Group, 2001, 290 p.*

Davis, Philip J, Hersh, Reuben, Marchisotto, Elena Anne. *The Mathematical Experience*, Study edition, Boston, Birkhäuser, 1995, 485 p.

Dhombres, Jean, *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. Publications de l'Irem de Nantes, Paris, Cedic/ Fernand Nathan, 1978, 338 p.

Dunham, William. *The Mathematical Universe,* New York, John Wiley & Sons, Inc., 1994, 314 p.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics,* New-York, Holt Rinehart and Winston, 1976, 588 p.

Fowler, D.H. *The Mathematics of Plato's Academy, a New Reconstruction*, Oxford, Oxford University Press, 1990, 401 p.

Guedj, Denis, *Le Théorème du Perroquet*, Paris, Éditions du Seuil, 1998, 520 p.

Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972, 1238 p.

Kramer, Edna E. *The Nature and Growth of Modern Mathematics,* New York, Hawthorn Books, Inc. Publishers, 1970, 758 p.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc. 1958, 2 vol. 1 299 p.

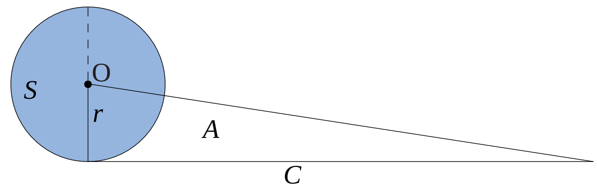
Struik, David. *A Concise History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc. 1967, 195 p.

EXERCICES

1. Soient C_1 et C_2 deux cercles d'aire A_1 et A_2 et dont les diamètres sont respectivement d_1 et d_2. Montrer par l'absurde que le rapport des aires ne peut être plus petit que le rapport des carrés des diamètres.

2. Soient C_1 et C_2 deux cercles d'aire A_1 et A_2 et dont les diamètres sont respectivement d_1 et d_2. En utilisant le fait que le rapport des aires est égal au rapport des carrés des diamètres, montrer que le rapport des aires est égal au rapport des carrés des rayons.

3. Soit un cercle de rayon r et un triangle dont la hauteur est le rayon du cercle et la base est la longueur C de la circonférence. Soit S l'aire du cercle et A l'aire du triangle, montrer par réduction à l'absurde que l'aire du cercle ne peut être plus petite que l'aire du triangle.



4. Montrer que la somme des n premiers termes de la progression géométrique
$$\{a;\ ar;\ ar^2;\ ar^3;\ \ldots;\ ar^n;\ \ldots\}$$
est égale à
$$S_n = a\frac{(1-r)^n}{1-r}$$

5. Montrer que la somme de tous les termes de la progression géométrique
$$\{a;\ ar;\ ar^2;\ ar^3;\ \ldots;\ ar^n;\ \ldots\}$$
est égale à:
$$S = \frac{a}{1-r}$$

6. Utiliser le résultat du numéro 5 pour trouver la somme
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

7. Utiliser le résultat du numéro 5 pour trouver la somme
$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$$

8. Utiliser le résultat du numéro 5 pour trouver la somme
$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+\ldots$$

9. Trouver une expression donnant la somme infinie de la progression géométrique de raison $1/n$ où $n \in \mathbf{Z}$ et $n > 0$.

10 Trouver une expression donnant la somme infinie de la progression géométrique de raison $1/n$ où $n \in \mathbf{Z}$ et $n < 0$.