

## CHAPITRE 13

## EXERCICES 13.2

1. a)  $20,32 \pm 0,055$       b)  $97,75 \pm 0,4535$       c)  $1953,125 \pm 23,4375$
2.  $\pm 0,36\pi \text{ cm}^3$
3. a) 144,0, erreur absolue de 0,05 et erreur relative de 0,03 %  
b) 5,56, erreur absolue de 0,005 et erreur relative de 0,09 %
4. a) Il faut mettre 360  $\mu\text{L}$  dans la première fille, 105  $\mu\text{L}$  dans la deuxième et 120  $\mu\text{L}$  dans la troisième. Puis, il faut prendre 8  $\mu\text{L}$  de la solution mère pour mettre dans la première fille, 5  $\mu\text{L}$  pour la deuxième et 2  $\mu\text{L}$  pour la troisième. Puis, il faut prendre 15  $\mu\text{L}$  de la solution mère pour mettre dans la première fille, 175  $\mu\text{L}$  de la première pour mettre dans la deuxième et 80  $\mu\text{L}$  de la deuxième pour mettre dans la troisième.
- b) Il faut mettre 192  $\mu\text{L}$  dans la première fille, 195  $\mu\text{L}$  dans la deuxième et 198  $\mu\text{L}$  dans la troisième. Puis, il faut prendre 8  $\mu\text{L}$  de la solution mère pour mettre dans la première fille, 5  $\mu\text{L}$  de la première pour mettre dans la deuxième et 20  $\mu\text{L}$  de la deuxième pour mettre dans la troisième.

## EXERCICES 13.4

1. a)  $3 \ln(x+1) = 4$ . En prenant le logarithme des deux membres :  $\ln(x+1) = \frac{4}{3}$ .  
En exprimant sous forme exponentielle :  $x+1 = e^{4/3}$  et  $x = e^{4/3} - 1 = 2,7936\dots$   
On trouve donc  $x = 2,7936\dots$
- b)  $z \log 5 - \log 4 = z \log 4$ , d'où  $z \log 5 - z \log 4 = \log 4$  et  $z(\log 5 - \log 4) = \log 4$  qui donne :
- $$z = \frac{\log 4}{\log 5 - \log 4} = \frac{\log 4}{\log 5/4} = 6,2125\dots$$
- On trouve donc  $t = 6,2125\dots$
- c)  $3 \times 2^{t+1} = 7^t$ , d'où  $\ln 3 + (t+1) \ln 2 = t \ln 7$  et  $\ln 3 + t \ln 2 + \ln 2 = t \ln 7$   
En regroupant :  $t \ln 2 - t \ln 7 = -\ln 3 - \ln 2$   
Par mise en évidence :  $t(\ln 2 - \ln 7) = -(\ln 3 + \ln 2)$
- Par propriété des logarithmes :  $t \ln(2/7) = -(\ln 6)$  et  $t = \frac{-\ln 6}{\ln(2/7)} = 1,4302\dots$
- On trouve donc  $t = 1,4302\dots$
- d)  $c_x + 5(c_x - 4) = 5(1 - 2c_x)$ , d'où  $c_x + 5c_x - 20 = 5 - 10c_x$  et  $16c_x = 25$  qui donne  $c_x = 25/16$ .
- e)  $(t+1)^3 = 4$ , d'où  $t+1 = \sqrt[3]{4}$  et  $t = \sqrt[3]{4} - 1 = 0,5874\dots$   
On trouve donc  $t = 0,5874\dots$
- f)  $\log_2(3x+4) = 2 + \log_2(2x-2)$ , d'où :  $\log_2(3x+4) - \log_2(2x-2) = 2$ .
- Par les propriétés des logarithmes, on obtient :  $\log_2\left(\frac{3x+4}{2x-2}\right) = 2$
- En exprimant sous forme exponentielle :  $\left(\frac{3x+4}{2x-2}\right) = 2^2 = 4$
- Cela donne  $3x+4 = 4(2x-2)$  et, en distribuant :  $3x+4 = 8x-8$ .  
En regroupant :  $-5x = -12$  et  $x = 12/5$ .  
On trouve donc  $x = 2,4$ .
- g)  $\sqrt{n^2 - n} = 4$ , d'où  $n^2 - n = 16$  et  $n^2 - n - 16 = 0$ . On obtient alors :  $n = \frac{1 \pm \sqrt{1+64}}{2}$ . Cela donne :
- $n = -3531\dots$  et  $n = 4,531\dots$
- h)  $6e^{2x} = \frac{3+5e^{2x}}{2}$ , d'où  $6e^{2x} - \frac{5e^{2x}}{2} = \frac{3}{2}$ .

Par mise au même dénominateur, on obtient :  $\frac{12 e^{2x}}{2} - \frac{5 e^{2x}}{2} = \frac{3}{2}$  et  $\frac{7 e^{2x}}{2} = \frac{3}{2}$ , d'où  $e^{2x} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{7}$ .

En prenant le logarithme des deux membres :  $2x = \ln\left(\frac{3}{7}\right)$  et  $x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{7}\right) = -0,4236\dots$

On trouve donc  $x = -0,4236\dots$

i)  $3x^3 + 3x = 8x^2$ , d'où  $3x^3 - 8x^2 + 3x = 0$  et  $x(3x^2 - 8x + 3) = 0$ . Par l'intégrité des nombres réels, on a  $x = 0$  et

$3x^2 - 8x + 3 = 0$ . Cette dernière égalité donne :  $n = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{6}$  et on obtient  $x = 0,451\dots$  et  $x = 2,215\dots$

On trouve donc  $\{0; 0,451; 2,215\}$ .

C	I	CI	C <sup>2</sup>
0,50	3,78	1,89	0,25
1,50	9,26	13,89	2,25
2,50	15,13	37,825	6,25
3,50	20,49	71,715	12,25
4,50	25,63	115,335	20,25
5,50	31,87	175,285	30,25
18,00	106,16	415,940	71,50

2.a) Le modèle obtenu par régression est :

$$I(C) = 5,569C + 0,986$$

Le coefficient de corrélation est 0,9997.

b) On cherche C tel que  $5,569C + 0,986 = 27,5$ . En isolant C, on trouve :

$$C = 4,7609\dots$$

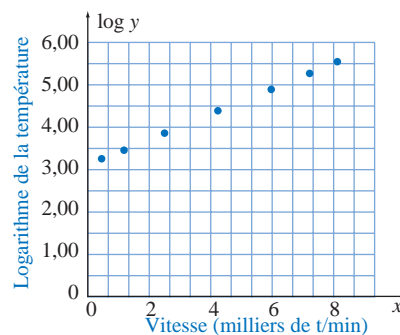
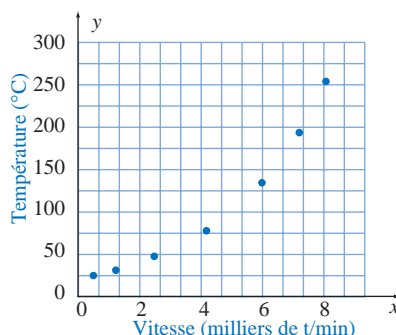
On peut estimer la concentration à 4,76 mmol/L.

3. a) Pour l'huile A, la représentation graphique sur papier à échelle bilinéaire donne une courbe croissante et concave vers le haut. On peut faire l'hypothèse d'un lien de puissance avec un exposant plus grand que 1 ou d'un lien exponentiel.

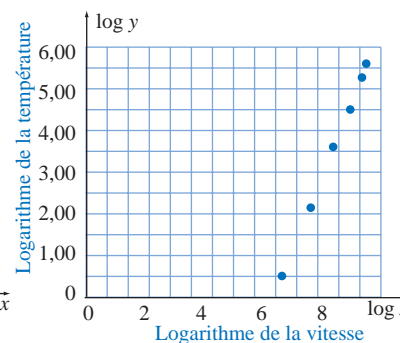
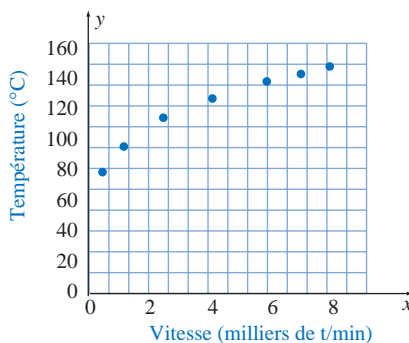
La représentation graphique des couples  $(v; \ln T)$  donne une droite, on retient donc l'hypothèse d'un lien exponentiel et on obtient, par la méthode des moindres carrés :

$$\ln T = 0,00030 v + 3,1031$$

et sous forme exponentielle :  $T = 22,27 e^{0,00030v}$ , où T est la température du moteur et v, sa vitesse.



b) Pour l'huile B, la représentation graphique sur papier à échelle bilinéaire donne une courbe croissante et concave vers le bas. On peut faire l'hypothèse d'un lien de puissance avec un exposant compris entre 0 et 1 ou d'un lien logarithmique.



La représentation graphique des couples  $(\ln v; \ln T)$  donne une droite, on retient donc l'hypothèse d'un lien de puissance et on obtient, par la méthode des moindres carrés :

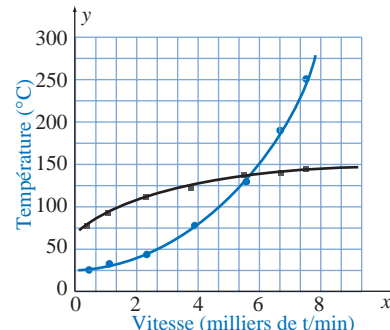
$$\ln T = 0,2217 \ln v + 2,9806$$

$$\text{Ce qui donne : } T = 19,70 v^{0,2217}$$

En considérant un lien de puissance on a un coefficient de corrélation de 1,000 alors qu'en considérant un lien logarithmique, on obtient un coefficient de corrélation de 0,9966.

c) L'huile A a une meilleure performance à basse vitesse et l'huile B a une

### Étude comparative du rendement des huiles



meilleure performance à haute vitesse. Dans l'intervalle de 5 500 à 7 000 t/min, elles sont assez équivalentes. Le prix de ces huiles pourrait être considéré dans la prise de décision.

d) 815 °C, 158 °C

4. a)  $N(t) = 100000 - 500t$  et  $N(60) = 7 \times 10^4$   
 b)  $N(t) = 100000(1 - 0,20)^t$  et  $N(60) < 1$

5. a) Les fonctions sont respectivement :

$C_1(x) = 16x + 25$  et  $C_2(x) = 14x + 31$ , où  $x$  est le nombre de demi-heures.

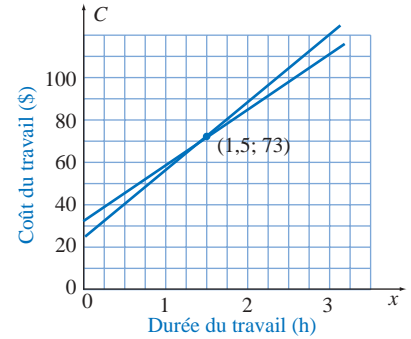
b) Pour un travail de 2,5 h, on a  $x = 5$  demi-heures et on trouve :

$C_1(5) = 16 \times 5 + 25 = 105$  et  $C_2(5) = 14 \times 5 + 31 = 101$ .

Le premier plombier demande 105 \$ et le deuxième 101 \$.

c) On cherche la valeur de  $x$  pour laquelle  $C_1 = C_2$ , c'est-à-dire :  $16x + 25 = 14x + 31$ , d'où  $2x = 6$  et  $x = 3$ .

Le coût est le même pour un travail de 1,5 h.



6. a) Le nombre initial de bactéries est donné par :  $N(0) = 10^4 e^0 = 10^4$ , soit  $10^4$  bactéries.  
 b) On cherche le temps  $t$  pour lequel :  $N(t) = 10^4 e^{0,549t} = 3 \times 10^4$ , soit  $10^4$  bactéries. Cela donne :  $e^{0,549t} = 3$ .  
 En prenant le logarithme en base  $e$ , on obtient :  $0,549t = \ln 3$  et  $t = 2,001...$   
 Le nombre de bactéries triple donc en 2 heures.  
 c) On doit exprimer  $e^{0,549}$  en base 3, soit trouver  $a$  tel que  $3^a = e^{0,549}$ . En prenant le logarithme en base  $e$ , on obtient :  $a \ln 3 = \ln e^{0,549}$  et  $a \ln 3 = 0,549 \ln e$ . Puisque  $\ln e = 1$ , on a :  $a = 0,549 / \ln 3 = 0,49972...$   
 La relation s'écrit donc  $N(t) = 10^4 \times 3^{0,49972t}$ .  
 d) On doit exprimer  $e^{0,549}$  en base 10, soit trouver  $c$  tel que  $10^c = e^{0,549}$ . En prenant le logarithme en base 10, on obtient :  $c \log 10 = 0,549 \log e$ . Puisque  $\log 10 = 1$ , on a :  $c = 0,549 \log e = 0,549 \times 0,23842...$   
 La relation s'écrit donc  $N(t) = 10^4 \times 10^{0,23842t}$ .  
 e) On a  $N(t) = 10^4 \times 10^{0,4343t} = 10^4 (10^{0,4343})^t = 10^4 (1,7315)^t = 10^4 (1 + 0,7315)^t$ .  
 Par conséquent,  $i = 0,7315$ . Cela nous permet de voir que l'augmentation est de 73% par heure.  
 f) On cherche  $t$  pour lequel  $e^{0,549t} = 2$ , et en résolvant on trouve que le temps de dédoublement est 1,26 h

7. a) On cherche  $E$ , sachant que  $\log E = 4,4 + 1,5 \times 8,2$ . Cela donne  $\log E = 16,7$  et  $E = 10^{16,7} = 5,0119 \times 10^{16}$  J.

b) En isolant  $M$  dans la relation  $\log E = 4,4 + 1,5M$ , on obtient :  $M = \frac{\log E - 4,4}{1,5}$ , d'où  $M = \frac{2}{3} \log E - 2,933$ .

Si l'énergie est multipliée par 10, on a alors :

$$M = \frac{2}{3} \log 10E - 2,933 = \frac{2}{3} (\log 10 + \log E) - 2,933 = \frac{2}{3} (1 + \log E) - 2,933 = \frac{2}{3} \log E - 2,933 + \frac{2}{3}$$

L'intensité est donc augmentée de  $2/3$  d'unité.

c) Si l'intensité est augmentée de 1, on a :

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{3} \log E - 2,933 + 1 = \frac{2}{3} \log E - 2,933 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} + \log E \right) - 2,933 \\ &= \frac{2}{3} (\log 10^{3/2} + \log E) - 2,933 = \frac{2}{3} (\log 10^{3/2} E) - 2,933 \end{aligned}$$

L'intensité est donc multipliée par  $10^{3/2} = 31,6$ . Le plus violent libère 31,6 fois plus d'énergie.

d) En isolant  $M$  dans la relation  $\log E = 4,4 + 1,5M$ , on obtient :  $M = \frac{\log E - 4,4}{1,5}$ , d'où  $M = \frac{2}{3} \log E - 2,933$ .

Il s'agit d'une relation logarithmique.

e) En isolant  $E$ , on obtient :  $E = e^{4,4 + 1,5M} = e^{4,4} e^{1,5M} = 81,45 e^{1,5M}$ . On obtient donc une relation exponentielle.

8. a) Soit  $y$ , le nombre d'échantillons traités et  $t$ , le temps en heures. La relation est directement proportionnelle et les données sont  $(t_1; y_1) = (0,75; 6000)$  et  $(t_2; y_2) = (3,5; y_2)$ . Puisque la variation est directement proportionnelle, on a :  $t_1 y_2 = t_2 y_1$ , soit  $0,75 y_2 = 3,5 \times 6000$ . En isolant  $y_2$ , on trouve  $y_2 = 8000$ . Les techniciens traiteront 28 000 échantillons.

- b) Soit  $t$ , le temps en minutes et  $n$ , le nombre de techniciens. La relation est inversement proportionnelle et les données sont  $(n_1; t_1) = (3; 45)$  et  $(n_2; t_2) = (5; t_2)$ . Puisque la variation est inversement proportionnelle, on a :  $n_2 t_2 = n_1 t_1$ , soit  $5t_2 = 3 \times 45$ . En isolant  $n_2$ , on trouve  $n_2 = 27$ . Les cinq techniciens traiteront les 6 000 échantillons en 27 minutes.

9.  $y = 5 \log_{0,3} x + 4 = 5 \frac{\log x}{\log 0,3} + 4 = \frac{5}{\log 0,3} \log x + 4 = -9,562 \log x + 4$  et  $y = -4,15 \ln x + 4$

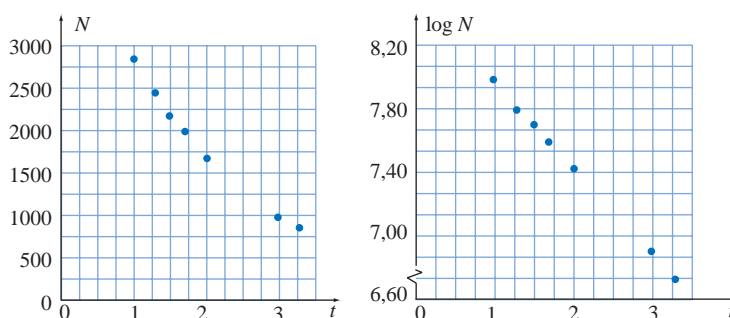
Une relation logarithmique peut toujours se définir à l'aide d'un mécanisme logarithmique de base 10 ou de base  $e$ .

10. a) Le modèle est  $V(t) = 20\,000(1 - 0,1)^t = 20\,000(0,9)^t$ , où  $V$  est la valeur en dollars et  $t$ , le temps en années. Au bout de 5 ans, la valeur sera  $V(5) = 20\,000(0,9)^5 = 11\,809,8$ , soit environ 11 809 \$.  
 b) Si la valeur diminuait de 2 00 par année, le modèle serait  $V(t) = 20\,000 - 2\,000t$ , où  $V$  est la valeur en dollars et  $t$ , le temps en années. Au bout de 5 ans, la valeur serait  $V(5) = 20\,000 - 2\,000 \times 5 = 10\,000$ . L'amachinerie vaudrait alors 10 000 \$.

11. a) Affine,  $y = 2,5x + 1,8$   
 b) Puissance,  $y = 3,7/x$   
 c) Exponentielle,  $y = 20 \times 0,7^x$

12. a) La représentation graphique sur papier à échelle bilinéaire donne une courbe décroissante et concave vers le haut. La représentation graphique des couples  $(t; \ln N)$  donne une droite, on peut faire l'hypothèse d'un lien exponentiel et on obtient, par la méthode des moindres carrés :

$\ln N = -0,54487t + 8,5053$   
 Ce qui donne :  $N = 4\,900 e^{-0,54487t}$



Remarque : La courbure des données peut sembler légère. On peut, pour confirmer la validité de notre choix, appliquer la méthode des moindres carrés aux couples  $(x; y)$  pour obtenir un modèle affine et comparer les mesures de précision. On obtient alors le modèle affine  $y = -852,2x + 3520$ . Cependant le coefficient de corrélation du modèle affine est  $-0,9872$  et celui du modèle exponentiel est  $-0,99997$ . De plus, le calcul des résidus donne 73264 dans le cas du modèle affine et 371 dans le cas du modèle exponentiel.

- b) La population initiale est de 4900 insectes.  
 c) On cherche  $t$  pour lequel  $4\,900 e^{-0,54487t} = 500$ . En isolant  $t$ , on obtient :

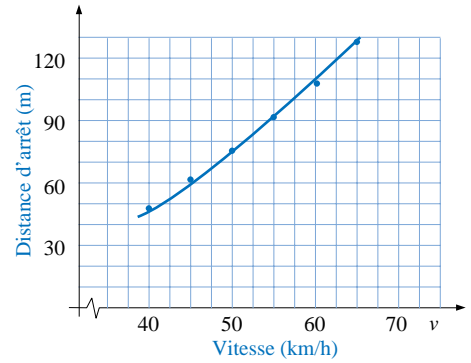
$$e^{-0,54487t} = \frac{500}{4\,900}, \text{ d'où } -0,54487t = \ln\left(\frac{500}{4\,900}\right) \text{ et } t = \frac{-1}{0,54487} \ln\left(\frac{500}{4\,900}\right) = 4,1893\dots$$

Il faudra 4,2 heures pour qu'il ne reste que 500 insectes.

13. a) Le modèle est  $Q(t) = Q_0 e^{at}$ , où  $Q_0$  est la quantité initiale,  $t$ , le temps en années et  $Q(t)$ , la quantité au temps  $t$ . En substituant les données, on obtient :  $Q_0 e^{443a} = 0,5Q_0$ , d'où  $e^{443a} = 0,5$ . En prenant le logarithme en base  $e$ , on obtient :  $443a = \ln 0,5$ , d'où  $a = -0,00156\dots$   
 La relation peut s'écrire  $Q(t) = Q_0 e^{-0,00156t}$ .  
 Dans un détecteur de 12 ans, la quantité est :  $Q(t) = Q_0 e^{-0,00156 \times 12} = 0,9814\dots Q_0$ . Il contient donc 98% de la quantité initiale.  
 b) On cherche  $t$  tel que  $Q_0 e^{-0,00156t} = 0,8 Q_0$ , d'où  $e^{-0,00156t} = 0,8$  et  $-0,00156t = \ln 0,8$ . En isolant  $t$  et en effectuant le calcul, on obtient :  $t = 143,04\dots$ . Le détecteur sera fonctionnel durant 143 ans soit jusqu'en l'an 2131.  
 c) Selon le modèle théorique, il en restera toujours, mais en réalité on ne pourra détecter de radioactivité.

14. Le modèle est  $N(t) = N_0 2^t$ , où  $N_0$  est le nombre initial de cellules,  $t$ , le temps en années et  $N(t)$ , le nombre de cellules au temps  $t$ .  
 Puisque  $N_0 = 300$ , on a :  $N(t) = 300 \times 2^t$ . Au bout de six heures, on a 24 périodes de 15 minutes et :  
 $N(24) = 300 \times 2^{24} = 5\,033\,164\,800$  cellules.

15. En représentant graphiquement les données, on constate que le modèle pourrait être une variation directement proportionnelle ou une variation directement proportionnelle au carré. Le graphique ne permet pas de dire si la situation est décrite par une droite ou une courbe. Cependant, le critère algébrique est très convaincant.



En calculant les rapports  $d/v$  et  $d/v^2$  pour les différentes correspondances, on obtient le tableau ci-contre:

Les rapports  $d/v^2$  étant constants, la variation est directement proportionnelle au carré, soit de la forme  $d = kv^2$  où  $k = 0,03$ . Le modèle algébrique est donc :

$$d = 0,03v^2$$

On trouve par substitution les correspondances suivantes :

Vitesse (km/h)	70	80	120
Distance d'arrêt (m)	147	192	432

V	d	d/V	d/V <sup>2</sup>
40	48	1,20	0,03
45	61	1,36	0,03
50	75	1,50	0,03
55	91	1,65	0,03
60	108	1,80	0,03
65	127	1,95	0,03

17. a) La masse étant proportionnelle au volume, on a :

$$M_m \text{ kg} = 84,6 \text{ kg/m}^3 \cdot V_m \text{ m}^3$$

où  $M_m$  et  $V_m$  sont respectivement la masse et le volume de la maquette. La masse étant de 0,35 kg, on trouve :

$$V_m = \frac{0,35 \text{ kg}}{84,6 \text{ kg/m}^3} = 0,004137 \text{ m}^3 = 4317 \text{ cm}^3$$

b) Le rapport des volumes de figures semblables est égal au cube du rapport des lignes homologues. Dans ce cas, le rapport des volumes est donc égal au cube du rapport des hauteurs, on a donc :

$$\frac{V_s}{V_m} = \left(\frac{h_s}{h_m}\right)^3 = \left(\frac{270}{25}\right)^3$$

où  $V_m$  est le volume de la maquette et  $V_s$  est le volume de la sculpture. On a donc :

$$V_s = \left(\frac{270}{25}\right)^3 \times V_m = \left(\frac{270}{25}\right)^3 \times 0,004137 = 5,2 \text{ m}^3$$

c) La masse est proportionnelle au volume, la constante de proportionnalité étant la masse volumique, on a :

$$P_m \text{ kg} = 8500 \text{ kg/m}^3 \times V_m \text{ m}^3$$

d'où  $P_m \text{ kg} = 8500 \text{ kg/m}^3 \times 5,2 \text{ m}^3 = 44\ 200 \text{ kg}$ .

d) La relation est décrite par  $C = k \frac{\lambda h^2}{d}$  où  $\lambda$  est la largeur,  $h$  l'épaisseur et  $d$  la distance entre les supports. Puisque la constante est  $k = 106 \text{ kg/cm}^2$  que la largeur prévue est de 30 cm, que la distance entre les supports est de 1,8 m, et que la charge est de 44 200 kg, on a donc :

$$44\ 200 = 106 \text{ kg/cm}^2 \times \frac{30 \text{ cm } h^2}{180 \text{ cm}}$$

En isolant :  $h^2 = \frac{44\ 200 \times 180 \text{ cm}}{106 \text{ kg/cm}^2 \times 30 \text{ cm}} = 2\ 502 \text{ cm}^2$  d'où  $h = 50 \text{ cm}$

La poutre devrait donc avoir 50 cm d'épaisseur.

18. a) La représentation graphique sur papier à échelle bilinéaire donne un assez bon alignement. On peut faire l'hypothèse d'un lien affine et la méthode des moindres carrés donne :

$$y = 1,218x + 1,0224$$

Cependant, la représentation graphique des couples  $(\ln x; \ln y)$  donne également un très bon alignement des points. On peut donc également faire l'hypothèse d'un lien de puissance et la méthode des moindres carrés donne :

$$\ln y = 0,7997 \ln x + 0,69359$$

$$\text{D'où : } \ln y = \ln x^{0,7997} + 0,69359 \text{ et } y = e^{0,69359} x^{0,7997} = 2 x^{0,7997} \approx 2 x^{0,8}.$$

Pour choisir entre ces deux modèles, il faudrait comparer leur mesure de précision. Le coefficient de corrélation du modèle affine est 0,998532 et celui du modèle de puissance est 0,999999. De plus, le calcul des résidus donne 0,1122596 dans le cas du modèle affine et 0,0000732 dans le cas du modèle de puissance. On optera donc pour l'emodèle de puissance. Il faut être conscient que dans le cas de données expérimentales, un plus grand éventail de données pourrait nous amener à modifier ce choix.

b) La représentation graphique sur papier à échelle bilinéaire suggère l'hypothèse d'un lien quadratique  $y = ax^2 + bx + c$ . Le modèle a trois paramètres, il suffit de trois couples pour les déterminer. En formant trois groupements à partir des neuf couples de données et en calculant les valeurs moyennes, on obtient : (1; 1), (2; 3) et (4; 3)

En substituant dans le modèle quadratique, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 16a + 4b + c = 3 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième et de la troisième, il reste :

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 15a + 3b = 2 \end{cases}$$

En soustrayant 3 fois la première équation de la deuxième, il reste alors  $6a = -4$ , d'où  $a = -2/3$ . Et, par substitution, on trouve  $b = 4$  et  $c = -7/3$ .

Le modèle est donc  $y = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{7}{3}$ .

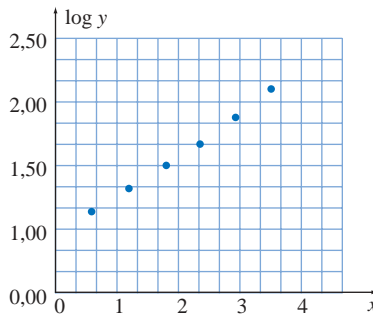
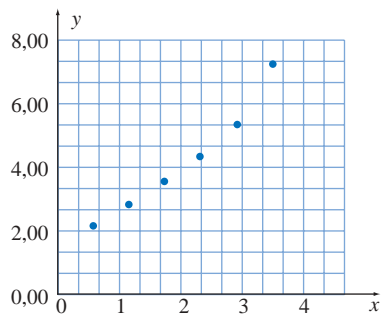
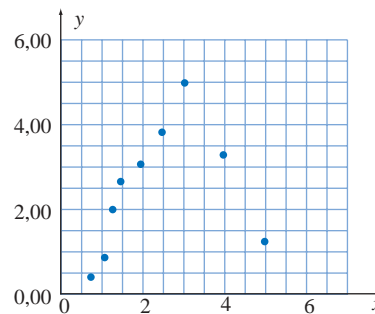
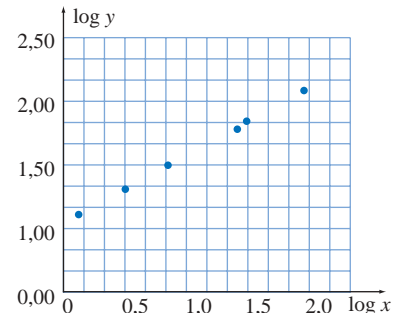
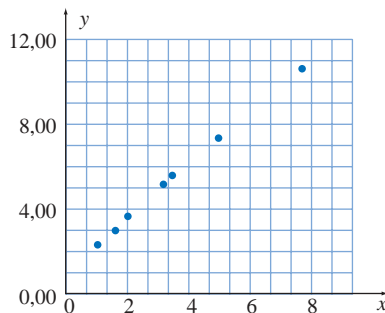
c) La représentation graphique sur papier à échelle bilinéaire donne une courbe croissante et concave vers le haut. On peut faire l'hypothèse d'un lien de puissance avec un exposant plus grand que 1 ou d'un lien exponentiel.

La représentation graphique des couples  $(x; \ln y)$  donne une droite, on retient donc l'hypothèse d'un lien exponentiel et on obtient, par la méthode des moindres carrés :

$$\ln y = 0,470x + 0,535$$

$$\text{Ce qui donne : } y = 1,707 e^{1,60x}$$

Remarque : La courbure des données peut sembler très légère. On peut alors appliquer la méthode des moindres carrés aux couples  $(x; y)$  pour obtenir un modèle affine. On obtient alors le modèle  $y = 1,938x + 0,82$ . Cependant le coefficient de corrélation du modèle affine est 0,9750 et celui du modèle exponentiel est 0,9983. De plus, le calcul des résidus donne 0,85407 dans le cas du modèle affine et 0,11628 dans le cas du modèle exponentiel.



19. a)  $y = 2,39 \times 1,38^t$       b)  $y = 2,39 \times t^{0,32}$   
 c)  $y = 0,32 \ln t + 0,87$   
 d) La notion de temps de dédoublement ne s'applique qu'à une exponentielle croissante. Pour  $a$ , on obtient  $TD = \ln 2 / 0,32 = 2,17$

### EXERCICES 13.6

1. a)  $\theta = \arcsin 0,35 = 20,49^\circ$  ou  $159,51^\circ$  ou  $0,358$  rad et  $2,768$  rad.  
 b)  $2 \tan \theta = -3,2$  et  $\tan \theta = -1,6$ , d'où  $\theta = \arctan(-1,6) = 302^\circ$  et  $122^\circ$  ou  $5,271$  rad et  $2,129$  rad.  
 c)  $\sec^2 \theta = 4$ , d'où  $\sec \theta = \pm 2$  et  $\cos \theta = \pm 1/2$ . On trouve alors  $\theta \in \{1,047; 2,094; 4,189; 5,236\}$ .  
 d)  $2 \ln(\cos x + 2) = 1,8$ , d'où  $\ln(\cos x + 2) = 0,9$  et  $\cos x + 2 = e^{0,9}$  ou  $\cos x = e^{0,9} - 2$ . Cela donne :  
 $x = \arccos(e^{0,9} - 2)$ . On trouve alors  $\theta \in \{1,092; 5,190\}$ .  
 e)  $\frac{10^{\sin x}}{4} - 1,2 = 0$ , d'où  $10^{\sin x} = 4,8$  et  $\sin x = \log 4,8 = 0,68124\dots$  et  $x = \arcsin(0,68124\dots)$ .  
 On trouve alors  $\theta \in \{0,749; 2,392\}$ .  
 f)  $\log_2 \sec \theta = 2 - \log_2 \sec \theta$ , d'où  $2 \log_2 \sec \theta = 2$  et  $\log_2 \sec^2 \theta = 2$  qui donne :  $\sec^2 \theta = 2^2 = 4$ . On a déjà résolue en  $c$  et on a obtenu  $\theta \in \{1,047; 2,094; 4,189; 5,236\}$ .  
 g)  $2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$ , d'où  $\cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$ . Cela donne  $\cos \theta = 1$  ou  $\cos \theta = -1/2$ .  
 De  $\cos \theta = 1$ , on tire  $\theta = 0^\circ$  et  $360^\circ$  ou  $\theta = 0$  rad et  $2\pi$  rad.  
 De  $\cos \theta = -1/2$ , on tire  $\theta = 60^\circ$  et  $120^\circ$  ou  $\theta = \pi/3$  rad et  $2\pi/3$  rad.

2. a) Par la loi des cosinus, on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{R}\|^2 &= \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(180-105^\circ) \\ &= 35^2 + 50^2 - 2 \times 35 \times 50 \cos 75^\circ \\ &= 2\,819,13\dots \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \|\vec{R}\| = \sqrt{2\,819,13\dots} = 53,095\dots \text{ Soit } \|\vec{R}\| = 53,1$$

Par la loi des sinus, on a :

$$\frac{\sin \alpha}{50} = \frac{\sin 75^\circ}{53,095\dots}, \text{ d'où } \sin \alpha = \frac{50 \sin 75^\circ}{53,095\dots}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{50 \sin 75^\circ}{53,095\dots}\right) = 65,45\dots^\circ$$

L'angle avec l'horizontale est donc de  $105,45^\circ$ .

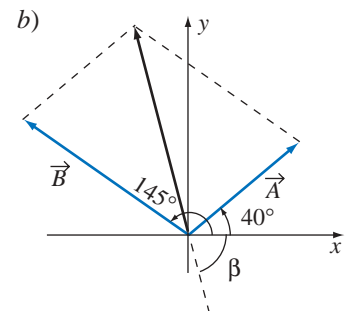
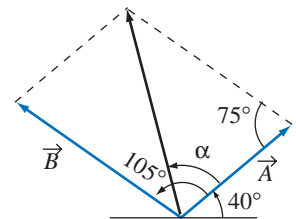
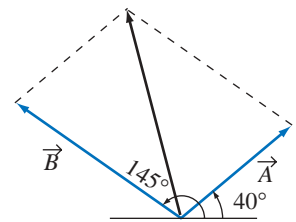
- c)  $\vec{A} = 35(\cos 40^\circ; \sin 40^\circ) = (26,81; 22,50)$   
 $\vec{B} = 50(\cos 145^\circ; \sin 145^\circ) = (-40,96; 28,68)$   
 $\vec{R} = 35(\cos 40^\circ; \sin 40^\circ) + 50(\cos 145^\circ; \sin 145^\circ)$   
 $= (-14,15; 51,18) = (a; b)$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 53,1$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -74,55^\circ, \text{ d'où } \theta = 180^\circ + \beta = 105,45^\circ$$

- d)  $\vec{A} \cdot \vec{R} = (26,81; 22,50) \cdot (-14,15; 51,18) = 772,8695$   
 $\alpha = \arccos\left(\frac{772,8695}{\|\vec{A}\|\|\vec{R}\|}\right) = \arccos\left(\frac{772,86\dots}{35 \times 53,095\dots}\right) = 65,45^\circ$

- e)  $\vec{v} = \frac{2}{\|\vec{R}\|} \vec{R} = \frac{-2}{53,1}(-14,15; 51,18) = (0,53; -1,93)$

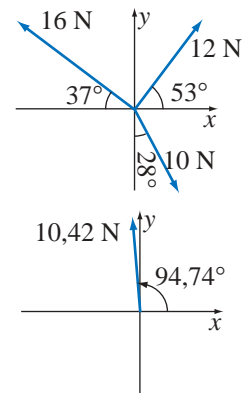


3. a)  $\vec{R} = 12(\cos 53^\circ; \sin 53^\circ) + 16(\cos 143^\circ; \sin 143^\circ) + 10(\cos 298^\circ; \sin 298^\circ)$   
 $= (-0,86167...; 10,38319...) = (a; b)$

b)  $\|\vec{R}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 10,42$ . La force résultante est de 10,42 N

c)  $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -85,26^\circ$

Puisque la résultante est dans le deuxième quadrant, on a  $\alpha = 180 + a = 94,74^\circ$ .  
 La force résultante est de 10,42 N et fait un angle de  $94,74^\circ$  avec l'horizontale.



4. a)  $\vec{OM} = \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{OB} + \frac{1}{2}(\vec{OC} - \vec{OB}) = (2; 0; 5) + \frac{1}{2}[(-4; 6; 1) - (2; 0; 5)]$   
 $= (2; 0; 5) + (-3; 3; -2) = (-1; 3; 3)$

b)  $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA} = (-1; 3; 3) - (3; -1; 4) = (-4; 4; -1)$   
 Les composantes sont respectivement -4, 4, et -1.

c)  $\vec{AB} = (-1; 1; 1)$  et  $\vec{AC} = (-7; 7; -3)$ . On a alors :  $\cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{3}\sqrt{107}}$  et  $\alpha = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{3}\sqrt{107}}\right) = 52,12^\circ$

d) La longueur de la projection de  $\vec{AB} = (-1; 1; 1)$  sur  $\vec{AC} = (-7; 7; -3)$  est donnée par :

$$\|\vec{AB}_{(\vec{AC})}\| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{\|\vec{AC}\|} = \frac{11}{\sqrt{107}} = 1,0634... \text{, soit environ } 1,06 \text{ unité de longueur.}$$

e) Le vecteur perpendiculaire est donné par le produit vectoriel, soit :

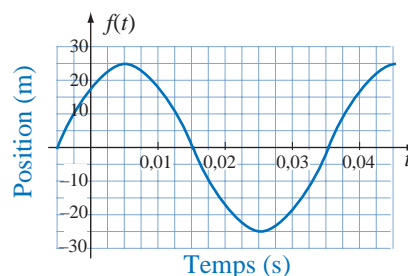
$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -7 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3-7) - \vec{j}(3+7) + \vec{k}(-7+7) = -10\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k}$$

Le vecteur est donc  $(-10; -10; 0)$

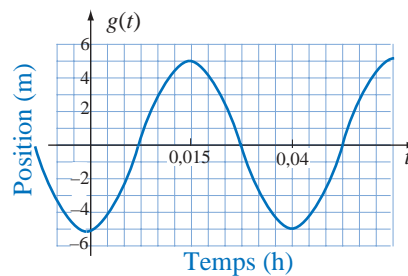
f) Le module du vecteur perpendiculaire donne l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ . En divisant cette aire par la longueur du vecteur  $\vec{AC}$ , on obtient la hauteur abaissée du sommet B sur le côté AC. Ce qui donne :

$$h = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{AC}\|} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{107}} = 1,367... \approx 1,37 \text{ unité.}$$

5. La période de ce mouvement est de  $1/25$  de seconde, son amplitude est de 25 m, sa fréquence est de 25 cycles par seconde et il est déphasé de  $\pi/4$  rad. Il se définit par  $h(t) = 25 \sin(50\pi t + \pi/4)$ .



6. La période de ce mouvement est de  $1/20$  d'heure, soit 3 minutes, son amplitude est de 5 m, sa fréquence est de 20 cycles par heure et il est déphasé de  $\pi/10$  rad, soit 9 secondes.



7. Par le théorème de Chasles, on a :  $\overline{AE} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BE}$

Or,  $\overline{AO} = -\overline{OA} = -(1; 0; 0)$ ,  $\overline{OB} = (0; 2; 0)$

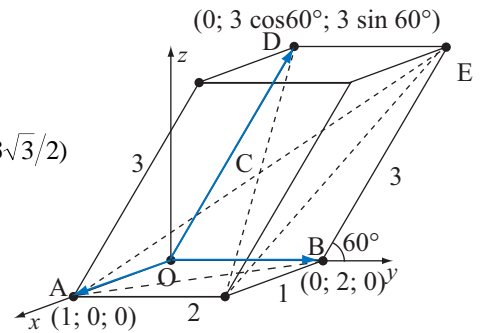
et  $\overline{BE} = \overline{OD} = (0; 3 \cos 60^\circ; 3 \sin 60^\circ) = (0; 3/2; 3\sqrt{3}/2)$

On a donc :  $\overline{AE} = (-1; 0; 0) + (0; 2; 0) + (0; 3/2; 3\sqrt{3}/2) = (-1; 2 + 3/2; 3\sqrt{3}/2)$

D'où :  $\| \overline{AE} \| = \sqrt{(-1)^2 + (2 + 3/2)^2 + (3\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{20}$

On a donc  $\| \overline{AC} \| = \frac{\sqrt{20}}{2} = 2,2360\dots$

La distance cherchée est de 2,236 unités.



8. a)  $\overline{OM} = r \cos \theta$ , d'où  $-3,33 = 4,14 \cos \theta$  et  $\cos \theta = \frac{-3,33}{4,14}$

On obtient alors :  $\alpha = \arccos\left(\frac{-3,33}{4,14}\right) = 143,55^\circ$

Puisque le rayon vecteur est dans le deuxième quadrant, on a  $\theta = \alpha = 143,55^\circ$ .

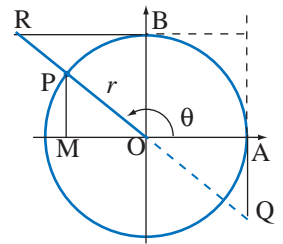
On peut déterminer les rapports des fonctions trigonométriques en utilisant directement la calculatrice, ou en utilisant les identités trigonométriques ou en déterminant la longueur  $\overline{MP}$  et en utilisant les triangles semblables pour calculer les rapports des segments. Dans

ce dernier cas, on trouve d'abord :  $\overline{MP} = \sqrt{4,14^2 - (-3,33)^2} = 2,46$ , puis :

$\sin \theta = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \frac{2,46}{4,14} = 0,59420\dots$  ;  $\cos \theta = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{-3,33}{4,14} = -0,8434\dots$

$\tan \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{2,46}{-3,33} = -0,73873\dots$  ;  $\cot \theta = \frac{\overline{BR}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{MP}} = \frac{-3,33}{2,46} = -1,35365\dots$

$\sec \theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{MP}} = \frac{4,14}{2,46} = 1,68292\dots$  ;  $\csc \theta = \frac{\overline{OR}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{4,14}{-3,33} = -1,24324\dots$



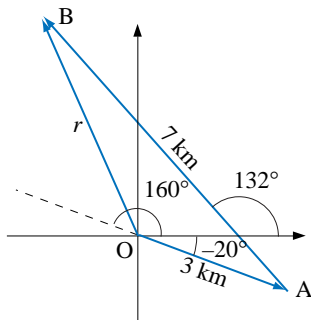
b)  $\overline{OQ} = r \sec \theta = 4,14 \times 1,68292\dots = 6,96728\dots$

$\overline{BR} = r \cot \theta = 4,14 \times -1,35365\dots = -5,60286\dots$

$\overline{OR} = r \csc \theta = 4,14 \times -1,24324\dots = -5,14701\dots$

$\overline{AQ} = r \tan \theta = 4,14 \times -0,73873\dots = -3,05834\dots$

9. a)



b)  $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$

$= (3 \cos(-20^\circ) + 7 \cos 132^\circ; 3 \sin(-20^\circ) + 7 \sin 132^\circ)$

$= (-1,8648\dots ; 4,1759\dots)$

$= (a; b)$

$= r \angle \theta$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = 4,573\dots$

$\tan \alpha = \frac{b}{a}$  et  $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -65,9^\circ$ ,  $\theta = 180^\circ + \alpha = 114,1^\circ$

On a donc :  $\overline{OB} = 4,57 \angle 114,1^\circ$

La direction de la droite support est  $114,1^\circ$ . Le sens est nord-ouest.

10. a)  $3\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C} = 3(2; -3; 4) - (2; -3; 5) + 2(-3; -2; 2) = (-2; -10; 11)$

b)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2; -3; 4) \cdot (2; -3; 5) = 4 + 9 + 20 = 33$

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (-15 + 12)\vec{i} - (10 - 8)\vec{j} + (-6 + 6)\vec{k} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}$

Le vecteur est  $(-3; -2; 0)$ .

c)  $\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{D}}{\|\vec{A}\| \|\vec{D}\|} = \frac{(2; -3; 4) \cdot (3; 0; 0)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{6}{3\sqrt{29}}$  et  $\theta = \arccos\left(\frac{6}{3\sqrt{29}}\right) = 68,1985\dots^\circ$

d) En appliquant la règle de la main droite, on constate qu'il sera dans la partie positive de l'axe des z.

e)  $\vec{A} + \vec{D} = (2; -3; 4) + (3; 0; 0) = (5; -3; 4)$

f) Le vecteur  $(-3; -2; 0)$  obtenu en b est perpendiculaire à  $\vec{A}$  et à  $\vec{B}$ .

g) L'aire est donnée par le module du produit vectoriel, soit :  $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{13} = 3,60555\dots$   
L'aire est donc d'environ 3,61 unités.

h)  $\vec{u} = \frac{-1}{\|\vec{A}\|} \vec{A} = \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} (2; -3; 4) = \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}; \frac{3}{\sqrt{29}}; \frac{4}{\sqrt{29}}\right)$

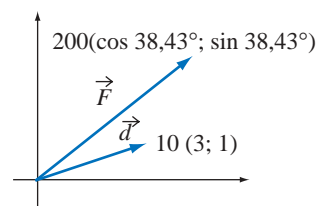
i) Les vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul. On a alors :

$\vec{A} \cdot \vec{F} = (2; -3; 4) \cdot (4; 5; s) = 8 - 15 + 4s = 0$ , d'où l'on tire  $s = 7/4$ .

11. a) Les vecteurs algébriques décrivant la situation sont donnés ci-contre. Le travail est le produit scalaire de ces vecteurs. On obtient :

$$\begin{aligned} T &= \vec{d} \cdot \vec{F} = 200(\cos 38,43^\circ; \sin 38,43^\circ) \cdot 10(3; 1) \\ &= 2\,000 (\cos 38,43^\circ; \sin 38,43^\circ) \cdot (3; 1) \\ &= 2\,000 \times 2,97166\dots \\ &= 5\,943,32 \end{aligned}$$

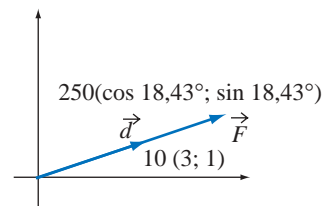
On effectue donc un travail de 5,9 kJ.



b) Les vecteurs algébriques décrivant la situation sont donnés ci-contre. Le travail est le produit scalaire de ces vecteurs. On obtient :

$$\begin{aligned} T &= \vec{d} \cdot \vec{F} = 250(\cos 18,43^\circ; \sin 18,43^\circ) \cdot 10(3; 1) \\ &= 2\,500 (\cos 18,43^\circ; \sin 18,43^\circ) \cdot (3; 1) \\ &= 2\,500 \times 3,16227\dots \\ &= 7\,905,69 \end{aligned}$$

On effectue donc un travail de 7,9 kJ.



12. a)  $\overline{AQ} = r \tan \theta$  et  $\overline{BR} = r \cot \theta$ , d'où  $\overline{AQ} \times \overline{BR} = (r \tan \theta)(r \cot \theta) = r^2 \tan \theta \times \cot \theta = r^2$

On obtient alors :  $r = \sqrt{\overline{AQ} \times \overline{BR}} = \sqrt{71,4 \times 38,6} = 52,49799\dots$

Cela donne :  $\tan \alpha = \frac{71,4}{52,5}$  et  $\alpha = \arctan\left(\frac{71,4}{52,5}\right) = 53,67\dots^\circ$

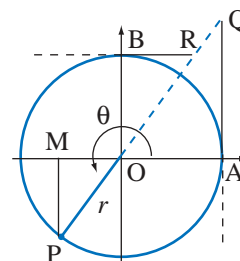
Puisque le rayon vecteur est dans le troisième quadrant, on a :  
 $\theta = 180^\circ + \alpha = 233,67^\circ$ .

b)  $\overline{OM} = r \cos \theta = 52,5 \times \cos \theta = -31,1028\dots$

$\overline{MP} = r \sin \theta = 52,5 \times \sin \theta = -42,2949\dots$

$\overline{OR} = r \csc \theta = 52,5 \times \csc \theta = -65,1673\dots$

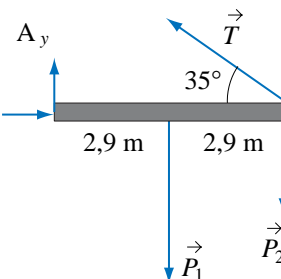
$\overline{OQ} = r \sec \theta = 52,5 \times \sec \theta = -88,6173\dots$



13. Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$ .

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2,9 & 0 & 0 \\ 0 & -1200 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5,8 & 0 & 0 \\ 0 & -1800 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5,8 & 0 & 0 \\ T \cos 145^\circ & T \sin 145^\circ & 0 \end{vmatrix} = 0$$

D'où :  $0 - 3480 - 10\,440 + 5,8T \sin 145^\circ = 0$



et :  $5,8T \sin 145^\circ = 13920$  qui donne  $T = 4184,27... \approx 4184$  N

On a alors :

$$T_y = T \sin 145^\circ = 2399,8... \approx 2400$$

$$T_x = T \cos 145^\circ = -3427,33... \approx -3427$$

$$A_x + T_x = 0 \text{ d'où } A_x = -T_x = 3427$$

$$A_y + T_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$$

$$\text{d'où : } A_y + 2400 - 1\,200 - 1\,800 = 0 \text{ et } A_y = 600 \text{ N.}$$

- 14 Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$  et, puisque  $T_y = 0$ , on a :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2,1 \cos 50^\circ & 2,1 \sin 50^\circ & 0 \\ 0 & -1400 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4,2 \cos 50^\circ & 4,2 \sin 50^\circ & 0 \\ 0 & -3800 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4,2 \cos 50^\circ & 4,2 \sin 50^\circ & 0 \\ T_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

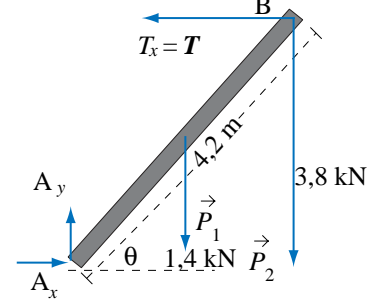
D'où  $-2940 \cos 50^\circ - 15960 \cos 50^\circ - 4,2 \sin 50^\circ T_x = 0$ , cela donne :

$$T_x = -3775,94... \approx -3\,776$$

De plus,  $A_x + T_x = 0$ , d'où  $A_x = -T_x = 3776$  N

$$A_y - P_{1y} - P_{2y} = 0$$

$$\text{d'où } A_y = 5200 \text{ N.}$$



15. Les composantes doivent s'annuler puisque le système est en équilibre, on a donc le système d'équations suivant :

$$T_1 \cos 29^\circ + T_2 \cos 139^\circ = 0$$

$$T_1 \sin 29^\circ + T_2 \sin 139^\circ - 1800 = 0$$

$$\text{La première équation donne : } T_1 = \frac{-T_2 \cos 139^\circ}{\cos 29^\circ}$$

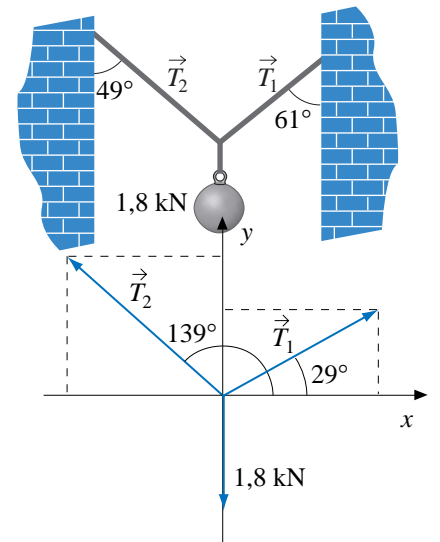
En substituant dans la deuxième, on obtient :

$$T_2(-\cos 139^\circ \tan 29^\circ + \sin 139^\circ) = 1800$$

$$T_2 = \frac{1800}{(-\cos 139^\circ \tan 29^\circ + \sin 139^\circ)} = 1675,35...$$

$$\text{et : } T_1 = \frac{-1675,35... \cos 139^\circ}{\cos 29^\circ} = 1445,659...$$

On a donc  $T_1 = 1\,445$  N et  $T_2 = 1\,675$  N.



- 16, a) Les équations des plans sont obtenues par le produit mixte des vecteurs. Pour le plan GHI, on a

$$\begin{vmatrix} x & y-8 & z-7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

qui donne  $3x + y + 4z - 36 = 0$ .

Les autres équations sont :

$$\text{Pour le plan ABC: } 3x + y + 4z + 9 = 0$$

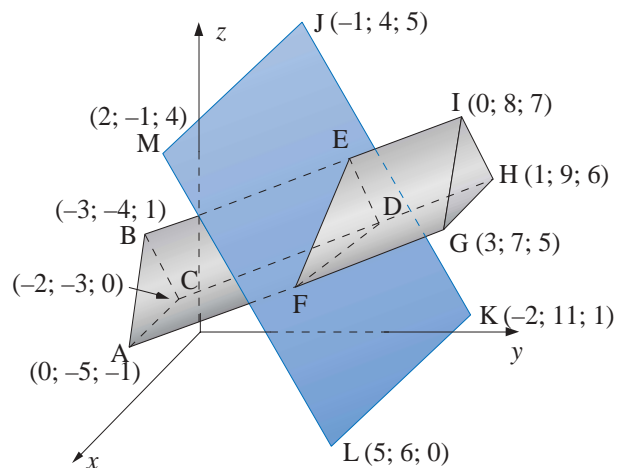
$$\text{Pour le plan ABIG: } 18x - 24y + 39z - 81 = 0$$

$$\text{ou } 6x - 8y + 13z - 27 = 0$$

$$\text{Pour le plan ACHG: } y - 2z + 3 = 0$$

$$\text{Pour le plan BCHI: } 2x - y + z + 1 = 0$$

$$\text{Pour le plan } \Pi: 3x + y + 4z - 21 = 0$$



- b) Pour trouver les équations du triangle défini par l'intersection du prisme et du plan  $\Pi$  et les points D, E et F, on peut trouver l'intersection des arêtes du prisme avec le plan sécant et déterminer les équations des droites par la suite. L'équation de la droite passant par les points B et I est

$$\Delta_{BI}: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -4 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

L'intersection avec le plan sécant  $\Pi$  est obtenue en substituant la description paramétrique des points de la droite dans l'équation du plan, ce qui donne

$$3(-3 + t) + (-4 + 4t) + 4(1 + 2t) - 21 = 0$$

d'où  $t = 2$  et en substituant dans l'équation de la droite, on trouve les coordonnées du point d'intersection, soit E  $(-1; 4; 5)$ .

De la même façon, on trouve les équations de la droite passant par A et G :  $\Delta_{AG}: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = -5 + 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

et de la droite passant par C et H :  $\Delta_{CH}: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + 4t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$

Les points d'intersection avec le plan sécant sont D  $(0; 5; 4)$  et F  $(2; 3; 3)$ .

Les droites sont définies par :  $\Delta_{EF}: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$  ;  $\Delta_{ED}: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$  ;  $\Delta_{FD}: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

- c) La longueur du prisme est la distance entre les plans ABC et GHI. Le vecteur normal de ces plans est  $\vec{N} = (3; 1; 4)$  et le vecteur  $\vec{AG} = (3; 12; 6)$  est formé d'un point de chacun des plans. La distance est alors :

$$d(\text{ABC}, \text{GHI}) = \frac{|\vec{AG} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(3; 12; 6) \cdot (3; 1; 4)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{45}{\sqrt{26}} \approx 8,83 \text{ unités.}$$

- d) Pour trouver l'aire des faces du prisme, on utilise le produit vectoriel. L'aire des bases est égale à la moitié du module du produit vectoriel des vecteurs impliqués et l'aire des parallélogrammes est égale au module du produit vectoriel. Pour la base ABC, le produit vectoriel donne :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$$

et l'aire est :  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{\sqrt{26}}{2} \approx 2,55$  unités d'aire.

L'aire de GHI est également de  $\sqrt{26}/2 \approx 2,55$  unités d'aire.

Pour la face ABGI, le produit vectoriel est :

$$\vec{AB} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = -18\vec{i} + 24\vec{j} - 39\vec{k}$$

et l'aire est  $\sqrt{2421}$  unités d'aire. L'aire de la face ACGH est  $\sqrt{2421}$  unités d'aire et l'aire de la face BCHI est  $\sqrt{486}$  unités d'aire. L'aire totale est la somme des aires des faces, ce qui donne :

$$\sqrt{2421} + \sqrt{1125} + \sqrt{486} + \sqrt{26} \approx 109,89 \text{ unités d'aire}$$

- e) Le volume du prisme est la moitié du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  et  $\vec{AG}$ . Ce volume est donné par la valeur absolue du produit mixte des vecteurs. Le produit mixte est

$$\vec{AG} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -45$$

Le volume du prisme est donc de  $45/2$  unités de volume.

- f) L'aire du triangle d'intersection devrait être égale à l'aire des bases triangulaires du prisme puisque le plan sécant est parallèle aux bases (le vecteur normal est le même, voir les équations). On peut en faire la vérification en calculant :

$$\vec{FE} \times \vec{FD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}, \text{ d'où } A_{DEF} = \frac{1}{2} \|\vec{FE} \times \vec{FD}\| = \frac{\sqrt{26}}{2} \approx 2,55 \text{ unités d'aire}$$

- g) Pour calculer l'angle entre les plans, on utilise les vecteurs normaux. Le vecteur normal du plan  $\Pi$  est  $\vec{N}_1 = (3; 1; 4)$  et le vecteur normal du plan BCHI est  $\vec{N}_2 = (2; -1; 1)$ . L'angle est alors :

$$\theta = \arccos \left( \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|} \right) = \arccos \left( \frac{|(3;1;4) \cdot (2;-1;1)|}{\|(3;1;4)\| \|(2;-1;1)\|} \right) = \arccos \left( \frac{9}{\sqrt{26}\sqrt{9}} \right) \approx 43,9^\circ$$

- h) Pour calculer l'angle entre une droite et un plan, on a besoin du vecteur directeur de la droite et du vecteur normal au plan. Pour calculer l'angle entre la droite CG et le plan  $\Pi$ , le vecteur directeur choisi est  $\vec{D} = (5; 10; 5)$  et le vecteur normal est  $\vec{N} = (3; 1; 4)$ . On a alors :

$$\theta = \arccos \left( \frac{|\vec{N} \cdot \vec{D}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{D}\|} \right) = \arccos \left( \frac{|(3;1;4) \cdot (5;10;5)|}{\|(3;1;4)\| \|(5;10;5)\|} \right) = \arccos \left( \frac{45}{\sqrt{26}\sqrt{150}} \right) \approx 43,9^\circ$$

et  $\alpha = 46,1^\circ$ .

- i) Pour calculer la distance d'un point à un plan, on a besoin du vecteur normal au plan et d'un point du plan. Le vecteur normal au plan  $\Pi$  est  $\vec{N} = (3; 1; 4)$  et le point  $L(5; 6; 0)$  est un point du plan  $\Pi$ .

On détermine le vecteur  $\vec{BL} = (8; 10; -1)$  et la distance est donnée par :

$$d(B, \Pi) = \frac{|\vec{BL} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(8;10;-1) \cdot (3;1;4)|}{\|(3;1;4)\|} = \frac{30}{\sqrt{26}} \approx 5,88 \text{ unités}$$

17. a) En effectuant le produit mixte, on a :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -5 & 3 & t \end{vmatrix} = -1(t+12) - 2(3t-20) - 3(9+5) = -7t - 14$$

Le volume du parallélépipède est 48 lorsque  $-7t - 14 = 48$  ou  $-7t - 14 = -48$ .

De  $-7t - 14 = 48$ , on tire  $t = -62/7$ .

De  $-7t - 14 = -48$ , on tire  $t = 34/7$ .

- b) Les trois vecteurs sont coplanaires lorsque le déterminant est nul. Soit lorsque  $-7t - 14 = 0$ , d'où l'on tire  $t = -2$ .

18. a) Les coordonnées des points sont :

$P_1(1/2; 1/4; 1/2)$ ,  $P_2(1/4; 1/2; 1/4)$ ,  $P_3(3/4; 0; 3/4)$ ,  $P_4(3/4; 0; 1/4)$ ,  $P_5(0; 3/4; 0)$

$$b) \Delta_{P_1P_2} = \begin{cases} x = 1/2 - t \\ y = 1/4 + t \\ x = 1/2 - t \end{cases}$$

- c) Oui, pour  $t = -1/4$  et  $t = 1/2$ .

$$d) \Delta_{P_2P_4} = \begin{cases} x = t \\ y = 3/4 + t \\ x = 1/4 \end{cases}$$

$$e) \angle(\Delta_{P_1P_2}, \Delta_{P_2P_4}) = 106,8^\circ$$

19. a) Les coordonnées des points sont :

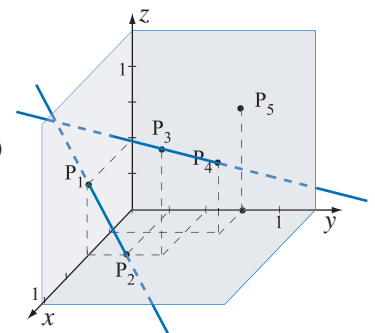
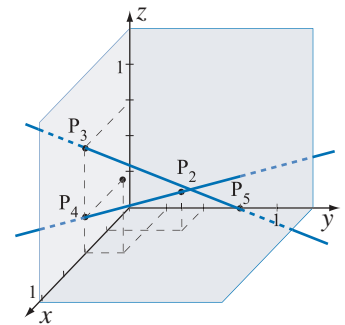
$P_1(1/2; 0; 1/2)$ ,  $P_2(1/2; 1/4; 0)$ ,  $P_3(1/2; 1/2; 3/4)$ ,  $P_4(1/4; 3/4; 1/2)$ ,  $P_5(0; 3/4; 3/4)$

$$b) 4x + 3y - 2 = 11/4$$

c) Non

$$d) 0,2451$$

$$e) \angle(\Delta_{P_1P_2}, \Delta_{P_2P_4}) = 65,9^\circ$$



20. a)  $\overrightarrow{(6,0,0)} \times \overrightarrow{(0,4,0)} = \overrightarrow{(24,36,24)}$  et  $\frac{1}{12} \overrightarrow{(24,36,24)} = \overrightarrow{(2,3,2)}$   
 alors  $\Pi_1 = \overrightarrow{(2,3,2)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(6,0,0)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$   $= \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 3y + 2z = 12 \}$

b)  $\Pi_2 = \{ (x; y; z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 3 \}$

c) Voir le graphique de gauche ci-bas.

d) Voir la représentation graphique de droite ci-bas.

e)  $\angle(\Pi_1, \Pi_2) = 46,69^\circ$

f) Pour déterminer l'équation de la droite à l'intersection des plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ , il faut résoudre le système d'équations

suisant : 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 12 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

On obtient  $\Delta_1 = \{ (x; y; z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 3 - \lambda, y = 2, z = \lambda \}$ .

Représenter graphiquement<sup>o</sup>: voir le graphique ci-bas.

g) L'équation de la droite à l'intersection des plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_3$  est :

$\Delta_2 = \{ (x; y; z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 2 - 3\lambda, y = 2\lambda, z = 4 \}$

Représenter graphiquement<sup>o</sup>: voir le graphique ci-bas.

h) Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection entre les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , il faut résoudre le système d'équations

suisant 
$$\begin{cases} 3t - \lambda = -1 \\ -2t = -2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$
. On obtient que  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = (-1; 2; 4)$ .

L'angle entre les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  est d'environ  $53,96^\circ$ .

i) L'angle entre la droite  $\Delta_1$  et le plan  $\Pi_3$  est de  $45^\circ$ .

Ce résultat peut se déduire de la représentation graphique.

k) Représentation graphique le point  $(5,6,4)$ <sup>o</sup>: Voir la représentation graphique ci-bas

l) Q :  $(37/17; 30/17; 20/17)$

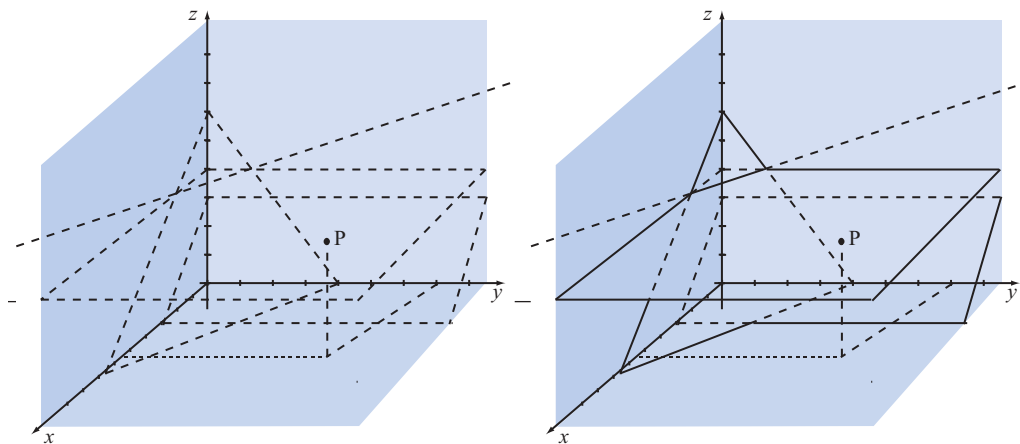
m) La distance entre le point P et la droite  $\Delta_1$  est  $d(P, \Delta_1) \approx 5,83$ .

La distance entre le point P et le plan  $\Pi_1$  est  $d(P, \Pi_1) \approx 5,82$

$d(P, \Delta_1) \neq d(P, \Pi_1)$  bien que la différence soit minime.

n) La distance entre le point P et le plan  $\Pi_3$  est 0.

o)  $d(\Delta_1, \Delta_2) = 0$



## EXERCICES 13.8

$$\begin{aligned}
 1. a) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & | & 3 \\ -1 & 2 & 2 & | & -1 \\ 3 & -4 & -5 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 7 & 10 & | & 1 \\ 0 & -17 & -28 & | & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{7L_1-3L_2} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 12 & | & 18 \\ 0 & 7 & 10 & | & 1 \\ 0 & 0 & -26 & | & -130 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{3L_3+2L_1} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 & | & 9 \\ 0 & 7 & 10 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-6L_3} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & | & -21 \\ 0 & 7 & 0 & | & -49 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \\
 & \approx L_2 \xrightarrow{L_2/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{L_3/(-26)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

L'ensemble-solution est  $\{-3; -7; 5\}$ .

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & | & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 28 & | & 12 \\ 3 & 6 & 0 & 18 & | & 12 \\ 4 & 8 & -2 & 23 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_1+L_2} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 18 & | & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\
 & \approx L_2-5L_1 \quad \approx L_3-3L_1 \quad \approx L_4-4L_1
 \end{aligned}$$

L'ensemble-solution est  $\{(x; y; z; w) \mid x = 4 - 2s - 6t, y = s, z = 2 - t/2, w = t\}$ .

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & | & 3 \\ 3 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 5 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & | & 3 \\ 0 & 14 & 5 & | & -5 \\ 0 & 14 & 5 & | & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & | & 3 \\ 0 & 14 & 5 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 18 \end{pmatrix} \\
 & \approx 2L_2-3L_1 \quad \approx L_3-L_2
 \end{aligned}$$

Le système est incompatible, il n'a aucune solution.

$$d) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & 7 \\ 3 & -6 & -15 & | & 4 \end{pmatrix} \approx L_1 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 25 \end{pmatrix} \approx L_2+3L_1$$

Le système est incompatible, il n'a aucune solution.

$$e) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & | & 0 \\ 1 & -2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \approx L_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & | & 0 \\ 0 & -8 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} \approx L_2-3L_1$$

L'ensemble-solution est  $\{(x; y; z) \mid x = \frac{2-11t}{4}, y = \frac{-6+t}{8}, z = t\}$ .

$$\begin{aligned}
 f) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 4 & -1 & 2 & | & 7 \\ 3 & -3 & 5 & | & 1 \\ 6 & 3 & -4 & | & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 0 & -9 & 14 & | & -13 \\ 0 & -9 & 14 & | & -14 \\ 0 & -9 & 14 & | & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 0 & -9 & 14 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\
 & \approx L_2-4L_1 \quad \approx L_3-3L_1 \quad \approx L_4-6L_1
 \end{aligned}$$

Le système est incompatible, il n'a aucune solution.

2. a) La matrice donnant la proportion de chacune des substances dans les alliages est :

$$\begin{pmatrix} 0,80 & 0,2 & 0,50 \\ 0,05 & 0,3 & 0 \\ 0,15 & 0,5 & 0,50 \end{pmatrix}$$

Par la multiplication des matrices, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0,80 & 0,2 & 0,50 \\ 0,05 & 0,3 & 0 \\ 0,15 & 0,5 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Le nouvel alliage contiendra 27 kg de cuivre, 10 kg de zinc et 23 kg d'étain.

$$b) \text{ On obtient la somme en kg par le produit suivant : } (1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} = (60)$$

On a donc 60 kg d'alliage. Pour trouver la proportion de chacune des composantes dans l'alliage, il faut multiplier par le scalaire  $1/60$  la matrice donnant le volume de chacune des substances. On obtient :

$$\frac{1}{60} \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,166... \\ 0,383... \end{pmatrix}$$

L'alliage contient donc 45% de cuivre, 16,7% de zinc et 38,3% d'étain.

- c) On veut avoir un mélange de 500 L contenant 59% de cuivre, 5% de zinc et 36% d'étain. On obtient la quantité en kilogramme de chacune des composantes par la multiplication suivante :

$$500 \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,05 \\ 0,36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 \\ 25 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Le mélange de 500 L devra contenir 295 ml de cuivre, 25 ml de zinc et 180 ml d'étain.

Soit  $x$ , le nombre de kg de l'alliage A,

$y$ , le nombre de kg de l'alliage B,

et  $z$ , le nombre de kg de l'alliage C.

Les contraintes sur la quantité en kg de chacun des métaux donnent :

$$0,8x + 0,2y + 0,5z = 295 \text{ pour le cuivre;}$$

$$0,05x + 0,3y + 0z = 25 \text{ pour le zinc;}$$

$$0,15x + 0,5y + 0,5z = 180 \text{ pour l'étain.}$$

Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,5 & | & 295 \\ 0,05 & 0,3 & 0 & | & 25 \\ 0,15 & 0,5 & 0,5 & | & 180 \end{pmatrix} \xrightarrow{10L_1} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & | & 2950 \\ 5 & 30 & 0 & | & 2500 \\ 3 & 10 & 10 & | & 3600 \end{pmatrix} \xrightarrow{8L_2 - 5L_1} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & | & 2950 \\ 0 & 230 & -25 & | & 5250 \\ 0 & 74 & 65 & | & 19950 \end{pmatrix} \xrightarrow{8L_3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & | & 2950 \\ 0 & 230 & -25 & | & 5250 \\ 0 & 74 & 65 & | & 19950 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{115L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 920 & 0 & 600 & | & 334000 \\ 0 & 230 & -25 & | & 5250 \\ 0 & 0 & 8400 & | & 2\ 100\ 000 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1/40} \begin{pmatrix} 23 & 0 & 15 & | & 8350 \\ 0 & 46 & -5 & | & 1050 \\ 0 & 0 & 1 & | & 250 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\approx L_2/5} \begin{pmatrix} 23 & 0 & 15 & | & 8350 \\ 0 & 46 & -5 & | & 1050 \\ 0 & 0 & 1 & | & 250 \end{pmatrix} \xrightarrow{115L_3 - 37L_1} \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 & | & 4600 \\ 0 & 46 & 0 & | & 2300 \\ 0 & 0 & 1 & | & 250 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1/23} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 200 \\ 0 & 1 & 0 & | & 50 \\ 0 & 0 & 1 & | & 250 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\approx L_2 + 5L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 200 \\ 0 & 1 & 0 & | & 50 \\ 0 & 0 & 1 & | & 250 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 200 \\ 0 & 1 & 0 & | & 50 \\ 0 & 0 & 1 & | & 250 \end{pmatrix}$$

Le nouvel alliage sera constitué de 200 kg de l'alliage A, 50 kg de B et 250 kg de C.

3. a) Soit  $x$ , le nombre de kg d'étain dans le lingot,  
et  $y$ , le nombre de kg de plomb dans le lingot.

Les contraintes sont alors :

$$x + y \geq 100$$

$$x + y \leq 150$$

$$y \geq 2x$$

$$x \geq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 120.$$

Le polygone des contraintes est donné ci-contre.

Si le plomb coûte 15 \$ le kilo et l'étain 20\$ le kilo, la fonction économique est  $f(x; y) = 15x + 20y$ . L'évaluation des coûts aux points sommets du polygone des contraintes donne :

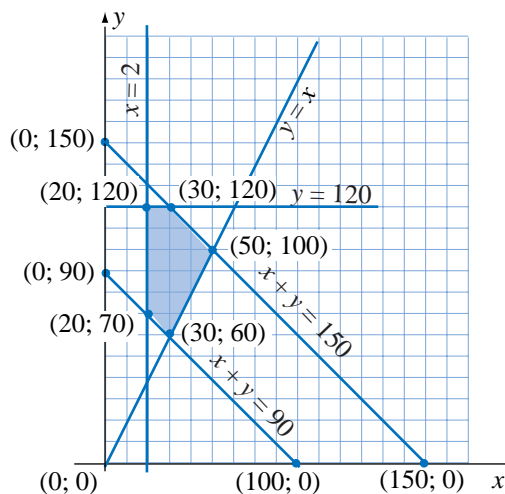
$(x; y)$	(20; 70)	(20; 120)	(30; 120)	(50; 100)	(30; 60)
$z$	1 700	2 700	2 850	2 750	1 650

Le lingot le moins coûteux contient 30 kg de plomb et 60 kg d'étain et coûte 1 650\$. Le plus coûteux contient 30 kg de plomb et 120kg d'étain. Il coûte 2 850\$.

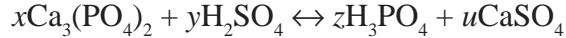
- b) Si le plomb coûte 18 \$ le kilo et l'étain 12\$ le kilo, la fonction économique est  $f(x; y) = 15x + 20y$ . L'évaluation des coûts aux points sommets du polygone des contraintes donne :

$(x; y)$	(20; 70)	(20; 120)	(30; 120)	(50; 100)	(30; 60)
$z$	1 200	1 800	1 980	2 100	1 260

Le lingot le moins coûteux contient 20 kg de plomb et 70 kg d'étain et coûte 1 200\$. Le plus coûteux contient 50 kg de plomb et 100kg d'étain. Il coûte 2 100\$.



4. a) On cherche une solution entière  $(x; y; z; u)$  telle que l'équation suivante est équilibrée :



Les équations de contrainte sont :

Pour Ca :  $3x = u$ ;

pour P :  $2x = z$ ;

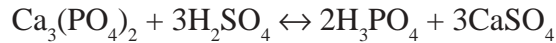
pour O,  $8x + 4y = 4z + 4u$ ;

pour H,  $2y = 3z$ .

Considérons  $x = t$  comme variable libre, on a alors  $u = 3x = 3t$ , et  $z = 2x = 2t$ . En substituant cette dernière expression dans la contrainte pour H, on obtient :  $2y = 3z = 3(2t) = 6t$ , d'où  $y = 3t$ . La contrainte pour O permet de vérifier que la solution est correcte. L'ensemble solution est donc :

$$\{(x; y; z; u) \mid x = t, y = 3t, z = 2t \text{ et } u = 3t\}$$

On obtient une solution particulière dont toutes les composantes sont des nombres entiers en posant  $t = 1$ . C'est la solution (1; 3; 2; 3) Cela donne la solution équilibrée :



b) On cherche une solution entière  $(x; y; z; u)$  telle que l'équation suivante est équilibrée :



Les équations de contrainte sont :

Pour K :  $x = u$ ;

pour Mn :  $x = z$ ;

pour O,  $4x = w$ ;

pour H,  $y = 2w$ ;

pour Cl,  $y = 2z + u + 2v$ .

Considérons  $x = t$  comme variable libre, on a alors  $u = x = t$ ,  $z = x = t$  et  $w = x/4 = t/4$ . En substituant dans la contrainte pour H, on obtient :  $y = 2w = 8t$ . La contrainte pour Cl donne alors  $8t = 2t + t + 2v$ , d'où  $v = 5t/2$ . L'ensemble solution est donc :

$$\{(x; y; z; u; v; w) \mid x = t, y = 8t, z = t, u = t, v = 5t/2, w = 4t\}$$

On obtient une solution particulière dont toutes les composantes sont des nombres entiers en posant  $t = 2$ . C'est la solution (2; 16; 2; 2; 5; 8) Cela donne la solution équilibrée :



5. a) Soit  $x$ , le nombre de jours de production à l'usine A,

$y$ , le nombre de jours de production à l'usine A,

et  $z$ , le nombre de jours de production à l'usine A.

Les contraintes sur les quantités à produire :

$100x + 200y + 100z = 12\ 000$  pour le haut indice d'octane;

$300x + 100y + 200z = 23\ 000$  pour le moyen indice d'octane;

$400x + 300y + 500z = 41\ 000$  pour le bas indice d'octane.

Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 100 & 200 & 100 & | & 12000 \\ 300 & 100 & 200 & | & 23000 \\ 400 & 300 & 500 & | & 41000 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1/100 \\ L_2/100 \\ L_3/100}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 120 \\ 3 & 1 & 2 & | & 230 \\ 4 & 3 & 5 & | & 410 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 4L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 120 \\ 0 & -5 & -1 & | & -130 \\ 0 & -5 & 1 & | & -70 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{5L_1 + 2L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3 - L_2}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & | & 340 \\ 0 & -5 & -1 & | & -130 \\ 0 & 0 & 2 & | & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2L_1 - 3L_3 \\ \approx 2L_2 + L_3}} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & | & 500 \\ 0 & -10 & 0 & | & -200 \\ 0 & 0 & 2 & | & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1/10 \\ L_2/(-10) \\ L_3/2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 50 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 \\ 0 & 0 & 1 & | & 30 \end{pmatrix}$$

Il faudra 50 jours de production à l'usine A, 20 jours de production à l'usine B et 30 jours de production à l'usine C

$$b) \begin{pmatrix} 100 & 200 & 100 \\ 300 & 100 & 200 \\ 400 & 300 & 500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\ 100 \\ 10\ 800 \\ 20\ 900 \end{pmatrix}$$

La compagnie a produit 7 100 barils à haut indice d'octane, 10 800 barils à moyen indice d'octane et 20 900 barils à bas indice d'octane.

6. Soit  $x$ , le montant investi dans le placement risqué  
 et  $y$ , le montant investi dans le placement sécuritaire.

Les contraintes sont :

$$\begin{aligned} y &\leq 6\,000 \\ x &\geq 2\,000 \\ x + y &\leq 10\,000 \end{aligned}$$

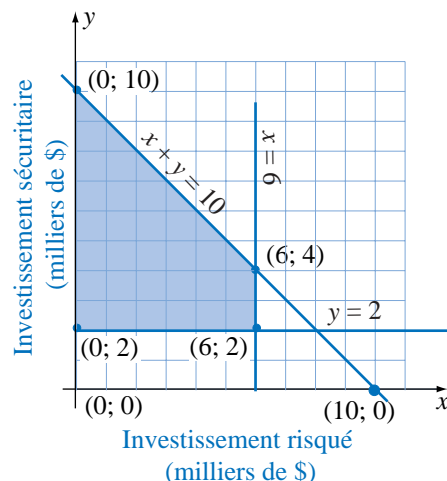
Le polygone des contraintes est donné ci-contre.

La fonction économique est  $f(x; y) = 0,1x + 0,07y$

L'évaluation du revenu aux points sommets du polygone des contraintes donne :

$(x; y)$	$(0; 2000)$	$(0; 10000)$	$(6000; 2000)$	$(6000; 4000)$
$z$	140	700	740	880

Il devrait investir 60 000\$ dans le placement risqué et 4 000\$ dans le placement sécuritaire.



7. Soit  $x$ , le nombre de litres du liquide A,  
 $y$ , le nombre de litres du liquide B,  
 et  $z$ , le nombre de litres du liquide C.

Les contraintes sur la quantité en kg de chacun des métaux donnent :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 20 \text{ pour le nombre de litres du mélange;} \\ 0,08x + 0,1y + 0,2z &= 2,6 \text{ pour la proportion d'alcool;} \\ -3x + y + z &= 0 \text{ pour la troisième contrainte.} \end{aligned}$$

Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0,08 & 0,1 & 0,2 & 2,6 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 4 & 5 & 10 & 130 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 6 & 50 \\ 0 & 4 & 4 & 60 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_1 - L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -30 \\ 0 & 1 & 6 & 50 \\ 0 & 0 & -20 & -140 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -30 \\ 0 & 1 & 6 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1 + 5L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \end{aligned}$$

8. a)  $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 10 & 15 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 9000 \\ 18000 \end{pmatrix}$ , soit 9 kg d'arachides, 9 kg de raisins et 18 kg de noix de cajou.

b)  $(0,10 \ 0,04 \ 0,16) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1,5 & 1 \\ 1 & 1,5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = (0,72 \ 0,69 \ 0,66)$

c)  $(0,72 \ 0,69 \ 0,66) + (0,18 \ 0,18 \ 0,18) = (0,90 \ 0,87 \ 0,84)$

d)  $1,8 (0,90 \ 0,87 \ 0,84) = (1,62 \ 1,57 \ 1,51)$

e) La matrice augmentée est :  $\left( \begin{array}{ccc|c} 20 & 15 & 10 & 6000 \\ 10 & 15 & 20 & 6000 \\ 30 & 30 & 30 & 12000 \end{array} \right)$ .

En résolvant, on a :  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ .

Il y a une variable libre, c'est le nombre de mélanges Croc. En posant  $z = t$ , on a :

$$\{(x; y; z) \mid x = t; y = 400 - 2t \text{ et } z = t\}.$$

Le marchand a le choix parmi différentes possibilités dont certaines sont énumérées dans le tableau ci-contre.

- f) Les coûts pour 10 g de chaque ingrédient sont donnés par la matrice  $(0,10 \ 0,04 \ 0,26)$ . La matrice du coût des matières premières de chaque type de mélange est alors :

$$(0,10 \ 0,04 \ 0,26) \begin{pmatrix} 4 & 2,5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1,5 & 2 \end{pmatrix} = (0,70 \ 0,72 \ 0,80)$$

Matrice des coûts :  $(0,70 \ 0,72 \ 0,80) + (0,18 \ 0,18 \ 0,18) = (0,88 \ 0,90 \ 0,98)$

Matrice des prix :  $1,8 \times (0,88 \ 0,90 \ 0,98) = (1,58 \ 1,62 \ 1,76)$

$$g) \begin{pmatrix} 40 & 25 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8500 \\ 5000 \\ 4500 \end{pmatrix}$$

soit 8,5 kg d'arachides, 5 kg de raisins et 4,5 kg de noix de cajou.

9. a) Sous forme matricielle, le système d'équations s'écrit :  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 119 \\ 172 \end{pmatrix}$ .

b) Par Gauss-Jordan, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -20 \\ 4 & 2 & -5 & 119 \\ 5 & 3 & -8 & 172 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \approx 2L_2 - L_1 \\ 2L_3 - 5L_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -20 \\ 0 & 8 & -22 & 318 \\ 0 & 11 & -31 & 444 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2L_1 - L_2 \\ \approx L_2 \\ 8L_3 - 11L_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 16 & 0 & 2 & 158 \\ 0 & 8 & -22 & 318 \\ 0 & 0 & -6 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1/2 \\ \approx L_2/2 \\ L_3/(-6) \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 79 \\ 0 & 4 & -11 & 159 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ \approx L_2 + 11L_3 \\ L_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 88 \\ 0 & 4 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1/8 \\ \approx L_2/4 \\ L_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

La solution est donc  $x = 11$ ,  $y = 15$  et  $z = -9$ .

10. a) Le vecteur  $\vec{D}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (3; -2; 0) - (1; 3; -2) = (2; -5; 2)$  est un vecteur directeur du plan cherché. Puisque ce plan est parallèle à la droite  $\Delta$ , le vecteur directeur de la droite est également un vecteur directeur du plan. Le vecteur directeur de la droite est obtenu par le produit vectoriel des vecteurs normaux des plans dont la droite est l'intersection.

Les vecteurs normaux sont :  $\vec{N}_1 = (4; 3; -1)$  et  $\vec{N}_2 = (3; -5; 2)$ . Le produit vectoriel est alors :

$$\vec{D}_2 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(6-5) - \vec{j}(8+3) + \vec{k}(-20-9). \text{ On a donc } \vec{D}_2 = (1; -11; -29)$$

Un point  $P(x; y; z)$  est dans le plan cherché si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\vec{D}_1$  et  $\vec{D}_2$  sont coplanaires. C'est-à-dire si et seulement si  $\det(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{D}_1, \vec{D}_2) = 0$ . On a donc :

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{D}_1 \times \vec{D}_2) = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -11 & -29 \end{vmatrix} = 167(x-1) + 60(y-3) - 17(z+2) = 0$$

D'où l'équation du plan est  $167x + 60y - 17z - 381 = 0$ .

- b) Le vecteur  $\vec{D}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (4; 0; 3) - (3; -1; 2) = (1; 1; 1)$  est un vecteur directeur du plan cherché. Puisque ce plan est parallèle à la droite  $\Delta$ , le vecteur directeur de la droite est également un vecteur directeur du plan. Le vecteur directeur de la droite est obtenu par le produit vectoriel des vecteurs normaux des plans dont la droite est l'intersection. Les vecteurs normaux sont :  $\vec{N}_1 = (2; -1; 1)$  et  $\vec{N}_2 = (-3; 2; 4)$ . Le produit vectoriel est alors :

$$\vec{D}_2 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4-2) - \vec{j}(8+3) + \vec{k}(4-3). \text{ On a donc } \vec{D}_2 = (-6; -11; 1)$$

Un point  $P(x; y; z)$  est dans le plan cherché si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\vec{D}_1$  et  $\vec{D}_2$  sont coplanaires. C'est-à-dire si et seulement si  $\det(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{D}_1, \vec{D}_2) = 0$ . On a donc :

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{D}_1 \times \vec{D}_2) = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 12(x-3) - 7(y+1) - 5(z-2) = 0.$$

D'où l'équation du plan est  $12x - 7y - 5z - 33 = 0$ .

$$11. a) \begin{pmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 1,5 & 2,5 & 1,5 \\ 1,8 & 1,6 & 2,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 648 \\ 83 \\ 88 \end{pmatrix}$$

La compagnie doit commander 648 mètres linéaires de bois, 83 m<sup>2</sup> de contreplaqué et 88 m<sup>2</sup> de panneau d'aggloméré.

$$b) (4,50 \ 32,50 \ 22,50) \begin{pmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 1,5 & 2,5 & 1,5 \\ 1,8 & 1,6 & 2,2 \end{pmatrix} = (143,25 \ 189,25 \ 161,25)$$

$$c) 8,50 (6 \ 5 \ 4) = (51 \ 42,50 \ 34)$$

$$d) (143,25 \ 189,25 \ 161,25) + (51 \ 42,50 \ 34) = (194,25 \ 231,75 \ 195,25)$$

$$e) 1,5 (194,25 \ 231,75 \ 195,25) = (291,38 \ 347,63 \ 292,88)$$

$$f) 1,4 (291,38 \ 347,63 \ 292,88) = (407,93 \ 486,68 \ 410,03)$$

$$g) \text{ La matrice augmentée est } \left( \begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 14 & 332 \\ 1,5 & 2,5 & 1,5 & 44 \\ 1,8 & 1,6 & 2,2 & 44 \end{array} \right) \text{ et en résolvant, on trouve } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

Le plan de production doit être de 10 bureaux du modèle colonial, 8 du modèle espagnol et 6 du modèle canadien.

$$h) \text{ La matrice augmentée est } \left( \begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 14 & 612 \\ 1,5 & 2,5 & 1,5 & 76 \\ 1,8 & 1,6 & 2,2 & 86 \end{array} \right) \text{ et en résolvant, on trouve } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array} \right).$$

Le plan de production doit être de 12 bureaux du modèle colonial, 10 du modèle espagnol et 22 du modèle canadien.

$$12. a) \text{ La matrice augmentée du système est } \left( \begin{array}{ccc|c} 20 & 24 & 30 & 930 \\ 20 & 15 & 30 & 840 \\ 15 & 18 & 20 & 660 \end{array} \right).$$

dont la solution est (12; 10; 15). L'entreprise peut donc produire 12 chaises du premier modèle, 10 du deuxième et 15 du troisième.

b) En tenant compte des temps qui s'ajoutent suite à la suspension de la production des deux anciens modèles, la matrice augmentée du système devient :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 20 & 24 & 30 & 2120 \\ 20 & 15 & 30 & 1895 \\ 15 & 18 & 20 & 1510 \end{array} \right)$$

dont la solution est (28; 25; 32). L'entreprise peut maintenant produire 28 chaises du premier modèle, 25 du deuxième et 32 du troisième

$$13. a) P - I = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,8 \\ 0,6 & -0,6 \end{pmatrix}, (P - I)^t = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Le point invariant est } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 1,4 & 1,4 \end{pmatrix} = (3/7 \ 4/7).$$

$$b) P-I = \begin{pmatrix} -0,9 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & -0,8 & 0,6 \\ 0,3 & 0,1 & -0,4 \end{pmatrix}, (P-I)^t = \begin{pmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & -0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 & -0,4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & -0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 & -0,4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Le point invariant est } \begin{pmatrix} 0,26 & 0,24 & 0,62 \\ 1,12 & 1,12 & 1,12 \end{pmatrix} = (13/56 \quad 3/14 \quad 31/56).$$

$$c) P-I = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}, (P-I)^t = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Le point invariant est } \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = (1/4 \quad 1/4 \quad 1/2).$$

14. a) Déterminons l'équation de la droite passant par le point P et perpendiculaire au plan. Le vecteur directeur de cette

$$\text{droite est } \vec{D} = (6; -3; 7) \text{ et l'équation de la droite est : } \Delta: \begin{cases} x = 7 + 6t \\ y = -2 - 3t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$$

Pour trouver le point de rencontre, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, ce qui donne :

$$6(7 + 6t) - 3(-2 - 3t) + 7(4 + 7t) - 29 = 0 \text{ et } 42 + 36t + 6 + 9t + 28 + 49t - 29 = 0.$$

D'où  $94t + 47 = 0$  et  $t = -1/2$ . En substituant cette valeur de  $t$  dans les équations paramétriques de la droite, on trouve  $(x; y; z) = (4; -1/2; 1/2)$ .

Ce point est le pied de la hauteur abaissée de P(7; -2; 4) sur le plan  $\Pi$ :  $6x - 3y + 7z - 29 = 0$ .

$$b) \text{ Le produit vectoriel des vecteurs directeurs du plan donne : } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

Le vecteur  $\vec{D}_1 = (10; 6; 2)$  est donc un vecteur directeur de la droite, le vecteur  $\vec{D}_2 = (5; 3; 1)$  également. L'équation de la droite est :

$$\Delta: \begin{cases} x = -11 + 5s \\ y = -8 + 3s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Pour trouver le point de rencontre, on doit déterminer s'il existe des scalaires  $s$ ,  $t$  et  $u$  tels que :

$$\begin{cases} -11 + 5s = 3 - 2t + 2u \\ -8 + 3s = 4 + 2t - 3u \\ 3 + s = 2 + 4t - u \end{cases} \text{ . Ce qui donne le système d'équations } \begin{cases} 5s + 2t - 2u = 14 \\ 3s - 2t + 3u = 12 \\ s - 4t + u = -1 \end{cases}$$

En résolvant, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & | & 14 \\ 3 & -2 & 3 & | & 12 \\ 1 & -4 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & | & -1 \\ 3 & -2 & 3 & | & 12 \\ 5 & 2 & -2 & | & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1, L_3 - 5L_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & | & -1 \\ 0 & 10 & 0 & | & 15 \\ 0 & 22 & -7 & | & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2/5} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 22 & -7 & | & 19 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & -7 & | & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & -7 & | & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3/(-7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{L_1 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

En posant  $s = 3$  dans les équations paramétriques de la droite, on trouve  $(x; y; z) = (4; 1; 6)$ . Ce point est le pied de la hauteur abaissée de P(-11; -8; 3) sur le plan  $\Pi$ . On peut vérifier la concordance en posant  $t = 3/2$  et  $u = 2$  dans les équations paramétriques du plan.

15. a) Le plan est l'ensemble des points  $S(x; y; z)$  pour lesquels les vecteurs  $\overrightarrow{PS} = (x - 3; y + 2; z - 4)$ ,  $\overrightarrow{PQ} = (4; -3; -2)$  et  $\overrightarrow{PR} = (-6; -4; 4)$  sont coplanaires, c'est-à-dire que le produit mixte est nul. On a donc :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-4 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -20(x-3) - 4(y+2) - 34(z-4) = 0$$

Cela donne  $-20x - 4y - 34z + 188 = 0$  ou  $10x + 2y + 17z - 94 = 0$ .

- b) On peut déterminer la valeur absolue du produit mixte des vecteurs  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{PR}$  pour déterminer le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs. Puis, on divise par l'aire de la base, soit le module du produit vectoriel des vecteurs  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{PR}$ . On obtient alors la hauteur du parallélépipède abaissée sur la base formée des vecteurs  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{PR}$ . Cette hauteur est la distance cherchée.

- c) Le plan est l'ensemble des points  $S(x; y; z)$  pour lesquels les vecteurs  $\overrightarrow{PS} = (x + 5; y - 4; z - 6)$  et  $\vec{u} = (2; 3; -1)$  sont perpendiculaires. Le produit scalaire donne alors :  
 $(x + 5; y - 4; z - 6) \cdot (2; 3; -1) = 0$ , d'où  $2x + 3y - z + 4 = 0$ .

$$d) \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

- e) En substituant les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, on trouve :  
 $3(2 - 3t) + 4(4 + 2t) - 5(5 - t) - 9 = 0$ , d'où  $4t - 12 = 0$  et  $t = 3$ . En substituant cette valeur dans les équations paramétriques, on obtient  $(x; y; z) = (-7; 10; 2)$ . C'est le point de rencontre.

- f) On doit déterminer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{D} = (-3; 2; -1)$  et  $\overrightarrow{BL}$ , où  $C(2; 4; 5)$  et  $B(3; 8; 2)$ , puis diviser cette aire par la longueur de la base  $\vec{D}$  pour trouver la hauteur du parallélogramme qui est la distance cherchée. Cela donne :

$$\vec{D} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 10\vec{j} - 14\vec{k} \text{ et } A = \|\vec{D} \times \overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2 + (-14)^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$\|\vec{D}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \text{ et } h = \frac{\|\vec{D} \times \overrightarrow{CB}\|}{\|\vec{D}\|} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{5}{7}\sqrt{42} \approx 4,63 \text{ unités.}$$

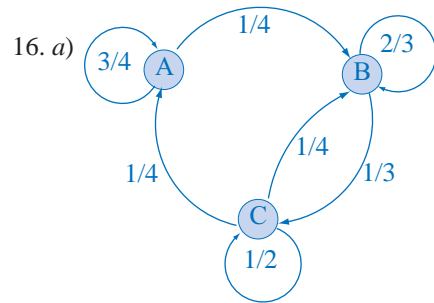
- g) Le plan est perpendiculaire à  $\Pi_2$ , le vecteur normal de  $\Pi_2$  est donc un vecteur directeur de  $\Pi_3$ . Le vecteur directeur de  $\Delta$  est également un vecteur directeur du plan  $\Pi_3$  et ce plan contient le point  $(2; 4; 5)$ . On a donc :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t + 3s \\ y = 4 + 2t + 4s \\ z = 5 - t - 5s \end{cases}$$

16. En représentant par une matrice et en échelonnant, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \approx L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & -10 & -20 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4L_1 + L_2 \\ \approx L_2 \\ 2L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 16 \\ 0 & -4 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} L_1 + 3L_3 \\ \approx L_2 + 5L_3 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1/4 \\ \approx L_2/(-4) \\ L_3/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc une solution unique,  $(4; 5; 0)$ , c'est le point de rencontre des trois plans décrits par ces équations.



b) L'état stable est  $(2/7; 3/7; 2/7)$

17. a)

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$E_1$	0,4	0,2	0,4
$E_2$	0,5	0,3	0,2
$E_3$	0,2	0,3	0,5

b) L'état stable est  $(29/83; 22/83; 32/83)$

