RENÉ DESCARTES

par: André Ross
professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

René Descartes est né près de Tours en France, le 31 mars 1596. Il appartenait à une famille de la petite noblesse d'origine poitevine. Il étudia au collège de La Flèche de 1604 à 1612. Le recteur de ce collège jésuite, constatant la frêle constitution de Descartes lui accorda la permission de rester au lit le matin et d'aller en classe lorsqu'il se sentait dispos. À partir de ce moment, sauf pour la dernière partie de sa vie, il passa ses matinées au lit lorsqu'il voulait réfléchir. Au collège de La Flèche, il étudia les auteurs classiques, la logique et la philosophie d'Aristote. Il s'initia également aux mathématiques dans l'ouvrage de Clavius. Il apprit surtout qu'il savait peu de choses et que les mathématiques étaient, à ses yeux, le seul sujet d'étude satisfaisant par la façon dont la connaissance y est construite. Elles constitueront le fondement de sa pensée. Après avoir séjourné un certain temps à Paris, il étudia à l'université de Poitiers dont il reçut un diplôme en droit en 1616. Il s'inscrivit alors dans une école militaire à Breda au Pays-Bas. En 1618, il étudia les mathématiques et la mécanique avec le hollandais Isaac Beeckman (1588-1637) et commença à chercher comment unifier les sciences de la nature.

Pendant neuf ans, il s'adonna alternativement aux voyages, à l'étude et au métier de soldat. Il visita la Bohème (1620), la Hongrie (1621), l'Allemagne, la Hollande et la France (1622-1623). En 1623, à Paris, il fit la connaissance de Marin Mersenne qui le mit en contact avec le monde scientifique durant plusieurs années. Il visita l'Italie et, après un séjour à Venise, il retourna en France (1625). En 1628, il s'installa en Hollande pour y travailler en paix. Il y vécut pendant vingt ans à rédiger ses oeuvres et à correspondre avec d'autres savants européens.

Peu après son arrivée en Hollande, il débuta la rédaction de son premier traité de physique, *Le Monde, ou Traité de la Lumière*. La rédaction de cet ouvrage est presque complétée lorsqu'il apprend que Galilée a été assigné à résidence. Il décida alors de ne pas publier son ouvrage qui ne le sera, en partie, qu'après sa mort. En Hollande, plusieurs amis le pressant d'éditer ses oeuvres, il publia un traité appelé *Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité* *dans les sciences*. Cet ouvrage comporte trois appendices qui illustrent l'application de sa méthode, ce sont : *La Dioptrique, Les Météores* et *La Géométrie*. Ce traité fut publié à Leyden en 1637. Il publia *Méditations philosophiques* en 1641, *Principes de philosophie* en 1644 et *Passions de l'âme* en 1649. Durant son séjour en Hollande, il retourna trois fois en France et lors d'un de ces voyages, en 1647, il rencontra Blaise Pascal.

En 1649, cédant à l'insistance de la reine Christine de Suède qui l'invitait à sa cour, il quitta la Hollande. Mal lui en prit, car la reine décida que le seul moment qu'elle pouvait consacrer à l'étude de la philosophie était cinq heures du matin dans la bibliothèque glaciale du palais. Pour Descartes, habitué à faire la grasse matinée, ce fut fatal. Il attrapa une pneumonie et mourut le 18 février 1650 à l'âge de 54 ans. Son corps fut ramené en France en 1667.

L'ŒUVRE DE DESCARTES

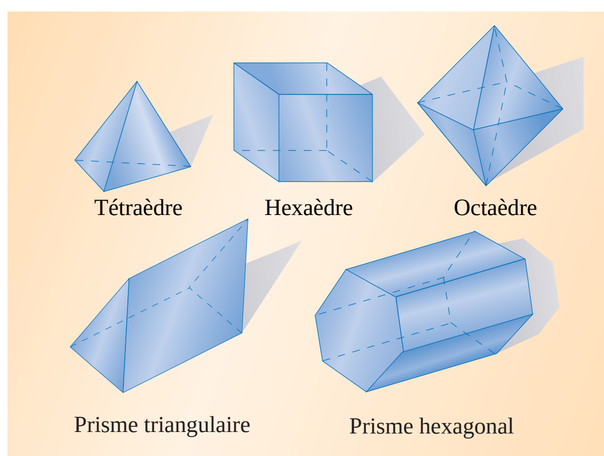
Descartes a cherché à structurer toute la connaissance sur le modèle mathématique ou plus précisément sur le modèle de la géométrie euclidienne. Il lui fallait donc identifier les axiomes à partir desquels il pourrait déduire toute connaissance. En procédant ainsi, il optait pour une approche purement rationnelle de la connaissance, rejetant l'apport de l'expérimentation. Les sens sont trompeurs, il faut s'en méfier dans la recherche de la vérité, ce qui, à ses yeux, disqualifiait l'expérimentation. Le « doute méthodique » qui est une remise en question des préjugés des sens et de l'enfance l'amènent à la conviction première de son système, sa propre existence: « Je pense donc je suis ». De cette première vérité découlent les autres par la théorie des idées innées. Il parvient ainsi à l'existence de Dieu et à la séparation de l'âme et du corps.

La Dioptrique est un ouvrage en optique dans lequel il y a peu d'idées nouvelles sur le sujet. *Les Météores* est le premier ouvrage cherchant à établir la météorologie sur une base scientifique. Cependant, plusieurs de ses énoncés sont faux et il aurait pu s'en rendre compte s'il avait réalisé quelques expériences simples. Ainsi, il véhicule la croyance populaire de l'époque selon laquelle l'eau qu'on a fait bouillir gèle plus rapidement alors que Roger Bacon avait démontré expérimentalement que cette conviction populaire était fausse. *La Géométrie* est la partie la plus importante de cet ouvrage. Il a simplifié les notations algébriques et énoncé les propriétés fondamentales des équations, laissant son nom au système d'axes cartésien. Certaines des idées de *La Géométrie* proviennent probablement des travaux d'Oresme même si celui-ci n'établit pas de liens directs entre la géométrie et l'algèbre. Descartes a découvert que les relations entre l'algèbre et la géométrie sont plus facilement intelligibles par l'usage de coordonnées dans l'étude des équations à deux inconnues. Sa méthode consistait essentiellement à représenter graphiquement des équations à deux variables.

La première contribution de Descartes aux mathématiques date de l'époque des voyages. C'est la relation:

$$s + f = a + 2$$

où s, f et a représentent respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes dans un polyèdre simple. Le lecteur peut mettre à l'épreuve cette relation à l'aide des figures ci-dessous.



On a ici une illustration intéressante de la force des mathématiques, une relation abstraite qui rend compte d'une propriété commune à une multitude de polyèdres. C'est la nature abstraite de la relation qui lui donne cette généralité.

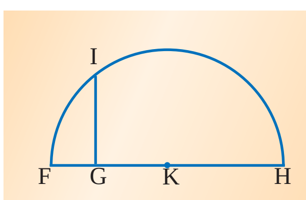
On attribue à Descartes la création de l'algèbre des polynômes et de la géométrie analytique en collaboration avec Fermat. Cependant, la géométrie de Descartes est très différente de notre géométrie analytique moderne et ne vise pas le même but. Dans le premier paragraphe de *La Géométrie*, il écrit :

> *Tous les problèmes de la géométrie peuvent facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.*

Le but est de faire une construction géométrique qui permettra de résoudre géométriquement le problème algébrique comme l'illustre sa méthode pour extraire la racine carrée d'un nombre.

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE

Pour extraire la racine carrée d'un segment de longueur GH, il le prolonge en ligne droite d'un segment FG de longueur unitaire. Il trace alors le demi-cercle de diamètre FH et élève en G la perpendiculaire à FH qui coupe la circonférence en I. Le segment GI représente alors la racine carrée de GH.



Cette construction géométrique est basée sur les théorèmes suivants :

Théorème

Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit (attribué à Thalès).

Théorème

Dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Dans la figure précédente, puisque le segment FG est unitaire par construction, on a :

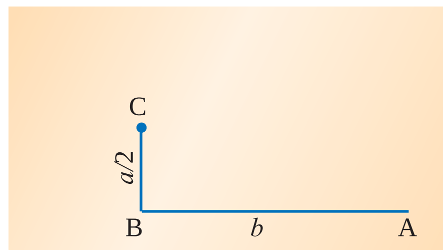
$$\frac{\overline{GH}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{FG}} \text{ d'où } \overline{GH} = \overline{GI}^2$$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES

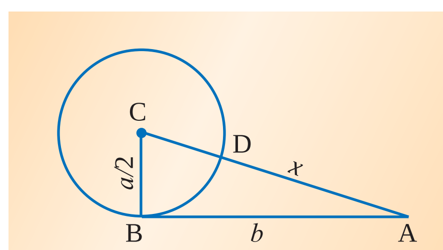
Descartes a développé plusieurs utilisations de la géométrie en lien avec l'algèbre. Voyons sa solution géométrique de l'équation de la forme :

$$x^2 + ax = b^2$$

Pour résoudre géométriquement cette équation, on trace d'abord un segment AB de longueur b et à son extrémité B, on élève un segment perpendiculaire BC de longueur $a/2$.



De l'extrémité C, on trace ensuite un cercle de rayon $a/2$. En joignant les points A et C, on détermine le point D qui est l'intersection de la circonférence et du segment AC.



Le segment AD est alors la longueur x cherchée. En effet, par le théorème de Pythagore, on a :

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$$

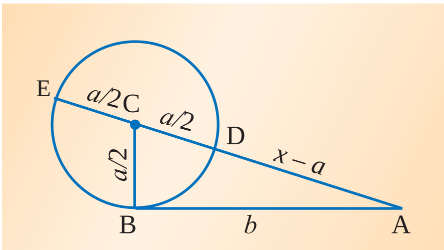
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b^2$$

d'où: $x^2 + ax = b^2$.

Avec la même figure, en prolongeant la sécante jusqu'en E et en posant $x = \overline{AE}$, on peut également montrer que le segment AE est la solution de l'équation :

$$x^2 - ax = b^2$$



Pour démontrer ce résultat, on utilise le théorème suivant :

Théorème

Lorsque d'un point hors d'un cercle, on trace une tangente et une sécante à ce cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

Ce théorème permet d'écrire que :

$$\frac{x-a}{b} = \frac{b}{x}$$

d'où : $$x^2 - ax = b^2$$

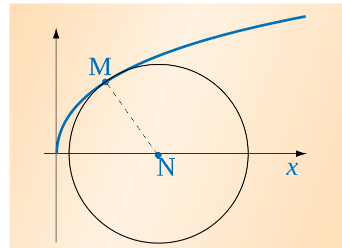
Le segment AE est donc la solution de l'équation quadratique.

On remarque que cette démarche de résolution d'équation quadratique est purement géométrique. La solution est un segment de droite et non pas un nombre. La solution algébrique à l'aide des radicaux est connue depuis longtemps, mais Descartes veut unifier les connaissances et les structurer sur un modèle déductif.

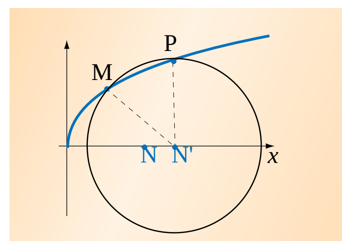
DESCARTES ET LA TANGENTE

Dans la deuxième partie de *La Géométrie*, Descartes a présenté une approche intéressante du problème des tangentes en un point M d'une courbe. Cette méthode consistait à trouver d'abord la normale à la courbe au point M, la normale étant la perpendiculaire à la tangente. Voici le raisonnement sur lequel il fonde sa démarche.

Si N est le point de rencontre de la normale et de l'axe des x, le cercle de centre N et de rayon NM est tangent à la courbe au point M.



Cependant si le point N ne coïncide pas exactement avec le pied de la normale, alors le cercle coupera la courbe en un second point P. Ce point P se rapprochera de M si le point N' se rapproche du point d'intersection de la normale et de l'axe des x.



Considérons la parabole d'équation

$$y^2 = 8x$$

et trouvons le point d'intersection de la normale au point M(x; y) avec l'axe des x, c'est-à-dire le point (x_1; 0). L'équation du cercle de centre N et de rayon NM est :

$$(x - x_1)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Les points de rencontre du cercle et de la parabole devant satisfaire les deux équations, on a :

$$(x - x_1)^2 + 8x - r^2 = 0$$
$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + 8x - r^2 = 0$$
$$x^2 - 2[x_1 - 4]x + (x_1^2 - r^2) = 0$$

Les racines sont :

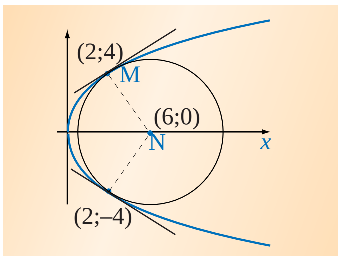
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{2(x_1 - 4) \pm \sqrt{4(x_1 - 4)^2 - 4(x_1^2 - r_1^2)}}{2}$$

Les points M et P coïncident lorsque l'expression sous le radical s'annule, on a alors une racine double et le cercle est tangent à la parabole. Ce qui donne :

$$x = x_1 - 4$$

d'où :

$$x_1 = x + 4$$



Ainsi, l'intersection de la normale au point (2; 4) et de l'axe des x est le point (x_1; 0) tel que $x_1 = x + 4$. Sachant que $x = 2$, l'abscisse du point de rencontre est :

$$x_1 = 2 + 4 = 6$$

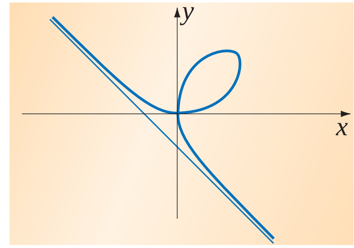
Après avoir tracé la normale, il est facile de tracer la tangente.

Ce résultat peut être généralisé à une parabole d'équation $y^2 = 2mx$, l'abscisse du point d'intersection de la normale et de l'axe des x est alors $x_1 = x + m$ où x est l'abscisse du point de tangence.

Par la suite Descartes utilisa l'approche qui prévaut maintenant, soit de déterminer la tangente par une droite qui tourne autour du point donné jusqu'à ce qu'un autre point où elle coupe la courbe vienne coïncider avec le premier. Cette approche fut mise de l'avant par Descartes pour améliorer la méthode des maxima et minima de Fermat.

La méthode de Descartes est purement algébrique et ne fait pas appel aux concepts de limite et d'infinitésimal. Ces concepts n'avaient pas à l'époque des fondements théoriques assez solides pour trouver grâce à ses yeux. Il appliqua sa méthode à des courbes difficiles, notamment à la courbe cubique appelée *Folium de Descartes* dont l'équation est :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$



Folium de Descartes

L'aire de la feuille vaut $3a^2/2$ tout comme l'aire entre la courbe et l'asymptote. L'équation de celle-ci est :

$$x + y + a = 0$$

La physique de Descartes

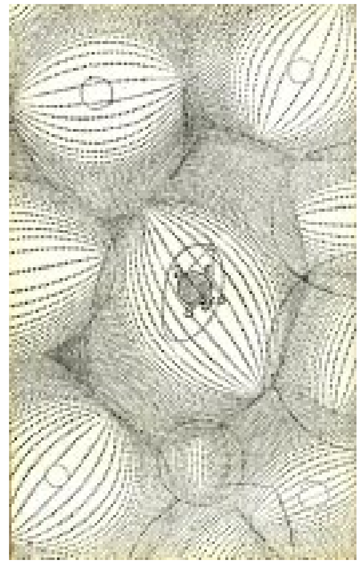
Descartes est à l'origine de la philosophie mécaniste de la Nature. Il retira de la physique les explications faisant appel aux volontés ou aux finalités dont foisonnait l'enseignement scolastique. Pour lui, chaque événement a une cause précise, qui n'est pas le fruit d'une volonté. Les phénomènes physiques ne peuvent s'expliquer que par l'intervention de causes mécaniques immédiates, en particulier les collisions (chocs) entre différents objets ou parties d'objets. Les lois physiques sont immuables et suffisent alors à expliquer l'évolution du monde. L'Univers de Descartes a été comparé à une immense horloge qui fonctionne toute seule sans que Dieu n'ait besoin de la remonter. Dieu est le créateur des lois de l'Univers, mais il n'intervient pas quotidiennement dans le fonctionnement de celui-ci.

Descartes oppose l'esprit, ou la pensée *(res cognitans)*, à la matière ou étendue *(res extensa)*. Pour lui, l'esprit est le seul siège d'activité spontanée dans l'univers, alors que l'étendue ne fait que suivre les lois physiques. Dans cette conception, les animaux et l'être humain sont, en quelque sorte, des automates. Il se méfie des sens qui sont trompeurs et sur lesquels on ne peut fonder la philosophie. Le seul fondement solide dont on ne peut douter est la pensée. Il accorde donc beaucoup d'importance aux mathématiques et néglige l'observation et l'expérience, ce qui l'amène à considérer que le monde extérieur, ou la réalité objective, est différent du monde sensible.

L'approche de Descartes a certaines caractéristiques modernes. Cependant, lorsqu'il veut décrire en détail le comportement du monde physique, ses théories sont souvent erronées. Pour lui, les objets agissent les uns sur les autres par contact. Le monde matériel est comme un fluide. Les différentes parties de la matière se comportent comme des boules de billard microscopiques dont l'interaction détermine toute la structure du monde visible. Cette conception l'amène à conclure à l'impossibilité du vide, malgré les travaux de Galilée. Celui-ci croyait que, dans le vide, tous les corps tomberaient avec la même accélération et que le mouvement d'un projectile serait parabolique. Descartes croit au contraire que c'est le milieu qui est la cause de la gravité. Descartes s'oppose aussi à Pascal qui, en répétant et en modifiant l'expérience de Torricelli a démontré expérimentalement que le vide est possible dans une colonne de mercure et qui a démontré l'existence de la pression atmosphérique par l'expérience du Puy-de-Dôme, Pascal.

Descartes est le premier à énoncer correctement la loi d'inertie: tout objet conserve une vitesse constante (en grandeur et en direction), jusqu'à ce qu'il entre en collision avec un autre objet. Cependant, il se trompe quant aux propriétés de la collision elle-même : parmi les sept lois des chocs qu'il énonce, une seule est en fait correcte. Il définit tout de même (1640) la notion de quantité de mouvement, $p = mv$, dans sa forme scalaire et non vectorielle. Il est essentiel pour lui que la quantité de mouvement totale soit conservée, afin que le mouvement ne s'épuise pas et que 1'«horloge» que constitue l'Univers n'ait pas besoin d'être remontée.

Pour expliquer l'orbite des planètes, il échafaude sa théorie des tourbillons. L'univers est rempli de matière qui, par un mouvement initial, a donné un système de tourbillons. Tout le système solaire est un tourbillon qui entraîne les planètes. Chaque planète est le centre d'un autre tourbillon, qui garde dans sa proximité la matière qui l'environne. Ce qui, selon lui, explique le fait que la Lune soit en orbite autour de la Terre et que les objets sur Terre ne tombent pas dans son sillage durant son périple autour du Soleil. Par ces tourbillons, il explique pourquoi toutes les planètes du système solaire effectuent leur rotation autour du Soleil dans le même sens.



Tourbillons de Descartes.
Selon cette théorie, il existe une multitude d'univers et les comètes passent de l'un à l'autre.

La théorie des tourbillons ne tient pas compte des travaux de Kepler puisque les planètes se doivent d'occuper le centre du tourbillon et non le foyer d'une trajectoire elliptique. De plus, les frottements de ces tourbillons de matière devraient ralentir leur vitesse à la longue et, avec le temps, tout le système devrait s'immobiliser. Pour les penseurs qui rejettent les explications faisant appel à une volonté ou à des vertus de l'univers ou de la matière, la théorie des tourbillons a le mérite d'expliquer les phénomènes par des causes mécanistes. L'action à distance d'une force, comme la gravitation de Newton, ressemble trop aux explications obscures de l'enseignement scolastique pour être acceptée. Cette théorie des tourbillons était encore en vigueur en France cent ans après que Newton eut montré son impossibilité comme système dynamique.

Descartes avait raison en accordant une place prépondérante aux mathématiques dans la recherche de la connaissance scientifique. Il avait raison également en considérant que l'Univers gouverné par des lois. Cependant, ses théories physiques particulières sont erronées car lorsqu'il en vient aux théories particulières, sa méthode repose essentiellement sur l'intuition et néglige les expériences et les observations. Descartes a voulu remplacer le système complet enseigné par la scolastique par son propre système qui, malgré ses intentions, s'est révélé aussi vide de sens que celui de la scolastique. En négligeant l'expérimentation et en ayant recours à la pensée pure, à l'intuition et à l'imagination, il a échafaudé un système qui présentait des faiblesses analogues à celles du système enseigné par la scolastique. Il n'a pas tenu compte des faits et observations qui ne s'inséraient pas facilement dans son système, négligeant ainsi plusieurs découvertes scientifiques de son époque. Malgré ces lacunes, sa philosophie a joui d'une très grande réputation.

CONCLUSION

À l'époque de Descartes, la scolastique freine le développement scientifique. Le recours aux Écritures et l'interprétation des auteurs comme Aristote pour parvenir à la vérité et comprendre les phénomènes physiques est une voie sans issue. Il fallait développer une nouvelle philosophie, une nouvelle façon d`établir ce qui était une vérité scientifique. C'est ce que Descartes a fait. Pour lui, en sciences, il faut n'admettre que la raison. Il faut conduire par ordre ses pensées pour atteindre la vérité en se servant des évidences intuitives et en procédant par déduction. Sa conviction première est celle de son existence comme sujet pensant. Il admet que certaines vérités sont innées car elles s'imposent avec force à l'esprit. C'est le cas de l'existence de Dieu.

Il a appliqué sa méthode à la géométrie, établissant des liens entre l'algèbre et la géométrie, ce qui va donner naissance à la géométrie analytique. En optique, sa méthode lui a permis d'établir la loi de la réfraction. Il a également étendu cette méthode, non sans erreurs, à la biologie et à la médecine.

La philosophie de Descartes a exercé une grande influence au XVIIe siècle et a permis de changer la perception du rôle des sciences dans le développement de la connaissance. Il n'a cependant pas fait place à l'expérimentation comme moyen de construire la connaissance scientifique.

EXERCICES

1. Construire géométriquement le segment de droite représentant la racine carrée des nombres suivants.
   a) 9 *b*) 6

2. Vérifier que $s + f = a + 2$ pour chacun des solides de la page 2.

3. Construire géométriquement le segment de droite représentant la solution des équations suivantes par la méthode de Descartes.
   a) $x^2 + 2x = 9$ *b*) $x^2 + 6x = 25$

4. Construire, par la méthode de Descartes, la tangente à la courbe $y^2 = 8x$ aux points d'abscisse $x = 1$ et $x = 3$.

5. Construire, par la méthode de Descartes, la tangente à la courbe $y^2 = 16x$ aux points d'abscisse $x = 1$ et $x = 3$.

BIBLIOGRAPHIE

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc., 1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Devlin, Keith, *The Language of Mathematics, making the invisible visible,* New York, W.H.Freeman and Company, 1998, 344 p.

Dewdney, A.K. *A Mathematical Mystery Tour,* New York, John Wiley &218 p. Sons, Inc. 1999,

Guenancia, Pierre, *Descartes, Bien conduire sa raison*, France, Découvertes Gallimard, Philosophie, 1996, 128 p.

Hersh, Reuben, *What is Mathematics Really?,* New York, Oxford University Press, Inc, 1997, 343 p.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics,* New-York, Holt Rinehart and Winston, 1976, 588 p.

Kline, Morris. *Mathematical Thought fron Ancient to Modern Times,* New York, Oxford University Press, 1972, 1238 p.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc. 1958, 2 vol. 1 299 p.

Struik, David. *A Concise History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc. 1967, 195 p.