

CALCUL DE π

par : André Ross

professeur de mathématiques

Cégep de Lévis-Lauzon

INTRODUCTION

Dès les débuts de la géométrie, on a voulu « mesurer » le cercle. Dans la Bible, on indique qu'il faut tripler le diamètre pour trouver la circonférence d'un cercle. Pour les anciens Égyptiens, la surface d'un cercle est égale à la surface d'un carré dont le côté vaut les $8/9$ du diamètre. En considérant un cercle dont le diamètre est 1, on a alors que l'aire du cercle est $\pi/4$ et l'aire du carré est $64/81$, d'où

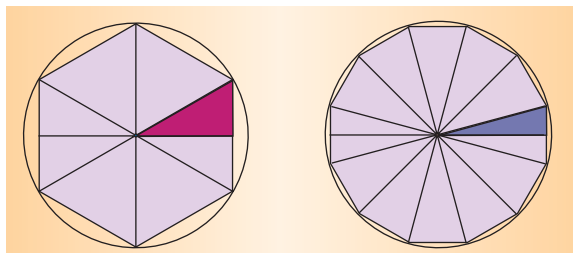
$$\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$$

Ce qui donne : $\pi = \frac{256}{81} = 3,16049\dots$

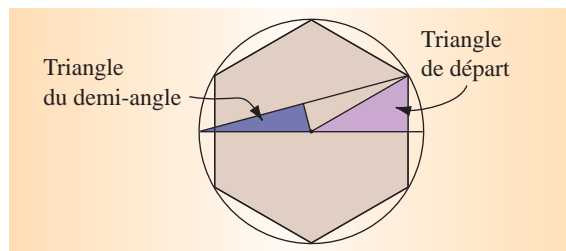
Archimède est le premier mathématicien à utiliser une méthode rationnelle pour calculer la valeur de π . Il utilise le principe de la méthode d'exhaustion pour ce calcul. Il construit un hexagone inscrit et un hexagone circonscrit à un cercle. Pour ce faire, il suffit de placer six triangles équilatéraux pour former un premier hexagone, tracer le cercle circonscrit, puis l'hexagone circonscrit. En abaissant le rayon perpendiculairement aux côtés de l'hexagone, on peut déterminer les points sommets d'un polygone à 12 côtés, puis 24 côtés et ainsi de suite. Il s'est rendu à 96 côtés.

RELATIONS DU DEMI-ANGLE

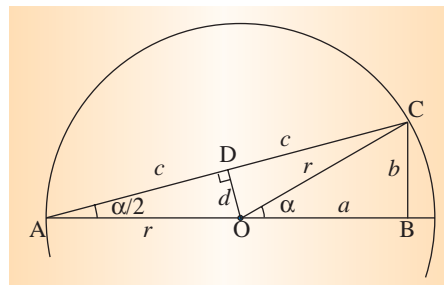
Pour effectuer ses calculs, Archimède a d'abord établi les relations du demi-angle. Il avait constaté qu'en doublant le nombre de côtés, on divise par 2 l'angle au centre interceptant le demi-côté du polygone.



Il est possible d'établir une relation entre ces angles puisque la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc. On peut donc disposer le triangle du polygone de départ et celui du polygone obtenu en doublant le nombre de côtés comme dans la figure suivante.



En utilisant cette représentation, on peut établir une relation entre les côtés du triangle du demi-angle et les côtés du triangle de l'angle complet. Pour simplifier ce qui va suivre, nous allons utiliser la notation moderne de la racine carrée et considérer un cercle de rayon unitaire. De plus, dans la figure ci-dessous, notons a et b , les côtés de l'angle droit du triangle rectangle OBC et, c et d , les côtés de l'angle droit du triangle rectangle AOD.



Dans un cercle, le rayon perpendiculaire à une corde divise celle-ci en deux parties égales. Par conséquent, le point D divise le côté AC en deux parties égales. La mesure de DC est donc égale à c . De plus, les triangles AOD et ABC sont semblables puisque ce sont des triangles rectangles ayant un angle aigu commun, soit l'angle en A dont la mesure est $\alpha/2$. Les côtés homologues de ces triangles sont donc proportionnels. On a donc :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OD}}$$

D'où :

$$\frac{2c}{r} = \frac{r+a}{c} = \frac{b}{d}$$

En égalant les deux premiers rapports, on a :

$$\frac{2c}{r} = \frac{r+a}{c}$$

Par le produit des extrêmes et le produit des moyens, on obtient :

$$2c^2 = r^2 + ar$$

d'où :

$$c = \sqrt{\frac{r^2 + ar}{2}}$$

En considérant les deux derniers rapports et en isolant d , on obtient :

$$d = \frac{bc}{r+a}$$

Cependant, par le théorème de Pythagore, on a :

$$a^2 + b^2 = r^2$$

d'où :

$$b = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{(r-a)(r+a)}$$

En substituant, on a alors :

$$d = \frac{\sqrt{(r-a)(r+a)}}{r+a} \sqrt{\frac{r(r+a)}{2}} = \sqrt{\frac{r(r-a)}{2}} = \sqrt{\frac{r^2 - ra}{2}}$$

On obtient donc la description des côtés du triangle du demi-angle en fonction du côté adjacent du triangle de départ, soit :

$$c = \sqrt{\frac{r^2 + ra}{2}} \quad \text{et} \quad d = \sqrt{\frac{r^2 - ra}{2}},$$

où r est le rayon du cercle et a , l'apothème du polygone inscrit.

VALEUR APPROCHÉE PAR EXHAUSTION

En utilisant la relation des côtés dans le triangle du demi-angle, on peut donc établir des formules de récurrence définissant la longueur des côtés des triangles obtenus en doublant successivement le nombre de côtés. On a alors :

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{r^2 + ra_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{r^2 - ra_n}{2}}$$

où a_n est l'apothème du polygone inscrit de rang n et b_n , le demi-côté de ce polygone. À l'aide de ces formules de récurrence, on peut calculer une valeur approchée de la circonférence d'un cercle en calculant le périmètre du polygone. On peut alors, par un simple calcul obtenir une valeur approchée de l'aire du cercle, puisque :

$$A = \frac{C}{2r} \approx \frac{P}{2}$$

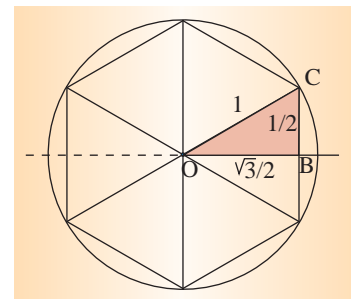
Le périmètre du polygone est donné par :

$$P_n = 2^n k b_n,$$

où n est le rang du terme, k , le nombre de côtés du premier polygone considéré et b_n , le demi-côté du polygone inscrit de rang n . Il suffit donc en pratique de calculer les b_i .

En considérant un cercle de rayon unitaire et un hexagone inscrit comme premier polygone, on a :

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{1}{2}$$



Le périmètre de l'hexagone inscrit dans le cercle de rayon unitaire est alors :

$$P_{i1} = 2^1 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$$

Puisque le rayon est unitaire, il suffit de diviser ce périmètre par 2 pour obtenir une première valeur approchée de la valeur cherchée, soit $k_1 = 3$.

En doublant le nombre de côtés, on a alors :

$$b_2 = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Le périmètre du polygone à 12 cotés inscrit dans le cercle de rayon unitaire est alors :

$$P_{i2} = 2^2 \times 6 \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 6,211657...$$

En doublant à nouveau le nombre de côtés, on obtient :

$$b_3 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$$

qui donne la valeur approchée $k_2 = 3,105828...$

Le périmètre du polygone à 24 cotés inscrit dans le cercle de rayon unitaire est alors :

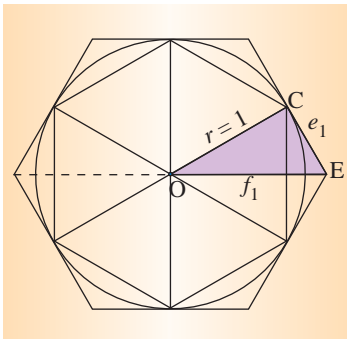
$$P_{i3} = 2^3 \times 6 \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2} = 6,265257...$$

qui donne la valeur approchée $k_3 = 3,132628...$

En poursuivant ainsi, on obtient une suite croissante de termes dont la valeur limite est la circonférence du cercle de rayon unitaire et une suite croissante dont la valeur limite est la valeur de la constante. De plus, les termes de la suite des aires sont tous plus petits que le rapport de l'aire du cercle au carré de son rayon puisque nous avons choisi $r = 1$. Ce qui donne les valeurs du tableau suivant :

Nombre de côtés	Aire du polygone inscrit
6	3
12	$6\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 3,105828...$
24	$12\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 3,132628...$
48	$24\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 3,139350...$
96	$48\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 3,1410319...$

En procédant d'une façon analogue, à partir d'un hexagone circonscrit, Archimède calcule l'aire des polygones circonscrits, obtenant une suite décroissante dont les termes sont toujours plus grands que le rapport de l'aire du cercle au carré de son rayon .



Pour bien saisir l'ampleur du travail réalisé, rappelons que, dans cette présentation, nous avons utilisé des notations modernes. La notation des radicaux, d'abord, qui nous permet de détecter une régularité dans les expressions donnant la circonférence et l'aire du polygone inscrit. Nous avons également utilisé la notation décimale et une calculatrice. Archimède devait utiliser une méthode pour calculer la valeur approchée d'un radical par des nombres fractionnaires, le système de numération décimale lui était inconnu. Ainsi, il donne sans explications que :

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Ce qui signifie, en notation décimale, que :

$$1,732026144... < \sqrt{3} < 1,732051282...$$

En utilisant une calculatrice moderne, on trouve :

$$\sqrt{3} = 1,73205080...$$

Archimède a calculé les aires A_n des polygones inscrits de 96 côtés et les aires B_n des polygones circonscrits de 96 côtés. Il obtient, pour ces derniers polygones, que :

$$A_n < \pi < B_n \\ 223/71 < \pi < 22/7$$

Ce qui, en notation décimale, donne :

$$3,14084507... < \pi < 3,142857143...$$

Entre les mains habiles d'Archimède, la méthode d'exhaustion a permis d'établir plusieurs résultats intéressants que l'on obtient maintenant avec le calcul intégral. Il a utilisé cette méthode de deux façons : pour calculer une valeur approchée et pour démontrer des formules d'aires (et de volumes). Le calcul de π est un exemple du premier type d'utilisation. La démonstration par exhaustion est en fait une double réduction à l'absurde.

CONCLUSION

Il est remarquable qu'Archimède ait réussi à se rendre jusqu'à $n = 6$. Les notations algébriques que nous avons utilisées pour décrire la démarche étaient inconnues à son époque. La valeur supérieure, $22/7$, à laquelle il est parvenu sera en usage pendant des siècles après lui comme valeur de π .