

ÉRATOSTHÈNE

par: André Ross
Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon



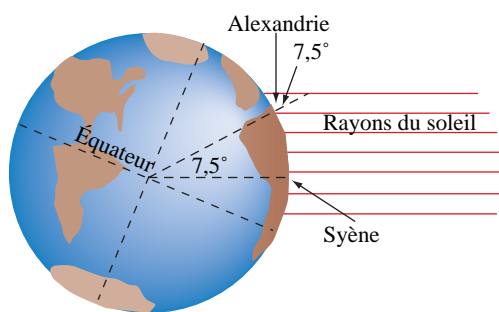
Ératosthène est né en 276 av. J.-C. à Cyrène (Shahhat, Libye). Après avoir étudié à Alexandrie et à Athènes, il s'installe à Alexandrie où il devient directeur de la bibliothèque. Il fait des recherches en géométrie et en théorie de nombres. Il est surtout connu par le *crible d'Ératosthène* qui consiste à éliminer de la liste des nombres tous les multiples des nombres premiers. Le crible, sous une forme modifiée, est encore un instrument important de nos jours en théorie de nombres.

Il a réalisé une mesure assez précise de la circonférence terrestre et il a compilé un catalogue d'étoiles. Il est devenu aveugle à la fin de sa vie et on croit qu'il s'est laissé mourir de faim. Il est mort à Alexandrie en 197 av. J.-C.



CIRCONFÉRENCE TERRESTRE

Ératosthène était bibliothécaire d'Alexandrie et il disposait de tous les renseignements sur les événements curieux observés dans l'empire d'Alexandre. C'est ainsi qu'il apprit qu'au solstice d'été, le Soleil se réfléchissait à midi dans l'eau d'un puits profond de Syène (aujourd'hui Assouan) non loin de la première cataracte du Nil. À ce moment, le Soleil était donc à la verticale du puits. Le même jour à midi, dans la ville d'Alexandrie, située à environ 830 km au nord, l'ombre d'un pilier permettait de déterminer que le Soleil était à 7,5 degrés de la verticale.



En utilisant ces informations et le fait que la mesure de l'angle au centre est égale à la mesure de l'arc intercepté, il a fait le calcul suivant :

$$C = \frac{360^\circ}{7,5^\circ} \times 830 \approx 40\,000 \text{ km}$$

Ératosthène est le premier à avoir calculé la circonférence de la Terre. On remarque que ce résultat est fondé sur les travaux géométriques des prédécesseurs. Strabo, un géographe grec du premier siècle avant J.-C. prétend qu'après avoir effectué ce calcul, Ératosthène aurait réalisé qu'il était possible d'atteindre les Indes en traversant l'Océan Atlantique. Ce voyage fut entrepris par Christophe Colomb qui, avant d'appareiller, avait évalué la circonférence à environ 28 300 km. Il s'est basé sur l'interprétation de calculs de géographes ultérieurs à Ératosthène, entre autres Poséidon (premier siècle) et

Ptolémée (deuxième siècle). Une erreur dans l'interprétation de l'unité de mesure utilisée par ces géographes est la cause de cette sous-évaluation. S'il avait connu la valeur exacte, il n'aurait peut-être jamais entrepris le voyage à cause de la trop grande distance.

Comme astronome, Ératosthène a construit de nouveaux instruments, a fait plusieurs observations et a utilisé ses connaissances pour une refonte du calendrier. Le vieux calendrier grec basé sur une année de douze mois de trente jours fut remplacé par un calendrier basé sur l'année égyptienne de 365 jours auquel il ajouta une journée supplémentaire à tous les quatre ans. Ce calendrier fut adopté par les Romains lorsque Jules César fit appel à un Alexandrin, Sosigène, pour réformer le calendrier romain. Comme contribution exceptionnelle, César donna son nom à ce calendrier qui fut appelé calendrier julien. Ce calendrier fut repris par le monde occidental avec la légère modification que nous omettons les années bissextiles séculaires, sauf celles dont le millésime est divisible par 400. Les travaux d'Ératosthène furent repris et poussés plus loin par Strabo (63-15 av. J.-C.) et Poséidon (premier siècle av. J.-C.) puis par Hipparque et Ptolémée.

CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

Ératosthène imagina une méthode, appelée « crible d'Ératosthène » pour trouver les nombres premiers impairs. La méthode consiste à écrire tous les nombres impairs. Par la suite, on biffe tous les multiples de 3 en tirant profit de la régularité des occurrences. On fait de même pour les multiples de 5, les multiples de 7, ainsi de suite. Cette méthode est illustrée ci-dessous avec les nombres de 3 à 321.

Le crible d'ÉRATOSTHÈNE

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 5 | 7 | | 11 | 13 | | 17 | 19 | |
| 23 | 25 | | 29 | 31 | | 35 | 37 | | 41 |
| 43 | | 47 | 49 | | 53 | 55 | | 59 | 61 |
| | 65 | 67 | | 71 | 73 | | 77 | 79 | |
| 83 | 85 | | 89 | 91 | | 95 | 97 | | 101 |
| 103 | | 107 | 109 | | 113 | 115 | | 119 | 121 |
| | 125 | 127 | | 131 | 133 | | 137 | 139 | |
| 143 | 145 | | 149 | 151 | | 155 | 157 | | 161 |
| 163 | | 167 | 169 | | 173 | 175 | | 179 | 181 |
| | 185 | 187 | | 191 | 193 | | 197 | 199 | |
| 203 | 205 | | 209 | 211 | | 215 | 217 | | 221 |
| 223 | | 227 | 229 | | 233 | 235 | | 239 | 241 |
| | 245 | 247 | | 251 | 253 | | 257 | 259 | |
| 263 | 265 | | 269 | 271 | | 275 | 277 | | 281 |
| 283 | | 287 | 289 | | 293 | 295 | | 299 | 301 |
| | 305 | 307 | | 311 | 313 | | 317 | 319 | |

LES MULTIPLES DE 3

En masquant les premiers multiples de 3, on identifie rapidement les diagonales suivantes lesquelles ils se distribuent, ce qui permet de les masquer plus rapidement. Même si on formait plus de colonnes, on détecterait quand même un comportement identique.

Les multiples de 3 sont masqués

Le crible d'ÉRATOSTHÈNE

| | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | | 17 | 19 | 21 |
| 23 | | 27 | 29 | 31 | 33 | | 37 | 39 | 41 |
| 43 | | 47 | 49 | 51 | 53 | | 57 | 59 | 61 |
| 63 | | 67 | 69 | 71 | 73 | | 77 | 79 | 81 |
| 83 | | 87 | 89 | 91 | 93 | | 97 | 99 | 101 |
| 103 | | 107 | 109 | 111 | 113 | | 117 | 119 | 121 |
| 123 | | 127 | 129 | 131 | 133 | | 137 | 139 | 141 |
| 143 | | 147 | 149 | 151 | 153 | | 157 | 159 | 161 |
| 163 | | 167 | 169 | 171 | 173 | | 177 | 179 | 181 |
| 183 | | 187 | 189 | 191 | 193 | | 197 | 199 | 201 |
| 203 | | 207 | 209 | 211 | 213 | | 217 | 219 | 221 |
| 223 | | 227 | 229 | 231 | 233 | | 237 | 239 | 241 |
| 243 | | 247 | 249 | 251 | 253 | | 257 | 259 | 261 |
| 263 | | 267 | 269 | 271 | 273 | | 277 | 279 | 281 |
| 283 | | 287 | 289 | 291 | 293 | | 297 | 299 | 301 |
| 303 | | 307 | 309 | 311 | 313 | | 317 | 319 | 321 |

LES MULTIPLES DE 5

Les multiples de 5 se regroupent dans les même colonnes car on a formé 10 colonnes. Si on en avait formé 15 ou 20, on aurait la même chose car le nombre de colonnes est un multiple de 5.

En formant 12 colonnes ou 16 colonnes, par exemple, les multiples de 5 se distribueraient selon des obliques.

Les multiples de 5 sont masqués

Le crible d'ÉRATOSTHÈNE

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | |
| 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | | 37 | 39 | 41 |
| 43 | 45 | 47 | | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 |
| | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | | 79 | 81 |
| 83 | 85 | 87 | 89 | | 93 | 95 | 97 | 99 | 101 |
| 103 | | 107 | 109 | 111 | 113 | 115 | 117 | | 121 |
| 123 | 125 | 127 | 129 | 131 | | 135 | 137 | 139 | 141 |
| 143 | 145 | | 149 | 151 | 153 | 155 | 157 | 159 | |
| 163 | 165 | 167 | 169 | 171 | 173 | | 177 | 179 | 181 |
| 183 | 185 | 187 | | 191 | 193 | 195 | 197 | 199 | 201 |
| | 205 | 207 | 209 | 211 | 213 | 215 | | 219 | 221 |
| 223 | 225 | 227 | 229 | | 233 | 235 | 237 | 239 | 241 |
| 243 | | 247 | 249 | 251 | 253 | 255 | 257 | | 261 |
| 263 | 265 | 267 | 269 | 271 | | 275 | 277 | 279 | 281 |
| 283 | 285 | | 289 | 291 | 293 | 295 | 297 | 299 | |
| 303 | 305 | 307 | 309 | 311 | 313 | | 317 | 319 | 321 |

LES MULTIPLES DE 7

Les multiples de 7 se distribueraient selon des obliques car le nombre de colonnes n'est pas un multiple de 7. Après avoir trouvé les obliques sur lesquelles elles se distribuent, on peut biffer à grands traits. En utilisant des marqueurs de couleurs différentes pour masquer les multiples d'un nombre premier, on peut facilement détecter les régularités.

Les multiples de 7 sont masqués

En superposant les tableaux précédents et en masquant les multiples des autres nombres premiers, on a le tableau ci-contre. Seuls les nombres premiers sont passés au travers du crible. Le tableau donne donc les nombres premiers impairs plus petits que 321.

Pour savoir quand s'arrêter, il faut simplement se rappeler que les multiples d'un nombre premier dont le facteur autre que le nombre premier est plus petit que le nombre considéré sont déjà biffés. Ainsi, dans le tableau ci-contre, tous les multiples de 19 plus petits que $19^2 = 361$ ont déjà été biffés. Or, le plus grand nombre du tableau est 321. Il est donc inutile de poursuivre si on n'ajoute pas des nombres dans le tableau.

Ératosthène a également produit un traité sur la comédie en 12 volumes, deux grammaires et des poème. En utilisant les ressources de sa bibliothèque, il a écrit l'histoire du monde grec en éliminant les récits mythiques et en utilisant les olympiades (période de quatre ans) pour dater les événements. En philosophie, son œuvre principale est *Platonicus*, un dialogue sur les proportions et la progression. Il y donne une solution au problème de la duplication du cube (comment doubler le volume d'un cube).

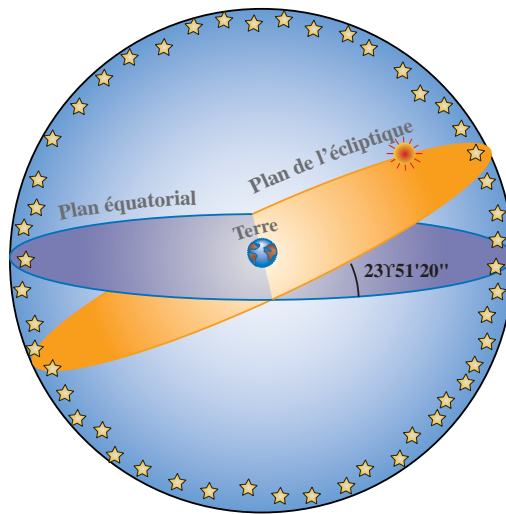
Son ouvrage le plus important est sa géographie en trois volumes. C'est dans cet ouvrage qu'il donne son calcul de la circonférence terrestre. Il pose des bases nouvelles à la géographie pour remplacer les récits homériques. Il introduit l'usage des méridiens et des parallèles dans l'élaboration des cartes géographiques. Cependant, ni les méridiens ni les parallèles qu'il utilise ne sont pas à égale distance. Il a plutôt retenu des particularités géographiques : les colonnes d'Hercule (déroit de Gibraltar), l'Euphrate et la mer Caspienne ou l'emplacement de villes importantes, Rhodes, Alexandrie, Carthage, pour situer ses méridiens et parallèles. La carte de la page suivante est une reproduction du monde habitable selon Ératosthène.

Le crible d'ÉRATOSTHÈNE

| | | | | | | |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 |
| 23 | | 29 | 31 | 37 | 41 | |
| 43 | | 47 | 53 | 59 | 61 | |
| 83 | | 67 | 71 | 73 | 79 | |
| 103 | | 89 | 97 | 101 | | |
| | | 107 | 109 | 113 | | |
| | | 127 | 131 | 137 | 139 | |
| | | 149 | 151 | 157 | | |
| 163 | | 167 | 173 | 179 | 181 | |
| | | 191 | 193 | 197 | 199 | |
| | | 211 | 211 | 211 | 211 | |
| 223 | | 227 | 229 | 233 | 239 | 241 |
| | | 251 | 251 | 251 | 251 | |
| 263 | | 269 | 271 | 277 | 281 | |
| 283 | | 293 | 293 | 293 | 293 | |
| | | 307 | 311 | 313 | 317 | |

Les nombres premiers impairs plus petits que 321

Selon Ptolémée, Ératosthène aurait calculé l'angle d'inclinaison de l'axe de la Terre par rapport au plan de l'orbite des planète (plan de l'écliptique) et obtenu la valeur de $11/83$ de 180° , soit $23^\circ 51' 20''$. C'est cette inclinaison qui explique le phénomène des saisons.



Ératosthène a également estimé la distance de la Terre au Soleil à 804 000 000 stades et la distance de la Lune à 780 000 stades. Il a calculé ces valeurs à partir de données prises lors d'une éclipse solaire.

EXERCICES

1. En utilisant le procédé d'Ératosthène, déterminer les nombres premiers de 0 à 1 000.

Le crible d'ÉRATOSTHÈNE

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 |
| 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 51 | 57 | 59 | 61 |
| 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 |
| 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 | 97 | 99 | 101 |
| 103 | 105 | 107 | 109 | 111 | 113 | 115 | 117 | 119 | 121 |
| 123 | 125 | 127 | 129 | 131 | 133 | 135 | 137 | 139 | 141 |
| 143 | 145 | 147 | 149 | 151 | 153 | 155 | 157 | 159 | 161 |
| 163 | 165 | 167 | 169 | 171 | 173 | 175 | 177 | 179 | 181 |
| 183 | 185 | 187 | 189 | 191 | 193 | 195 | 197 | 199 | 201 |
| 203 | 205 | 207 | 209 | 211 | 213 | 215 | 217 | 219 | 221 |
| 223 | 225 | 227 | 229 | 231 | 233 | 235 | 237 | 239 | 241 |
| 243 | 245 | 247 | 249 | 251 | 253 | 255 | 257 | 259 | 261 |
| 263 | 265 | 267 | 269 | 271 | 273 | 275 | 277 | 279 | 281 |
| 283 | 285 | 287 | 289 | 291 | 293 | 295 | 297 | 299 | 301 |
| 303 | 305 | 307 | 309 | 311 | 313 | 315 | 317 | 319 | 321 |
| 323 | 325 | 327 | 329 | 331 | 333 | 335 | 337 | 339 | 341 |
| 343 | 345 | 347 | 349 | 351 | 353 | 355 | 357 | 359 | 361 |
| 363 | 365 | 367 | 369 | 371 | 373 | 375 | 377 | 379 | 381 |
| 383 | 385 | 387 | 389 | 391 | 393 | 395 | 397 | 399 | 401 |
| 403 | 405 | 407 | 409 | 411 | 413 | 415 | 417 | 419 | 421 |
| 423 | 425 | 427 | 429 | 431 | 433 | 435 | 437 | 439 | 441 |
| 443 | 445 | 447 | 449 | 451 | 453 | 455 | 457 | 459 | 461 |
| 463 | 465 | 467 | 469 | 471 | 473 | 475 | 477 | 479 | 481 |
| 483 | 485 | 487 | 489 | 491 | 493 | 495 | 497 | 499 | 501 |
| 503 | 505 | 507 | 509 | 511 | 513 | 515 | 517 | 519 | 521 |
| 523 | 525 | 527 | 529 | 531 | 533 | 535 | 537 | 539 | 541 |
| 543 | 545 | 547 | 549 | 551 | 553 | 555 | 557 | 559 | 561 |
| 563 | 565 | 567 | 569 | 571 | 573 | 575 | 577 | 579 | 581 |
| 583 | 585 | 587 | 589 | 591 | 593 | 595 | 597 | 599 | 601 |
| 603 | 605 | 607 | 609 | 611 | 613 | 615 | 617 | 619 | 621 |
| 623 | 625 | 627 | 629 | 631 | 633 | 635 | 637 | 639 | 641 |
| 643 | 645 | 647 | 649 | 651 | 653 | 655 | 657 | 659 | 661 |
| 663 | 665 | 667 | 669 | 671 | 673 | 675 | 677 | 679 | 681 |
| 683 | 685 | 687 | 689 | 691 | 693 | 695 | 697 | 699 | 701 |
| 703 | 705 | 707 | 709 | 711 | 713 | 715 | 717 | 719 | 721 |
| 723 | 725 | 727 | 729 | 731 | 733 | 735 | 737 | 739 | 741 |
| 743 | 745 | 747 | 749 | 751 | 753 | 755 | 757 | 759 | 761 |
| 763 | 765 | 767 | 769 | 771 | 773 | 775 | 777 | 779 | 781 |
| 783 | 785 | 787 | 789 | 791 | 793 | 795 | 797 | 799 | 801 |
| 803 | 805 | 807 | 809 | 811 | 813 | 815 | 817 | 819 | 821 |
| 823 | 825 | 827 | 829 | 831 | 833 | 835 | 837 | 839 | 841 |
| 843 | 845 | 847 | 849 | 851 | 853 | 855 | 857 | 859 | 861 |
| 863 | 865 | 867 | 869 | 871 | 873 | 875 | 877 | 879 | 881 |
| 883 | 885 | 887 | 889 | 891 | 893 | 895 | 897 | 899 | 901 |
| 903 | 905 | 907 | 909 | 911 | 913 | 915 | 917 | 919 | 921 |
| 923 | 925 | 927 | 929 | 931 | 933 | 935 | 937 | 939 | 941 |
| 943 | 945 | 947 | 949 | 951 | 953 | 955 | 957 | 959 | 961 |
| 963 | 965 | 967 | 969 | 971 | 973 | 975 | 977 | 979 | 981 |
| 983 | 985 | 987 | 989 | 991 | 993 | 995 | 997 | 999 | 1001 |