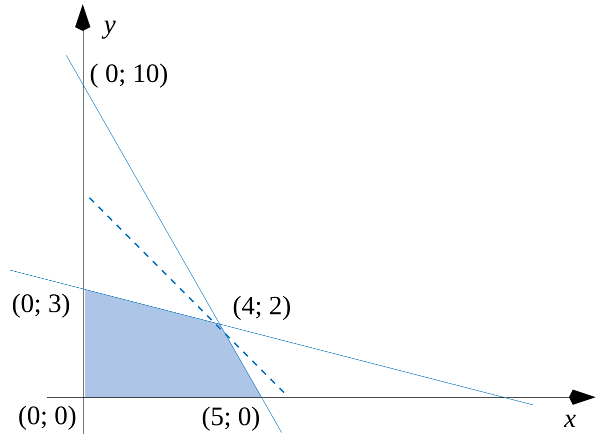
CHAPITRE 12



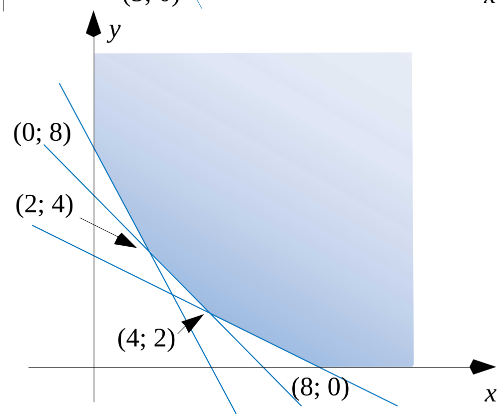
EXERCICES 12.2

1. *a*)

$(x; y)$	(0; 0)	(0; 3)	(5; 0)	(4; 2)
z	0	9	15	18

La valeur maximale, atteinte à (4; 2), est 18.

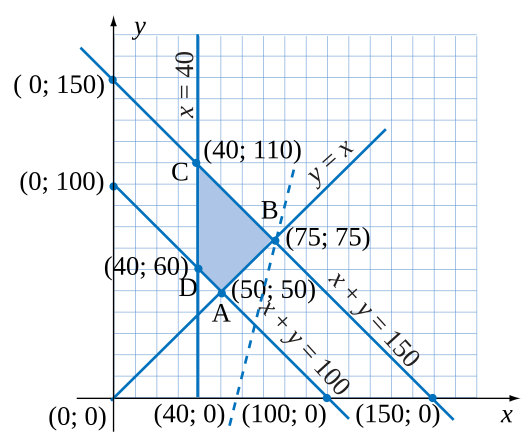
b)



$(x; y)$	(0; 8)	(2; 4)	(4; 2)	(8; 0)
w	56	38	34	40

La valeur minimale, atteinte à (4; 2), est 34.

2. **Identifier les variables :**
Si x est le nombre de kilogrammes d'étain, et y le nombre de kilogrammes de cuivre.
Établir les contraintes :
maximiser $z = 8x - 2y$ sujette aux contraintes
$x + y \geq 100$
$x + y \leq 150$
$y \geq x$
$x \geq 40$ et $y \geq 0$.



Déterminer le polygone des solutiosnadmissibles :
La solution de ce système d'inéquations est donc le polygone dont les points extrêmes sont A, B, C et D .
Calculer les coordonnées des points extrêmes :
Point A : Le point A doit satisfaire les contraintes $x = y$ et $x + y = 100$, donc $A = (50; 50)$.
Point B : Le point B doit satisfaire les égalités $x = y$ et $x + y = 150$, donc B = (75; 75).
Point C : Le point C doit satisfaire les équations $x = 40$ et $x + y = 150$, donc C = (40; 110).
Point D : Le point D doit satisfaire les contraintes $x = 40$ et $x + y = 100$, donc D = (40; 60).
Définir la fonction économique :
Le profit engendré par la vente du lingot est donné par la fonction f définie par :

$$z = f(x; y) = 8x - 2y$$

Calculer les images des points extrêmes :
Le tableau suivant donne les points sommets sont et le profit réalisé pour chacune de ces solutions.

$(x; y)$	(40; 110)	(40; 60)	(50; 50)	(75; 75)
w	100	200	300	450

Réponse :
Le maximum de revenu serait de 450 $ pour un lingot contenant 75 kg de cuivre et 75 kg d'étain. Mais cette solution ne traduit pas bien le sens de la contrainte « plus de cuivre que d'étain »; il faudrait consulter le client afin d'avoir des précisions sur ses contraintes.

3. Soit x, le nombre de ml de la solution M_1;
   et y, le nombre de ml de la solution M_2.
   Les contraintes sont :

   $x + y = 100$

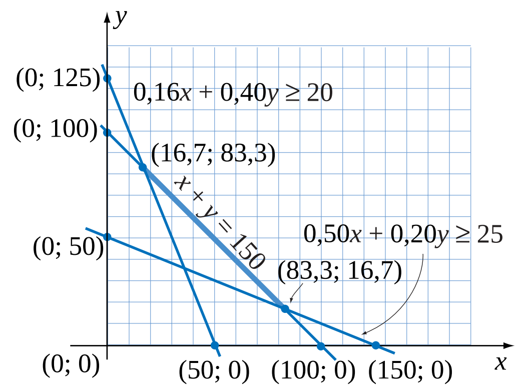
   $0{,}16x + 0{,}40y \geq 20$

   $0{,}50x + 0{,}20y \geq 25$

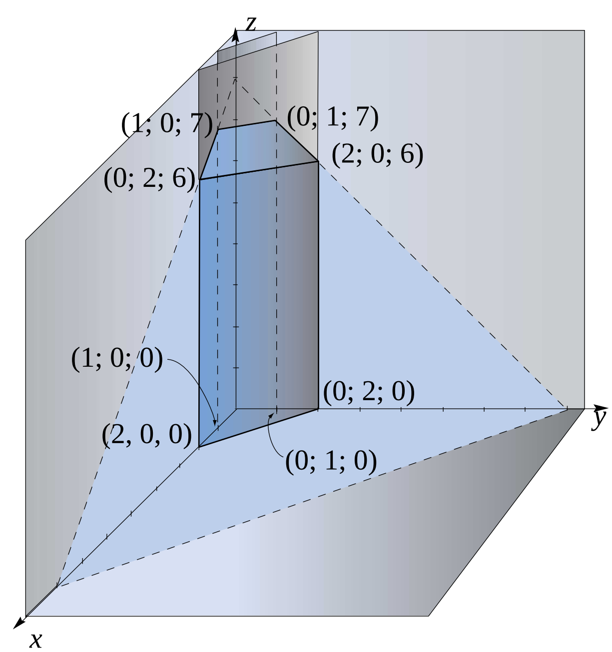
   $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

   Il y a plusieurs solution possibles. Toutes les solutions situées sur le segment de droite défini par :

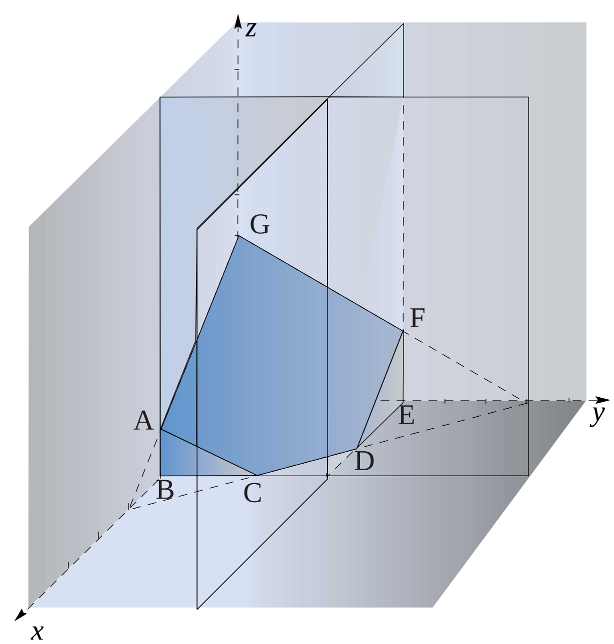
   $$\left.\begin{array}{l} x = 100 - t \\ y = t \end{array}\right\} \text{ où } t \in [16{,}7;\ 83{,}3]$$



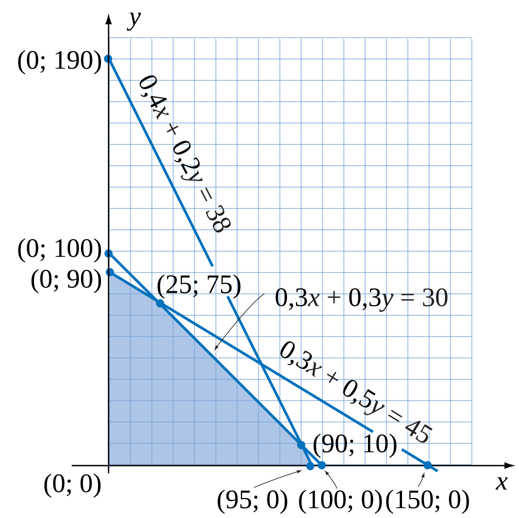
4. Les six points qui délimitent le polyèdre de contrainte sont : (1; 0; 0), (0; 1; 0), (2; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 1; 7), (1; 0; 7), (2; 0; 6) et (0; 2; 6) .
   Le maximum de f est 12 et il est atteint au point (0; 2; 6) . Le polyèdre de contrainte est esquissé ci-contre.



5. Les huit points qui délimitent le polyèdre de contrainte sont : A(3; 0; 0), B(3; 0; 1), C(3; 1/4; 0), D(12/7; 4; 0). E(0; 4; 0), F(0; 4; 12/7), G(0; 0; 4) et O(0; 0; 0).
   Le maximum de f est 136/7 et il est atteint aen tous les points du segment DF. Le minimum de f est 0 et il est atteint au point O. Le polyèdre de contrainte est esquissé ci-contre.



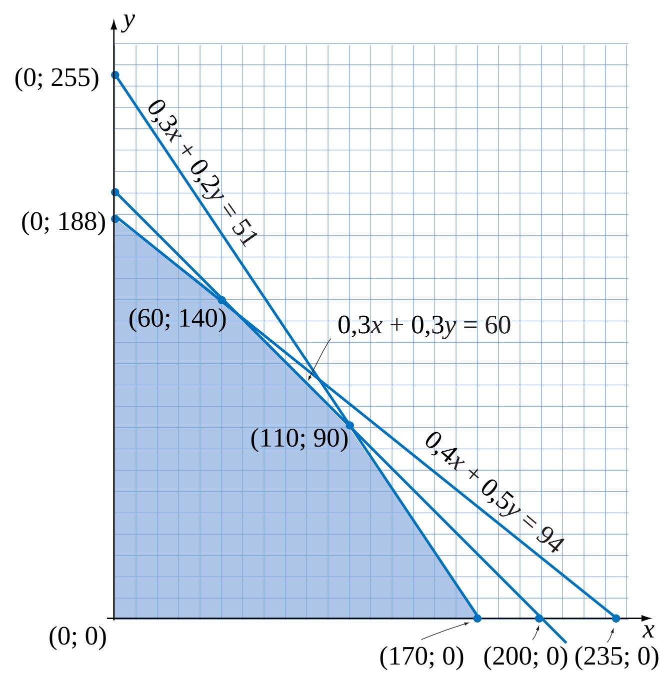
6. *a*) Si x est le nombre de kilogrammes de SuperA produits et y le nombre de kilogrammes d'ExtraC produits, maximiser $z = 3x + 2y$ sujette aux contraintes
$0{,}4x + 0{,}2y \leq 38$
$0{,}3x + 0{,}3y \leq 30$
$0{,}3x + 0{,}5y \leq 45$
$x \geq 0$ et $y \geq 0$.
Les points sommets sont (0; 0), (0; 90), (25; 75), (90; 10) et (95; 0). On trouve $z = 290$ \$ à (90; 10). Donc, il faut produire 90 kg de SuperA et 10 kg d'ExtraC à chaque semaine.



b) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 30 \\ 32 \end{pmatrix}$

Il faut commander 38 kg de vitamine A, 30 kg de vitamine B et 32 kg de vitamine C.

7 *a*) Si x est le nombre de litres du mélange *Brillenet* produits,
et y le nombre de litres du mélange *Clairnet* produits, maximiser $z = 1{,}50x + 1{,}20y$ sujette aux contraintes
$0{,}4x + 0{,}5y \leq 94$
$0{,}3x + 0{,}2y \leq 51$
$0{,}3x + 0{,}3y \leq 60$
$x \geq 0$ et $y \geq 0$.
Les points sommets sont (0; 0), (0; 188), (60; 140), (110; 90) et (170 ;0). On trouve $z = 273$ \$ à (110; 90).Donc, il faut fabriquer 110 litres du mélange Brillenet et 90 litres du mélange Clairnet.



b) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 110 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ 51 \\ 60 \end{pmatrix}$

Il faut commander 89 L du premier ingrédient, 51 L du deuxième et 60 L du troisième.

c) En ajoutant la contrainte $x \leq 70$, les nouveaux points sommets sont (0; 0), (0; 188), (70; 0), (60; 140) et (70; 130). Le plan de production est (70;130) et alors $z = 261$ \$.

d) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 47 \\ 60 \end{pmatrix}$

Il faut modifier le plan d'acquisition et commander hebdomadairement 93 L du premier ingrédient, 47 L du deuxième et 60 L du troisième.