# CHAPITRE 11

## EXERCICES 11.2

1. *a*) Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&13\\2&5&-3&-17\\3&4&2&14\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-3L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&13\\0&9&-5&-43\\0&10&-1&-25\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2\\9L_3-10L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&13\\0&9&-5&-43\\0&0&41&205\end{array}\right)$$

La dernière ligne donne $z = 5$ et en substituant on trouve $y = -2$ et $x = 4$. La solution est $(4; -2; 5)$

*b*) Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&4\\2&5&1&9\\4&9&-1&17\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-4L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&4\\0&1&3&1\\0&1&3&1\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3-L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&4\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Le système a une infinité de solutions. En posant $z = t$ et en substituant dans les équations restantes, on obtient l'ensemble-solution $\{(x; y; z) \mid x = 2 + 7t, y = 1 - 3t, z = t\}$.

*c*) Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&7\\2&-5&-1&16\\4&-11&3&30\\3&-8&1&23\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-4L_1\\L_4-3L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&7\\0&1&-5&2\\0&1&-5&2\\0&1&-5&2\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3-L_2\\L_4-L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&7\\0&1&-5&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Le système a une infinité de solutions. En posant $z = t$ et en substituant dans les équations restantes, on obtient l'ensemble-solution $\{(x; y; z) \mid x = 13 + 13t, y = 2 + 5t, z = t\}$

*d*) Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-5&6&-2&31\\1&2&4&3&27\\2&3&2&1&8\\1&3&2&1&6\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2-L_1\\L_3-2L_1\\L_4-L_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-5&6&-2&31\\0&7&-2&5&-4\\0&13&-10&5&-54\\0&8&-4&3&-25\end{array}\right)$$

$$\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2\\7L_3-13L_2\\7L_4-8L_2\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-5&6&-2&31\\0&7&-2&5&-4\\0&0&-44&-30&-326\\0&0&-12&-19&-143\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\\44L_4-12L_3\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-5&6&-2&31\\0&7&-2&5&-4\\0&0&-44&-30&-326\\0&0&0&-476&-2380\end{array}\right)$$

Le système a une solution unique $(2; -3; 4; 5)$

2. Soit $x$, la proportion de $^{35}Cl$ dans le chlore naturel;
et $y$, la proportion de $^{37}Cl$ dans le chlore naturel.
Les inconnues étant des proportions, la première contrainte est : $x + y = 1$;
La deuxième contrainte est celle de la masse atomique du chlore naturel qui donne : $35x + 37y = 35{,}5$.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\35&37&35{,}5\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2-35L_1\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&2&0{,}5\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}2L_1-L_2\\L_2\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}2&0&1{,}5\\0&2&0{,}5\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1/2\\L_2/2\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0{,}75\\0&1&0{,}25\end{array}\right)$$

La composition du chlore naturel est donc 75% de $^{35}Cl$ et 25% de $^{37}Cl$.

3. Soit $x$, la proportion de $^{6}Li$ dans le lithium naturel;
et $y$, la proportion de $^{7}Li$ dans le lithium naturel.
Les inconnues étant des proportions, la première contrainte est : $x + y = 1$;
La deuxième contrainte est celle de la masse atomique du lithium naturel qui donne : $6{,}015x + 7{,}017y = 6{,}941$.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\6{,}015&7{,}016&6{,}941\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2-6{,}015L_1\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1{,}001&0{,}926\end{array}\right)$$

$$\approx\begin{array}{l}1{,}001L_1-L_2\\L_2\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1{,}001&0&0{,}075\\0&1{,}001&0{,}926\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1/1{,}001\\L_2/1{,}001\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0{,}7492...\\0&1&0{,}9250...\end{array}\right)$$

Le lithium naturel est composé de 7,50% de $^{6}Li$ et de 92,5% de $^{7}Li$.

4. *a*) Soit $x$, le nombre de litres de la tourbe $T_1$,
$y$, le nombre de litres de la tourbe $T_2$,
et $z$, le nombre de litres de la tourbe $T_3$.
Les contraintes d'espace et de poids s'écrivent alors :
$5x + 3y + 4z = 43$ pour absorber le polluant $P_1$,
$3x + 4y + 2z = 29$ pour absorber le polluant $P_2$,
$2x + 4y + 3z = 27$ pour absorber le polluant $P_3$.
Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 43 \\ 3 & 4 & 2 & 29 \\ 2 & 4 & 3 & 27 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 5L_2 - 3L_1 \\ 5L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 43 \\ 0 & 11 & -2 & 16 \\ 0 & 14 & 7 & 49 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 11L_3 - 14L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 43 \\ 0 & 11 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 105 & 315 \end{array}\right)$$

La solution est (5; 2; 3). Il faut donc 5 litres de $T_1$, 2 litres de $T_2$, et 3 litres de $T_3$.

*b*) Pour cette nouvelle ubstance, les contraintes sont :
$5x + 3y + 4z = 58$ pour absorber le polluant $P_1$,
$3x + 4y + 2z = 50$ pour absorber le polluant $P_2$,
$2x + 4y + 3z = 54$ pour absorber le polluant $P_3$.
Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 58 \\ 3 & 4 & 2 & 50 \\ 2 & 4 & 3 & 54 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 5L_2 - 3L_1 \\ 5L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 58 \\ 0 & 11 & -2 & 76 \\ 0 & 14 & 7 & 154 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 11L_3 - 14L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 58 \\ 0 & 11 & -2 & 76 \\ 0 & 0 & 105 & 630 \end{array}\right)$$

La solution est (2; 8; 6). Il faut donc 5 litres de $T_1$, 2 litres de $T_2$, et 3 litres de $T_3$.

5. *a*) Soit $x$, le nombre de bureaux du modèle $M_1$,
$y$, le nombre de bureaux du modèle $M_2$,
et $z$, le nombre de bureaux du modèle $M_3$.
Les contraintes découlant des unités en réserve s'écrivent alors
$12x + 16y + 14z = 530$ pour le bois,
$1{,}5x + 2y + 1{,}8z = 66{,}9$ pour le contreplaqué,
$0{,}8x + 0{,}6y + 1{,}2z = 31{,}8$ pour l'aggloméré.
Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 14 & 530 \\ 1{,}5 & 2 & 1{,}8 & 66{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1{,}2 & 31{,}8 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/2 \\ 10L_2 \\ 5L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & 7 & 265 \\ 15 & 20 & 18 & 669 \\ 4 & 3 & 6 & 159 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 - 5L_1 \\ 3L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & 7 & 265 \\ 0 & 0 & 3 & 39 \\ 0 & -14 & 8 & -106 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & 7 & 265 \\ 0 & -14 & 8 & -106 \\ 0 & 0 & 3 & 39 \end{array}\right)$$

La solution est (9; 15; 13). Donc la compagnie peut fabriquer 9 bureaux du modèle $M_1$, 15 bureaux du modèle $M_2$ et 13 bureaux du modèle $M_3$.

*b*) La compagnie ayant en réserve les quantités nécessaires à la réalisation de neuf bureaux du modèle $M_1$, quinze bureaux du modèle $M_2$ et treize bureaux du modèle $M_3$, le nombre de bureaux qu'il manquera pour remplir cette commande est donné par la différence des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 29 \\ 55 \\ 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

La compagnie doit donc commander les matériaux pour réaliser vingt bureaux du modèle $M_1$, quarante bureaux du modèle $M_2$ et trente bureaux du modèle $M_3$. Les quantités de matériaux que la compagnie doit commander sont données par le produit de la matrice des contraintes et de la matrice formée par le nombre de bureaux de chaque modèle.

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 1{,}5 & 2 & 1{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1{,}2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 164 \\ 76 \end{pmatrix}$$

Il faut commander 1 300 unités de bois, 164 unités de contreplaqué et 76 unités d'aggloméré.

*c*) Les contraintes de temps s'écrivent:
$75x + 90y + 85z = 5\,010$ pour le sciage,
$45x + 50y + 65z = 3\,170$ pour l'assemblage,
$50x + 65y + 90z = 4\,050$ pour le sablage.
Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 75 & 90 & 85 & 5010 \\ 45 & 50 & 65 & 3170 \\ 50 & 65 & 90 & 4050 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/5 \\ L_2/5 \\ L_3/5 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 15 & 18 & 17 & 1002 \\ 9 & 10 & 13 & 634 \\ 10 & 13 & 18 & 810 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ 5L_2 - 3L_1 \\ 3L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 15 & 18 & 17 & 1002 \\ 0 & -4 & 14 & 164 \\ 0 & 3 & 20 & 426 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 4L_3 + 3L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 15 & 18 & 17 & 1002 \\ 0 & -4 & 14 & 164 \\ 0 & 0 & 122 & 2196 \end{array}\right)$$

La solution est (20; 22; 18). La compagnie peut donc produire vingt bureaux du modèle $M_1$, vingt-deux bureaux du modèle $M_2$ et dix-huit bureaux du modèle $M_3$ à chaque semaine.

6. *a*) On connaît la matrice donnant la proportion de chacune des substances dans les produits et le nombre de litres de chacun des produits. Par la multiplication des matrices, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207{,}5 \\ 50{,}0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix}$$

Le volume de ces substances dans le mélange sera 207,5 ml de $S_{aq}$, 50 ml de$S_{ac}$, et 17,5 de$A_{co}$.

On obtient la somme des volumes en litres par le produit suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 207{,}5 \\ 50{,}0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix} = (275)$

On a donc 275 litres du mélange. Pour trouver la proportion de chacune des substances dans le mélange, il faut multiplier par le scalaire 1/275 la matrice donnant le volume de chacune des substances. On obtient :

$$\frac{1}{275}\begin{pmatrix} 207{,}5 \\ 50{,}0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75454... \\ 0{,}18188... \\ 0{,}06363... \end{pmatrix}$$

Le mélange contient donc 75,5% de $S_{aq}$, 18,2% de $S_{ac}$, et 6,4% de $A_{co}$.
On veut avoir un mélange de 500 L contenant 75% de $S_{aq}$, 15% de $S_{ac}$ et 10% de $A_{co}$. On obtient le volume en litres de chacune des substances par la multiplication suivante :

$$500\begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}15 \\ 0{,}10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 75 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Le mélange de 500 L devra contenir 375 ml de $S_{aq}$, 75 ml de $S_{ac}$ et 50 ml de $A_{co}$.

Soit $x$, le nombre de ml du produit $P_1$,
$y$, le nombre de ml du produit $P_2$,
et $z$, le nombre de ml de la tourbe $P_3$.
Les contraintes sur le volume en litres des substances donnent :
$0{,}8x + 0{,}7y + 0{,}8z = 375$ pour la substance aqueuse, $S_{aq}$;
$0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}2z = 75$ pour la substance active, $S_{ac}$;
$0{,}1x + 0{,}1y + 0z = 27$ pour l'agent de conservation, $A_{co}$.
Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}8 & 375 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 75 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 50 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 10L_3 \\ 10L_2 \\ 10L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 50 \\ 1 & 2 & 2 & 75 \\ 8 & 7 & 8 & 3750 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 8L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 250 \\ 0 & -1 & 8 & -250 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 250 \\ 0 & 1 & 2 & 250 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3/10 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 250 \\ 0 & 1 & 2 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 + 2L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ L_3/10 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Le mélange contiendra 250 ml de $P_1$ et 250 ml de $P_2$.

7. *a*) L'analyse des unités nous indique qu'il faut transposer la matrice des temps d'opération pour répondre à la question. On trouve alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 75 & 40 & 75 \\ 65 & 60 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 & 180 & 260 \\ 395 & 300 & 420 \\ 510 & 400 & 530 \\ 650 & 500 & 685 \end{pmatrix}$$

Le tableau suivant donne le temps nécessaire pour chacune de opérations durant ces trois jours de production.

Temps nécessaire à chacune des opérations

| Opérations | Jours | | |
|---|---|---|---|
| | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ |
| Mélanger | 265 | 180 | 260 |
| Chauffer | 395 | 300 | 420 |
| Centrifuger | 510 | 400 | 530 |
| Refroidir | 650 | 500 | 685 |

On obtient le temps total de production pour chacune de ces journées par le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 265 & 180 & 260 \\ 395 & 300 & 420 \\ 510 & 400 & 530 \\ 650 & 500 & 685 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1820 & 1380 & 1895 \end{pmatrix}$$

On trouve 1850 min au jour 1, 1380 min au jour 2 et 1895 min au jour 3.

*c*) Soit $x$, le nombre de litres du produit $P_1$,
$y$, le nombre de litres du produit $P_2$,
et $z$, le nombre de litres du produit $P_3$.

Les contraintes sur le temps disponible donnent l'équation matricielle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$

Par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 100 \\ 1 & 2 & 3 & 100 \\ 2 & 2 & 4 & 100 \\ 2 & 3 & 5 & 100 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -100 \\ 0 & -1 & 3 & -50 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_4 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 3 & -50 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -100 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -50 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 2L_1 - 7L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/(-2) \\ L_3/2 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si on désire utiliser toutes les minutes, il faudrait produire uniquement 50 L du produit $P_2$.

8. En substituant (2; 2) à $(x; y)$ dans $y = ax^2 + bx + c$, on trouve: $4a + 2b + c = 2$.
En posant $(x; y) = (4; 4)$, on trouve $16a + 4b + c = 4$.
En posant $(x; y) = (6; 7)$, on trouve $36a + 6b + c = 7$.

En résolvant le système d'équations, on trouve $y = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{4} + 1$.

9. *a*) En augmentant la matrice des coefficient des deux matrices de constantes et en appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on onbtient :

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} 2 & 5 & 42 & 26\\ 3 & -4 & -19 & 16\end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1\\ 2L_2-3L_1\end{array}\left(\begin{array}{rr|r|r} 2 & 5 & 42 & 26\\ 0 & -23 & -164 & -46\end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l}23L_1+5L_2\\ L_2\end{array}\left(\begin{array}{rr|r|r} 46 & 0 & 146 & 368\\ 0 & -23 & -164 & -46\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1/46\\ L_2/(-23)\end{array}\left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 0 & 72/23 & 8\\ 0 & 1 & 164/23 & 2\end{array}\right)$$

La solution du premier système d'équations est (73/23; 164/23) et celle du deuxième est (8; 2).

*b*) En procédant de la même façon, on obtient :

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & -3 & -13 & -21\\ 2 & -5 & 4 & 32 & 10\\ 3 & 4 & -7 & -27 & -53\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1\\ L_2-2L_1\\ L_3-3L_1\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 2 & -3 & -13 & -21\\ 0 & -9 & 10 & 58 & 52\\ 0 & -2 & 2 & 12 & 10\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}9L_1+2L_2\\ L_2\\ 9L_3-2L_2\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r|r} 9 & 0 & -7 & -1 & -85\\ 0 & -9 & 10 & 58 & 52\\ 0 & 0 & -2 & -8 & -14\end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l}L_1\\ L_2\\ L_3/(-2)\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r|r} 9 & 0 & -7 & -1 & -85\\ 0 & -9 & 10 & 58 & 52\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1+7L_3\\ L_2-10L_3\\ L_3\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r|r} 9 & 0 & 0 & 27 & -36\\ 0 & -9 & 0 & 18 & -18\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1/9\\ L_2/(-9)\\ L_3\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 0 & 0 & 3 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7\end{array}\right)$$

La solution du premier système d'équations est (3; –2; 4) et celle du deuxième est (–4; 2; 7).

*c*) En procédant de la même façon, on obtient :

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -3 & 4 & -34 & 10\\ 2 & -5 & 3 & -34 & -10\\ 4 & -11 & 11 & -102 & 10\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1\\ L_2-2L_1\\ L_3-4L_1\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -3 & 4 & -34 & 10\\ 0 & 1 & -5 & 34 & -30\\ 0 & 1 & -5 & 34 & -30\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1+3L_2\\ L_2\\ L_3-L_2\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 0 & -11 & 68 & -80\\ 0 & 1 & -5 & 34 & -30\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

La solution du premier système d'équations est :
$\{(x; y; z) \mid x = 11\,t + 68,\ y = 5\,t + 34 \text{ et } z = t\}$.
Celle du second système est :
$\{(x; y; z) \mid x = 11\,t - 80,\ y = 5\,t + 30 \text{ et } z = t\}$.

10. *a*) La matrice associée au système d'équations est $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & 1 & a & 5\end{array}\right)$

En échelonnant, on trouve :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & 1 & a & 5\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1\\ L_2-2L_1\\ L_3-3L_1\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 2\\ 0 & -1-2a & 5 & -1\\ 0 & 1-3a & a+3 & -1\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1\\ L_2\\ (-1-2a)L_3-(1-3a)L_2\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 2\\ 0 & -1-2a & 5 & -1\\ 0 & 0 & 2a^2-8a+8 & a-2\end{array}\right)$$

En décomposant en facteurs, on obtient : $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 2\\ 0 & -1-2a & 5 & -1\\ 0 & 0 & 2(a-2)^2 & a-2\end{array}\right)$

Si $a = 2$, la dernière ligne s'annule complètement et le système a une infinité de solutions car il y a une variable libre.
Si $a \neq 2$, on a une solution unique car il reste trois équations pour trois inconnues dans la matrice échelonnée. Il n'y a pas de valeur de $a$ pour laquelle le système n'a aucune solution.

*b*) En échelonnant, on trouve :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & a & 3\\ 3 & a & 2 & 17\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1\\ L_2-2L_1\\ L_3-3L_1\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 2\\ 0 & -5 & a-2 & -1\\ 0 & a-6 & -1 & 5\end{array}\right) \approx \begin{array}{l}L_1\\ L_2\\ -5L_3-(a-6)L_2\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -5 & a-2 & -5\\ 0 & 0 & a^2-8a+7 & 5(11-a)\end{array}\right)$$

En décomposant en facteurs, on obtient : $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -5 & a-2 & -5\\ 0 & 0 & (a-7)(a-1) & 5(11-a)\end{array}\right)$

Le système n'a pas de solution si $a = 1$ ou $a = 7$. Le système a une solution unique si $a \neq 1$ et $a \neq 7$. Il n'y a pas de valeur de $a$ pour laquelle le système a une infinité de solutions.

11. *a*) En résolvant par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c+2b-5a \end{array}\right)$$

La matrice échelonnée indique que le système admet des solutions seulement lorsque $c + 2b - 5a = 0$.

*b*) En résolvant par la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -1 & 2 & b \\ 1 & -5 & 8 & c \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b-3a \\ 0 & -7 & 11 & c-a \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+2a \end{array}\right)$$

La matrice échelonnée indique que le système admet des solutions seulement lorsque $c - b + 2a = 0$.

12. *a*) $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 9000 \\ 18000 \end{pmatrix}$, soit 9 kg d'arachides, 9 kg de raisins et 18 kg de noix de cajou.

*b*) $(0{,}10 \quad 0{,}04 \quad 0{,}16) \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = (0{,}72 \quad 0{,}69 \quad 0{,}66)$

*c*) $(0{,}72 \quad 0{,}69 \quad 0{,}66) + (0{,}18 \quad 0{,}18 \quad 0{,}18) = (0{,}90 \quad 0{,}87 \quad 0{,}84)$

*d*) $1{,}8 \times (0{,}90 \quad 0{,}87 \quad 0{,}84) = (1{,}62 \quad 1{,}57 \quad 1{,}51)$

*e*) La matrice augmentée est: $\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 15 & 10 & 6000 \\ 10 & 15 & 20 & 6000 \\ 30 & 30 & 30 & 12000 \end{array}\right)$. En résolvant, on obtient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1200 \\ 0 & 1 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Il y a une variable libre, c'est le nombre de mélanges Croc. En posant $z = t$, on a :

$$\{(x; y; z) \mid x = t,\ y = 400 - 2t \text{ et } z = t\}$$

Le marchand a le choix parmi différentes possibilités dont certaines sont énumérées dans le tableau ci-contre.

*f*) Les coûts pour 10 g de chaque ingrédient sont donnés par la matrice $(0{,}10 \quad 0{,}04 \quad 0{,}26)$. La matrice du coût des matières premières de chaque type de mélange est alors

$$(0{,}10 \quad 0{,}04 \quad 0{,}26) \bullet \begin{pmatrix} 4 & 2{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1{,}5 & 2 \end{pmatrix} = (0{,}70 \quad 0{,}72 \quad 0{,}80)$$

La matrice des coûts totaux est alors $(0{,}70 \quad 0{,}72 \quad 0{,}80) + (0{,}18 \quad 0{,}18 \quad 0{,}18) = (0{,}88 \quad 0{,}90 \quad 0{,}98)$

Matrice des prix: $1{,}8 \times (0{,}88 \quad 0{,}90 \quad 0{,}98) = (1{,}58 \quad 1{,}62 \quad 1{,}76)$

*g*) $\begin{pmatrix} 40 & 25 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8500 \\ 5000 \\ 4500 \end{pmatrix}$, soit 8,5 kg d'arachides, 5 kg de raisins et 4,5 kg de noix de cajou.

## EXERCICES 11.4

1. *a*) En posant $xH_3PO_4 + yCa \rightarrow zCa_3P_2O_8 + uH_2$ et en établissant les équations, on obtient :

$3x = 2u$, pour H;
$x = 2z$, pour P;
$4x = 8z$, pour O;
$y = 3z$, pour Ca;

D'où
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_2 \\ L_4 \\ L_1 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\approx \begin{array}{l} 3L_1 + L_3 \\ 2L_2 + L_3 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/3 \\ L_2/2 \\ L_3/6 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a une variable libre, $u$, et trois variables liées. En posant $u = s$, l'ensemble solution est :

$\{(x; y; z; u) \mid x = 2s/3;\ y = s;\ z = s/3 \text{ et } u = s\}$

Pour obtenir les plus petites valeurs entières possibles, il faut poser $s = 3$. On obtient alors la solution particulière (2; 3; 1; 3). Ce qui donne l'équation équilibrée :

$$2H_3PO_4 + 3Ca \rightarrow Ca_3P_2O_8 + 3H_2$$

*b*) En posant $xFe_2O_3 + yHCl \rightarrow zFeCl_3 + uH_2O$ et en établissant les équations, on obtient :

$2x = z$, pour Fe;
$3x = u$, pour O;
$y = 2u$, pour H;
$y = 3z$, pour Cl;

D'où
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 3L_1 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 + L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/6 \\ L_2 \\ L_3/3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a une variable libre, $u$, et trois variables liées. En posant $u = s$, l'ensemble solution est :

$\{(x; y; z; u) \mid x = s/3;\ y = 2s;\ z = 2s/3 \text{ et } u = s\}$

Pour obtenir les plus petites valeurs entières possibles, il faut poser $s = 3$. On obtient alors la solution particulière (1; 6; 2; 3). Ce qui donne l'équation équilibrée :

$$Fe_2O_3 + 6HCl \rightarrow 2FeCl_3 + 3H_2O$$

*c*) En posant $xCH_4 + yO_2 \rightarrow zCO_2 + uH_2O$ et en établissant les équations, on obtient :

$x = z$, pour C;
$4x = 2u$, pour H;
$2y = 2z + u$, pour O;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

D'où
$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3/2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 2L_1 + L_3 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/2 \\ L_3/2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a une variable libre, $u$, et trois variables liées. En posant $u = s$, l'ensemble solution est :

$\{(x; y; z; u) \mid x = s/2;\ y = s;\ z = s/2 \text{ et } u = s\}$

Pour obtenir les plus petites valeurs entières possibles, il faut poser $s = 2$. On obtient alors la solution particulière (1; 2; 1; 2). Ce qui donne l'équation équilibrée :

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

*d*) En posant $x\mathrm{Al} + y\mathrm{H_2SO_4} \rightarrow z\mathrm{Al_2(SO_4)_3} + u\mathrm{H_2}$ et en établissant les équations, on obtient :
$x = 2z$, pour Al;
$2y = 2u$ ou $y = u$, pour H;
$y = 3z$, pour S;
$4y = 12z$ ou $y = 3z$, pour O;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

D'où

$$\approx \begin{array}{l} 3L_1 - 2L_3 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/3 \\ L_2 \\ L_3/(-3) \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a une variable libre, $u$, et trois variables liées. En posant $u = s$, l'ensemble solution est :
$\{(x; y; z; u) \mid x = 2s/3,\ y = s,\ z = s/3 \text{ et } u = s\}$
Pour obtenir les plus petites valeurs entières possibles, il faut poser $s = 3$. On obtient alors la solution particulière (2; 3; 1; 3). Ce qui donne l'équation équilibrée

$$2\mathrm{Al} + 3\mathrm{H_2SO_4} \rightarrow \mathrm{Al_2(SO_4)_3} + 3\mathrm{H_2}$$

2. *a*) Les équations sont obtenues en substituant à $x$ et à $y$ dans l'équation les valeurs de couples $(x; y)$ donnés :
$D + 3E + F = -10$
$3D + 4E + F = -25$
$2D + 6E + F = -40$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -10 \\ 3 & 4 & 1 & -25 \\ 2 & 6 & 1 & -40 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -10 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 5L_1 + 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & -35 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/5 \\ L_2/(-5) \\ L_3/(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

L'équation cherchée est donc $x^2 + y^2 - 3x - 9y + 20 = 0$.

*b*) Les équations sont :
$2D + 4E + F = -20$
$4D - 1E + F = -17$
$4D + 8E + F = -80$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & -20 \\ 4 & -1 & 1 & -17 \\ 4 & 8 & 1 & -80 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & -20 \\ 0 & -9 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & -40 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 9L_1 + 4L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 0 & 5 & -88 \\ 0 & -9 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & -40 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 + 5L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 0 & 0 & -288 \\ 0 & -9 & 0 & 63 \\ 0 & 0 & -1 & -40 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/18 \\ L_2/(-9) \\ L_3/(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

L'équation cherchée est donc $x^2 + y^2 - 16x - 7y + 40 = 0$.

3. *a*) Vecteur probabilité, tous les éléments sont positifs et leur somme est 1.
   *b*) N'est pas un vecteur probabilité, la somme des éléments est différente de 1.
   *c*) N'est pas un vecteur probabilité, un des éléments est négatif.
   *d*) Vecteur probabilité, tous les éléments sont positifs et leur somme est 1.

4. Une matrice de transition est une matrice carrée dont les éléments sont non négatifs et telle que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Les matrices de transition sont donc *a* et *d*.

5. *a*) $(0,4 \quad 0,6)\bullet\begin{pmatrix}0,3 & 0,7\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}=(0,36 \quad 0,64)$. Le produit $A$ aura 36 % du marché et le produit $B$ 64 %.

*b*) On doit résoudre le système d'équations linéaires : $\begin{cases} t_1+t_2=1\\ -0,7t_1+0,4t_2=0\end{cases}$

En résolvant par la méthode de Gauss-Jordan, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1} & 1 & 1\\ -0,7 & 0,4 & 0\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1\\10L_2+7L_1\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 0 & \boxed{11} & 4\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}11L_1-L_2\\L_2\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}11 & 0 & 7\\ 0 & 11 & 4\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1/11\\L_2/11\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}11 & 0 & 7\\ 0 & 11 & 4\end{array}\right)$$

La répartition à long terme est donnée par le vecteur probabilité (4/11  7/11) = (0,3636  0,6364). À long terme, le produit $A$ va s'accaparer 36,36 % du marché et le produit $B$ 63,64 % du marché.

6. $A^2=\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,28 & 0,72\\0,24 & 0,76\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0,28 & 0,72\\0,24 & 0,76\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,256 & 0,744\\0,248 & 0,752\end{pmatrix}$

Ce sont des matrices de transition car elles sont carrées, elles n'ont pas d'éléments négatifs et la somme des éléments de chaque ligne est 1.

7. $A^2=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2 & 0,6\\0,1 & 0,5 & 0,4\\0,4 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0,2 & 0,2 & 0,6\\0,1 & 0,5 & 0,4\\0,4 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,32 & 0,38\\0,23 & 0,39 & 0,38\\0,23 & 0,32 & 0,45\end{pmatrix}$ et

$A^3=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2 & 0,6\\0,1 & 0,5 & 0,4\\0,4 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0,3 & 0,32 & 0,38\\0,23 & 0,39 & 0,38\\0,23 & 0,32 & 0,45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,244 & 0,334 & 0,422\\0,237 & 0,355 & 0,408\\0,258 & 0,341 & 0,401\end{pmatrix}$.

Ce sont des matrices de transition, car elles sont carrées, elles n'ont pas d'éléments négatifs et la somme des éléments de chaque ligne est 1.

8. *a*) Le produit matriciel donne : $(0,45 \quad 0,15 \quad 0,4)\bullet\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0,5 & 0,5 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}=(0,525 \quad 0,474 \quad 0)$

Après un croisement, la répartition des porcs devrait être donnée par le vecteur de distribution suivant :

(0,525; 0,475; 0)

*b*) $P-I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0,5 & 0,5 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0,5 & -0,5 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $(P-I)^t=\begin{pmatrix}0 & 0,5 & 0\\0 & -0,5 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

En substituant à la première équation celle de la contrainte et en construisant la matrice augmentée, on obtient :

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\0 & -0,5 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

En résolvant par Gauss-Jordan, on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\0 & \boxed{-0,5} & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1+2L_2\\L_2\\L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 1\\0 & -0,5 & 1 & 0\\0 & 0 & \boxed{-1} & 0\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1+2L_3\\L_2+L_3\\L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & -0,5 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)\approx\begin{array}{r}L_1\\-2L_2\\-L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Si les croisements se font toujours avec un porc ayant le génotype dominant, l'état stable de la reproduction de ces porcs est donné par le vecteur :

(1; 0; 0)

En fait, à long terme, tous les porcs auraient le génotype *AA*. On dit que cet état est absorbant. On dit également qu'il est un attracteur dans ce système dynamique.

*c*) $P-I=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & 0\\0,25 & 0,5 & 0,25\\0 & 0,5 & 0,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,5 & 0,5 & 0\\0,25 & -0,5 & 0,25\\0 & 0,5 & -0,5\end{pmatrix}$, $(P-I)^t=\begin{pmatrix}-0,5 & 0,25 & 0\\0,5 & -0,5 & 0,5\\0 & 0,25 & -0,5\end{pmatrix}$

En substituant à la première équation celle de la contrainte et en construisant la matrice augmentée, on obtient :

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0\\ 0 & 0,25 & -0,5 & 0\end{array}\right)$$

En résolvant par Gauss-Jordan, on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0\\ 0 & 0,25 & -0,5 & 0\end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1\\ 2L_2-L_1\\ L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0,25 & -0,5 & 0\end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 2L_1+L_2\\ L_2\\ 8L_3+L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -4 & -1\end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 2L_1+L_3\\ L_2\\ -L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -4 & -1\end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/4\\ L_2/(-2)\\ L_3/(-4)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,25\\ 0 & 1 & 0 & 0,5\\ 0 & 0 & 1 & 0,25\end{array}\right)$$

Si les croisements se font toujours avec un porc ayant le génotype hybride, à long terme le troupeau sera constitué à 25 % du génotype dominant, 50 % du génotype hybride et à 25 % de récessif.

9. *a*) La matrice de transition est $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$

Après un changement d'état, le vexcteur probabilité est $(1\quad 0\quad 0\quad 0)\bullet\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}=(0\quad 1\quad 0\quad 0).$

Après deux changements d'état, on a : $(0\quad 1\quad 0\quad 0)\bullet\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}=(1/3\quad 0\quad 1/3\quad 1/3).$

Après trois changements d'état, on a : $(1/3\quad 0\quad 1/3\quad 1/3)\bullet\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}=(0\quad 2/3\quad 1/6\quad 1/6)$

Il est impossible que la souris soit dans le compartiment 1 après trois périodes, sauf si elle y fait un infarctus en entendant la sonnerie lors d'une de ses visites précédentes.

*b*) La matrice sont $P-I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & -1 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1\end{pmatrix},$

et $(P-I)^{t}=\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/3 & -1 & 1/2\\ 0 & 1/3 & 1/2 & -1\end{pmatrix}$

Pour trouver le point invariant il faut résoudre le système d'équations dont la matrice augmentée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/3 & -1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/3 & 1/2 & -1 & 0\end{array}\right)$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 \\ 6L_3 \\ 6L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ 6L_3 \\ 6L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 4L_1+L_2 \\ L_2 \\ 2L_3+L_2 \\ 2L_4+L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -13 & -2 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 13L_1+3L_3 \\ 13L_2-L_3 \\ L_3 \\ 13L_4+5L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 52 & 0 & 0 & 54 & 20 \\ 0 & -52 & 0 & -18 & -24 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -144 & -36 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/(-2) \\ L_3 \\ L_4/(-36) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 26 & 0 & 0 & 27 & 10 \\ 0 & 26 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 4L_1-27L_4 \\ 4L_2-9L_4 \\ 4L_3-5L_4 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 104 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 104 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & -52 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/104 \\ L_2/104 \\ L_3/(-52) \\ L_4/4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 13/104 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 39/104 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13/52 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Le point invariant est :(13/104   39/04   26/104   26/104) = (0,1250   0,3750   0,2499   0,2499). À long terme, la souris devrait être dans la case A 12,5% des fois, dans la case B 37,5%, dans la case C 24,9% et dans la case D 24,9% des fois.

10. $P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

11. *a*) $P - I = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}$ et $(P-I)^{t} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}$

En substituant à la première équation celle de la contrainte $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ et en construisant la matrice augmentée, on obtient :

$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 & 0 \end{array}\right)$. En résolvant par Gauss-Jordan, on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2-L_1 \\ 10L_3-L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 3L_1+L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1+L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/3 \\ L_2/(-3) \\ L_3/(-3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -3 & 1/3 \end{array}\right)$$

L'état stable est décrit par le vecteur probabilité (1/3   1/3   1/3). Chaque sorte de détergent prendra le tiers du marché.

*b*) $P - I = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,05 & -0,6 & 0,55 \\ 0,05 & 0,05 & -0,1 \end{pmatrix}$ et $(P-I)^{t} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,05 & 0,05 \\ 0,1 & -0,6 & 0,05 \\ 0,3 & 0,55 & -0,1 \end{pmatrix}$

En substituant à la première équation celle de la contrainte $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ et en construisant la matrice augmentée, on obtient :

$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,6 & 0,05 & 0 \\ 0,3 & 0,55 & -0,1 & 0 \end{array}\right)$. En résolvant par Gauss-Jordan, on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,6 & 0,05 & 0 \\ 0,3 & 0,55 & -0,1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2 - L_1 \\ 10L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -0,5 & -1 \\ 0 & 2,5 & -4 & -3 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 \\ 2L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & -6 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 14L_1 + L_2 \\ L_2 \\ 14L_3 + 5L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 13 & 12 \\ 0 & -14 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -117 & -94 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 117L_1 + 13L_3 \\ 117L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1638 & 0 & 0 & 182 \\ 0 & -1638 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & -117 & -94 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/1638 \\ L_2/(-1638) \\ L_3/(-117) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,11111... \\ 0 & 1 & 0 & 0,08547... \\ 0 & 0 & 1 & 0,80341... \end{array}\right)$$

L'état stable est décrit par le vecteur probabilité (0,1111 0,0855 0,8034). Les détergents *A*, *B* et *C* prendront respectivement 11,11%, 8,55% et 80,34% du marché.

12. $P - I = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & -0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & -0,7 \end{pmatrix}, \ (P - I)^t = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & -0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & -0,7 \end{pmatrix}$

En substituant à la première équation celle de la contrainte et en construisant la matrice augmentée, on obtient :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,2 & -0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & -0,7 & 0 \end{array}\right)$$

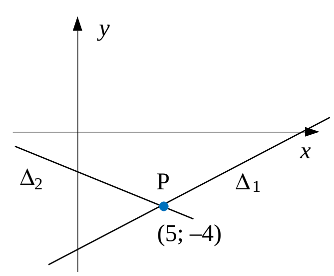
En résolvant par Gauss-Jordan, on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,2 & -0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & -0,7 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2 - 2L_1 \\ 10L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & -3 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 7L_1 + L_2 \\ L_2 \\ 7L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -72 & -17 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 9L_1 + L_3 \\ 72L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 63 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & -504 & 0 & -161 \\ 0 & 0 & -72 & -17 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/63 \\ L_2/(-504) \\ L_3/(-72) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,4444... \\ 0 & 1 & 0 & 0,3194... \\ 0 & 0 & 1 & 0,2361... \end{array}\right)$$

La répartition à long terme est donnée par le vecteur probabilité (0,4444 0,3194 0,2361). Les chaînes *A*, *B* et *C* détiendront respectivement 44,44%, 31,94% et 23,61% du marché.

13. *a*) Les vecteurs normaux sont $\vec{N}_1 = (3; -5)$ et $\vec{N}_2 = (2; 6)$. Ces vecteurs ne sont pas parallèles. Par conséquent, les droites sont concourantes. En résolvant le système d'équations, on trouve :

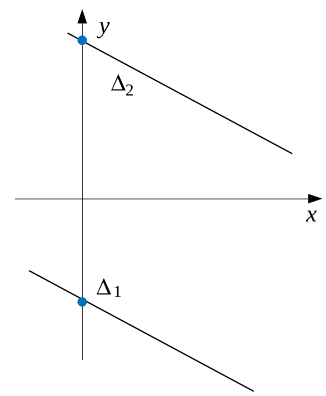



$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 35 \\ 2 & 6 & -14 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 3L_2 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 35 \\ 0 & 28 & -112 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/28 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 35 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

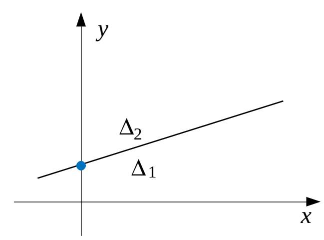
$$\approx \begin{array}{l} L_1 + 5L_2 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Les droites sont concourantes au point (5; –4).

*b*) Les vecteurs normaux sont $\vec{N}_1 = (2; 4)$ et $\vec{N}_2 = (1; 2)$. Ces vecteurs sont parallèles. Par conséquent, les droites sont parallèles. Déterminons si elles sont confondues ou distinctes. En posant $x = 0$ dans l'équation de la droite $\Delta_1$, on obtient $y = –6$. Cependant, en posant $x = 0$ dans l'équation de $\Delta_2$, on obtient $y = 9$. Par conséquent, les droites n'ont pas la même ordonnée à l'origine, elles sont donc distinctes.




*c*) Les vecteurs normaux sont $\vec{N}_1 = (2; –6)$ et $\vec{N}_2 = (–1; 3)$. Ces vecteurs sont parallèles. Par conséquent, les droites sont parallèles. Déterminons si elles sont confondues ou distinctes. En posant $x = 0$ dans l'équation de la droite $\Delta_1$, on obtient $y = 2$. Aussi, en posant $x = 0$ dans l'équation de $\Delta_2$, on obtient $y = 2$. Par conséquent les droites ont la même ordonnée à l'origine, elles sont donc confondues.




*d*) Le vecteur $\vec{N}_1 = (4; –1)$ est normal à $\Delta_1$ et $\vec{D}_2 = (–5; 3)$ est un vecteur directeur de $\Delta_2$. Le produit scalaire donne :

$\vec{N}_1 \bullet \vec{D}_2 = (4; –1) \bullet (–5; 3) = –20 – 3 = –23 \neq 0$

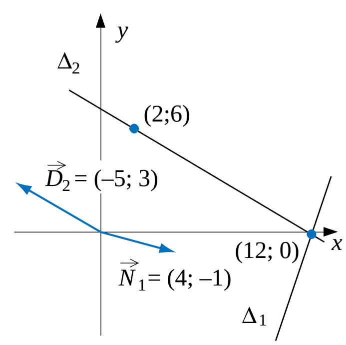
Par conséquent, les vecteurs ne sont pas perpendiculaires, ce qui signifie que les droites sont concourantes. Pour trouver les coordonnées du point de rencontre, on peut substituer les équations paramétriques de $\Delta_2$ dans l'équation de $\Delta_1$, ce qui donne :

$4(2 – 5t) – (6 + 3t) – 48 = 0$

$8 – 20t – 6 – 3t – 48 = 0$

$–23t = 46$ et $t = –46/23 = –2$

Les coordonnées du point de rencontre sont alors obtenues en posant $t = –2$ dans les équations paramétriques de $\Delta_2$, ce qui donne $x = 12$ et $y = 0$. Les droites sont donc concourantes au point (12; 0).

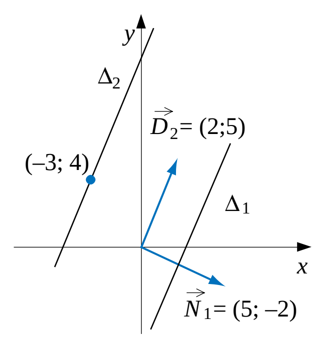



*e*) Le vecteur $\vec{N}_1 = (5; –2)$ est normal à $\Delta_1$ et $\vec{D}_2 = (2; 5)$ est un vecteur directeur de $\Delta_2$. Le produit scalaire donne :

$\vec{N}_1 \bullet \vec{D}_2 = (5; –2) \bullet (2; 5) = 10 – 10 = 0$

Par conséquent, les vecteurs sont perpendiculaires, ce qui signifie que les droites sont parallèles. Déterminons si elles sont confondues ou distinctes. Le point (–3; 4) est sur la droite $\Delta_2$. En substituant ces coordonnées dans l'équation de $\Delta_1$, on obtient :

$5 \times (–3) – 2 \times (4) – 11 = –34 \neq 0$. Par conséquent, les coordonnées du point (–3; 4) ne satisfont pas à l'équation de la droite $\Delta_1$. Les droites sont donc parallèles et distinctes.

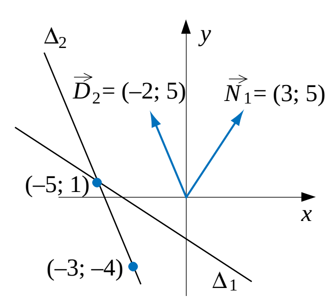



*f*) Le vecteur $\vec{N}_1 = (3; 5)$ est normal à $\Delta_1$ et $\vec{D}_2 = (–2; 5)$ est un vecteur directeur de $\Delta_2$. Le produit scalaire donne :

$\vec{N}_1 \bullet \vec{D}_2 = (3; 5) \bullet (–2; 5) = –6 + 25 = 19 \neq 0$.

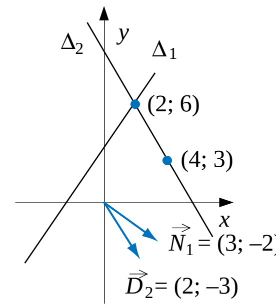
Par conséquent, les vecteurs ne sont pas perpendiculaires ce qui signifie que les droites sont concourantes. En déterminant les équations paramétriques de $\Delta_2$, on a :

$$\Delta\text{:} \begin{cases} x = –3 – 2t \\ y = –4t + 5 \end{cases}$$



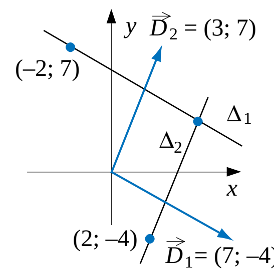
En substituant ces coordonnées dans l'équation de $\Delta_1$, on obtient :
$3(-3-2t)+5(-4+5t)+10=0$
$-9-6t-20+25t+10=0$
$19t=19$ et $t=1$.
Les coordonnées du point de rencontre sont alors obtenues en posant $t=1$ dans les équations paramétriques de $\Delta_2$, ce qui donne $x=-5$ et $y=1$. Les droites sont donc concourantes au point $(-5; 1)$.

*g*) Le vecteur $\vec{N}_1=(3;-2)$ est normal à $\Delta_1$ et $\vec{D}_2=(2;-3)$ est un vecteur directeur de $\Delta_2$. Le produit scalaire donne :
$\vec{N}_1 \bullet \vec{D}_2=(3;-2)\bullet(2;-3)=6+6=12\neq 0$
Par conséquent, les vecteurs ne sont pas perpendiculaires, ce qui signifie que les droites sont concourantes.




En substituant les équations paramétriques de $\Delta_2$, dans l'équation de $\Delta_1$, on obtient :
$3(4+2t)-2(3-3t)+6=0$
$12+6t-6+6t+6=0$
$12t=-12$ et $t=-1$.
Les coordonnées du point de rencontre sont alors obtenues en posant $t=-1$ dans les équations paramétriques de $\Delta_2$, ce qui donne $x=2$ et $y=6$. Les droites sont donc concourantes au point (2;6).

*h*) Le vecteur $\vec{D}_1=(7;-4)$ est un vecteur directeur de $\Delta_1$ et $\vec{D}_2=(3;7)$ est un vecteur directeur de $\Delta_2$. Les vecteurs ne sont pas parallèles. Les droites sont donc concourantes.
Les droites se rencontrent lorsque les variables sont égales, ce qui donne :



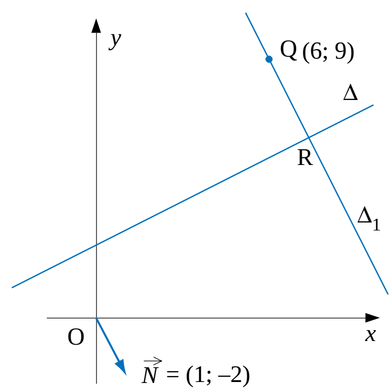

$\begin{cases} x=-2+7t=2+6u \\ y=7-4t=-4+14u \end{cases}$. On a donc : $\begin{cases} 7t-6u=4 \\ 4t+14u=11 \end{cases}$

En résolvant, on trouve :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -6 & 4 \\ 4 & 14 & 11 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 7L_2-4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -6 & 4 \\ 0 & 122 & 61 \end{array}\right)$$
$$\approx \begin{array}{l} 61L_1+3L_2 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 427 & 0 & 427 \\ 0 & 122 & 61 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/427 \\ L_2/122 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

En posant $t=1$ dans les équations paramétriques de $\Delta_1$, on obtient $x=5$ et $y=3$.
En posant $u=1/2$ dans les équations paramétriques de $\Delta_2$, on obtient également $x=5$ et $y=3$.
Les droites se rencontrent donc au point (5; 3) puisque celui-ci est sur les deux droites concourantes.

14 . *a*) Le point cherché est le pied R de la perpendiculaire abaissée du point Q sur la droite $\Delta$. La direction de $\overrightarrow{QR}$ est la même que celle du vecteur normal à la droite, $\vec{N}=(1;-2)$. On peut donc trouver une description paranétrique de la perpendiculaire à $\Delta$ passant par Q. On obtient :




$\Delta_1 : \begin{cases} x=6+t \\ y=9-2t \end{cases}$

On peut déterminer le point de rencontre des deux droites en substituant les équations paramétriques de $\Delta_1$ dans l'équation cartésienne de $\Delta$. On trouve alors :

$$(6+t)-2(9-2t)+5=0$$
$$6+t-18+4t+5=0$$
$$5t=7 \text{ et } t=7/5$$

En substituant dans les équations paramétriques de $\Delta_1$, on obtient :

$R : \begin{cases} x=6+\dfrac{7}{5}=\dfrac{37}{5} \\ y=9-2\times\dfrac{7}{5}=\dfrac{31}{5} \end{cases}$. Le point est R(37/5; 31/5).

*b*) Le point cherché est le pied R de la perpendiculaire abaissée du point Q sur la droite $\Delta$. La direction de $\overrightarrow{QR}$ est la même que celle du vecteur normal à la droite, $\vec{N}$ = (2; –3). On peut donc trouver une description paranétrique de la perpendiculaire à $\Delta$ passant par Q. On obtient :

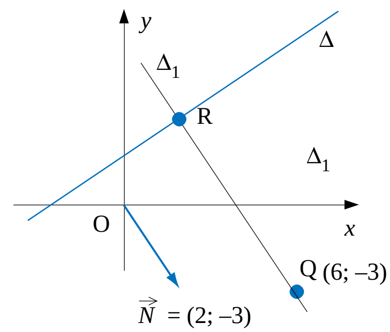
$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$$

On peut déterminer le point de rencontre des deux droites en substituant les équations paramétriques de $\Delta_1$ dans l'équation cartésienne de $\Delta$. On trouve alors :

$$2(6 + 2t) - 3(-3 - 3t) + 5 = 0$$
$$12 + 4t + 9 + 9t + 5 = 0$$
$$13t = -26 \text{ et } t = -2$$

En substituant dans les équations paramétriques de $\Delta_1$, on obtient :

$$\text{R} : \begin{cases} x = 6 + 2 \times -2 = 2 \\ y = -3 - 3 \times -2 = 3 \end{cases}$$. Le point est R(2; 3).




*c*) Le point cherché est le pied R de la perpendiculaire abaissée du point Q sur la droite $\Delta$. La direction de la droite passant par Q et R est perpendiculaire au vecteur directeur de la droite, $\vec{D}$ = (1; 4). On peut donc trouver une équation cartésienne de $\Delta_1$. On obtient :

$(x + 3; y - 7) \bullet (1; 4) = 0$ et cela donne :

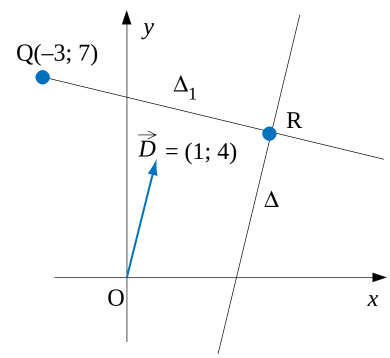
$x + 4y - 25 = 0$

On peut déterminer le point de rencontre des deux droites en substituant les équations paramétriques de $\Delta$ dans l'équation cartésienne de $\Delta_1$. On trouve alors :

$$(4 + t) + 4(1 + 4t) - 25 = 0$$
$$4 + t + 4 + 16t - 25 = 0$$
$$17t = 17 \text{ et } t = 1$$

En substituant dans les équations paramétriques de $\Delta_1$, on obtient :

$$\text{R} : \begin{cases} x = 4 + 1 = 5 \\ y = 1 + 4 = 5 \end{cases}$$. Le point est R(5; 5).




*d*) Le point cherché est le pied R de la perpendiculaire abaissée du point Q sur la droite $\Delta$. La direction de la droite passant par Q et R est perpendiculaire au vecteur directeur de la droite, $\vec{D}$ = (1; –1). On peut donc trouver une équation cartésienne de $\Delta_1$. On obtient :

$(x - 9; y - 6) \bullet (1; -1) = 0$ et cela donne :

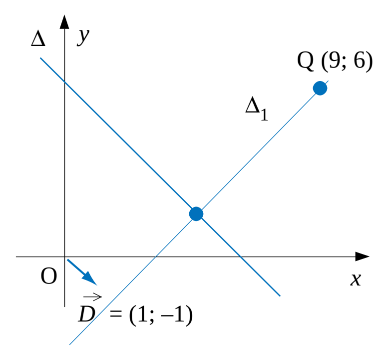
$x - y - 3 = 0$

On peut déterminer le point de rencontre des deux droites en substituant les équations paramétriques de $\Delta$ dans l'équation cartésienne de $\Delta_1$. On trouve alors :

$$(1 + t) - (5 - t) - 3 = 0$$
$$1 + t - 5 + t - 3 = 0$$
$$2t = 7 \text{ et } t = 7/2$$

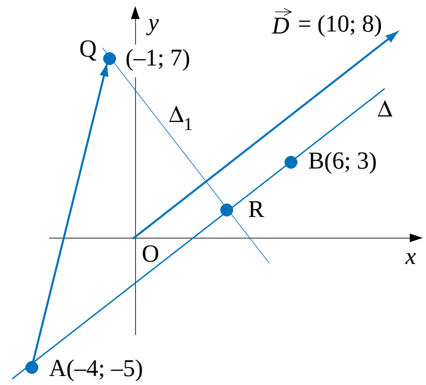
En substituant dans les équations paramétriques de $\Delta_1$, on obtient :

$$\text{R} : \begin{cases} x = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} \\ y = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$. Le point est R(9/2; 3/2).



*e*) Le vecteur $\overrightarrow{AB} = (6;\ 3) - (-4;\ -5) = (10;\ 8)$ est un vecteur directeur de $\Delta$ dont une decription paramétrique est :

$$\Delta: \begin{cases} x = 6 + 10t \\ y = 3 + 8t \end{cases}$$




De plus, $\overrightarrow{AB}$ est normal à la droite $\Delta_1$ abaissée perpendiculairement du point Q sur la droite $\Delta$. On peut donc déterminer une équation cartésienne de $\Delta_1$. On obtient :

$(x + 1;\ y - 7) \bullet (10;\ 8) = 0$ et cela donne :

$10x + 8y - 46 = 0$

On peut déterminer le point de rencontre des deux droites en substituant les équations paramétriques de $\Delta$ dans l'équation cartésienne de $\Delta_1$. On trouve alors :

$$10(6 + 10t) + 8(3 + 8t) - 46 = 0$$
$$60 + 100t + 24 + 64t - 46 = 0$$
$$164t = -38 \text{ et } t = -19/82$$

En substituant dans les équations paramétriques de $\Delta_1$, on obtient :

$$R: \begin{cases} x = 6 + 10 \times \dfrac{-19}{82} = \dfrac{151}{41} \\ y = 3 + 8 \times \dfrac{-19}{82} = \dfrac{47}{41} \end{cases}$$ . Le point est R(151/41; 47/41).

15. *a*) Le point de rencontre de la droite et du plan est obtenu en résolvant le système d'équations linéaires :

$$\Delta: \begin{cases} 3x - 2y + z - 12 = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 27 = 0 \\ 4x - 2y - 7z + 18 = 0 \end{cases}$$ . Ce qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 12 \\ 2 & -3 & 5 & 27 \\ 4 & -2 & -7 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ \approx 3L_2 - 2L_1 \\ 3L_3 - 4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 13 & 57 \\ 0 & 2 & -25 & -102 \end{array}\right) \begin{array}{c} -5L_1 + 2L_2 \\ \approx L_2 \\ 5L_3 + 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -15 & 0 & 21 & 54 \\ 0 & -5 & 13 & 57 \\ 0 & 0 & -99 & -396 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \approx L_2 \\ L_3/(-99) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -15 & 0 & 21 & 54 \\ 0 & -5 & 13 & 57 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 - 21L_3 \\ \approx L_2 - 13L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -15 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1/(-15) \\ \approx L_2/(-5) \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Le point de rencontre est donc (2; –1; 4).

*b*) Le point de rencontre de la droite et du plan est obtenu en substituant les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan. Il suffit ensuite de résoudre pour trouver la valeur du paramètre au point d'intersection.

$2(4 - 3t) + 3(-5 + 4t) + 4(-3 + 4t) - 25 = 0$, ce qui donne :

$8 - 6t - 15 + 12t - 12 + 16t - 25 = 0$

$22t - 44 = 0$ et $t = 2$. En substituant dans les équations paramétriques, on trouve alors $\begin{cases} x = 4 - 3 \times 2 = -2 \\ y = -5 + 4 \times 2 = 3 \\ z = -3 + 4 \times 2 = 5 \end{cases}$

Le point de rencontre est donc (–2; 3; 5).

16. *a*) Les vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{D}_1 = (1;\ 2;\ -3)$ et $\vec{D}_2 = (-2;\ -4;\ 6)$. Ces vecteurs sont parallèles puisqu'il existe un scalaire $k$ tel que $k\vec{D}_1 = \vec{D}_2$. En effet, $-2\vec{D}_1 = \vec{D}_2$. Les vecteurs directeurs étant parallèles, les droites le sont également. Elles peuvent donc être parallèles distinctes ou confondues. Pour être confondues, elles doivent avoir un point commun. Il suffit de vérifier si un point d'une des droites est sur l'autre droite pour s'en assurer. En posant $t = 0$ dans l'équation de $\Delta_2$, on a le point P(3; 4; –7). En substituant ces coordonnées dans l'équation de $\Delta_1$, on a :

$$\begin{cases} 3 = 4 + u \\ 4 = -3 + 2u \\ -7 = -5 - 3u \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} u = -1 \\ u = 7/2 \\ u = 2/3 \end{cases}$$

Il est impossible que $u$ prenne simultanément trois valeurs distinctes. Par conséquent, les droites sont parallèles distinctes.

*b*) Les vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{D}_1 = (1; 3; 4)$ et $\vec{D}_2 = (-2; 2; -4)$. Ces vecteurs ne sont pas parallèles puisqu'il n'existe pas de scalaire $k$ tel que $k\vec{D}_1 = \vec{D}_2$. En effet, les rapports des composantes de même rang ne sont pas égaux, on a $\frac{1}{-2} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{4}{-4}$. Les vecteurs directeurs n'étant pas parallèles, les droites ne le sont pas. Elles peuvent donc être concourantes ou gauches. Pour le savoir, il faut déterminer s'il existe un point d'intersection. C'est-à-dire s'il existe des valeurs $u$ et $t$ telles que :

$$\begin{cases} -2+u=3-2t \\ 4+3u=5+2t \\ -3+4u=-2-4t \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} u+2t=5 \\ 3u-2t=1 \\ 4u+4t=1 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3-4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & -14 \\ 0 & -4 & -19 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 2L_3-L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & -24 \end{array}\right)$

Le système n'a aucune solution, ce qui signifie qu'il n'y a pas de point commun aux deux droites. Ce sont donc des droites gauches.

*c*) Les vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{D}_1 = (1; 3; 4)$ et $\vec{D}_2 = (-2; 2; -4)$. Ces vecteurs ne sont pas parallèles puisqu'il n'existe pas de scalaire $k$ tel que $k\vec{D}_1 = \vec{D}_2$. Les vecteurs directeurs n'étant pas parallèles, les droites ne le sont pas. Elles peuvent donc être concourantes ou gauches. Pour le savoir, il faut déterminer s'il existe un point d'intersection. C'est-à-dire s'il existe des valeurs $u$ et $t$ telles que :

$$\begin{cases} -2+u=3-2t \\ 4+3u=3+2t \\ -3+4u=9-4t \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} u+2t=5 \\ 3u-2t=-1 \\ 4u+4t=12 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 12 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3-4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & -8 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 2L_3-L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/(-8) \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1-2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Le système a une solution, $u = 1$ et $t = 2$. Ce qui signifie qu'il y a un point commun aux deux droites. Ce sont donc des droites concourantes. Le point commun est obtenu en substituant les valeurs obtenues pour $u$ et $t$ dans les équations. Ce qui donne $(-1; 7; 1)$.

17. *a*) Le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur le plan $\prod$ est le point de rencontre de la droite passant par P et perpendiculaire au plan $\prod$ et de ce plan. On doit donc trouver l'équation de la droite passant par P et perpendiculaire à $\prod$, puis déterminer le point de rencontre de la droite et du plan. Un vecteur directeur de la droite perpendiculaire au plan est un vecteur normal au plan. On a donc $\vec{D} = (4; -5; 8)$ et l'équation de la droite est :

$$\Delta: \begin{cases} x=2+4t \\ y=-3-5t \\ z=5+8t \end{cases}$$

Pour trouver le point de rencontre, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, ce qui donne :
$4(2 + 4t) - 5(-3 - 5t) + 8(5 + 8t) + 147 = 0$ et $8 + 16t + 15 + 25t + 40 + 64t + 147 = 0$.
D'où $105t + 210 = 0$ et $t = -2$. En substituant cette valeur de $t$ dans les équations paramétriques de la droite, on trouve $(x; y; z) = (-6; 7; -11)$. Ce point est le pied de la hauteur abaissée de $P(2; -3; 5)$ sur le plan $\prod$: $4x - 5y + 8z + 147 = 0$.

*b*) Le vecteur normal du plan est le vecteur directeur de la droite cherchée.

On a $\vec{D}$ = (0; 2; –1) et l'équation de la droite est $\Delta\colon \begin{cases} x = 7 + 0s \\ y = 6 + 2s \\ z = 4 - s \end{cases}$.

Pour trouver le point de rencontre, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, ce qui donne :
$2(6 + 2s) - (4 - s) + 16 = 0$
D'où $5s + 24 = 0$ et $s = -24/5$. En substituant cette valeur de $s$ dans les équations paramétriques de la droite, on trouve $(x; y; z) = (7; -18/5; 44/5)$. Ce point est le pied de la hauteur abaissée de P(7; 6; 4) sur le plan $\prod$: $2y - z + 16 = 0$.

18. *a*) Le point du plan $\prod$ le plus rapproché du point P(5; 2; 4) est le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur le plan $\prod$. On doit donc trouver l'équation de la droite passant par P et perpendiculaire à $\prod$, puis déterminer le point de rencontre de la droite et du plan. Un vecteur directeur de la droite perpendiculaire au plan est un vecteur normal au plan. On a donc $\vec{D}$ = (2; –3; 4) et l'équation de la droite est :

$$\Delta\colon \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

Pour trouver le point de rencontre, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, ce qui donne :
$2(5 + 2t) - 3(2 - 3t) + 4(4 + 4t) + 38 = 0$ et $10 + 4t - 6 + 9t + 16 + 16t + 38 = 0$.
D'où $29t + 58 = 0$ et $t = -2$. En substituant cette valeur de $t$ dans les équations paramétriques de la droite, on trouve $(x; y; z) = (1; 8; -4)$. Ce point est le pied de la hauteur abaissée de P(5; 2; 4) sur le plan $\prod$, c'est donc le point du plan $\prod$ le plus rapproché de P.

*b*) Le vecteur normal du plan est le vecteur directeur de la droite cherchée.

On a donc le vecteur directeur $\vec{D}$ = (13; –11; 4) et l'équation de la droite est :

$$\Delta\colon \begin{cases} x = 8 + 13t \\ y = 4 - 11t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

Pour trouver le point de rencontre, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, ce qui donne :
$13(8 + 13t) - 11(4 - 11t) + 4(4 + 4t) + 26 = 0$. D'où $306t + 102 = 0$ et $t = -1/3$. En substituant cette valeur de $t$ dans les équations paramétriques de la droite, on trouve $(x;y;z) = (11/3; 23/3; 8/3)$. Ce point est le pied de la hauteur abaissée de P(8; 4; 4) sur le plan $\prod$, c'est donc le point du plan $\prod$ le plus rapproché de P.

19. *a*) Le point de la droite qui est le plus rapproché du point P est le point d'intersection de la droite $\Delta$ et du plan $\prod$ passant par P et perpendiculaire à $\Delta$. Le vecteur directeur de la droite est un vecteur normal au plan et un point Q($x$; $y$; $z$) est sur le plan si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{N}$ est nul. Le vecteur $\vec{N}$ = (–3; 2; –6) et $\overrightarrow{PQ} = (x - 11; y - 3; z - 6)$,
d'où $-3x + 2y - 6z + 63 = 0$.
Pour trouver le point de rencontre de la droite et du plan, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan pour déterminer la valeur du paramètre au point de rencontre. On a alors :
$-3(-5 - 3t) + 2(4 + 2t) - 6(-2 - 6t) + 63 = 0$. D'où l'on tire $t = -2$. Le point de rencontre est alors :

$$\Delta\colon \begin{cases} x = -5 - 3 \times (-2) = 1 \\ y = 4 + 2 \times (-2) = 0 \\ z = -2 - 6 \times (-2) = 10 \end{cases}$$

Le point Q est donc (1; 0; 10). La distance entre les points P et Q est alors :

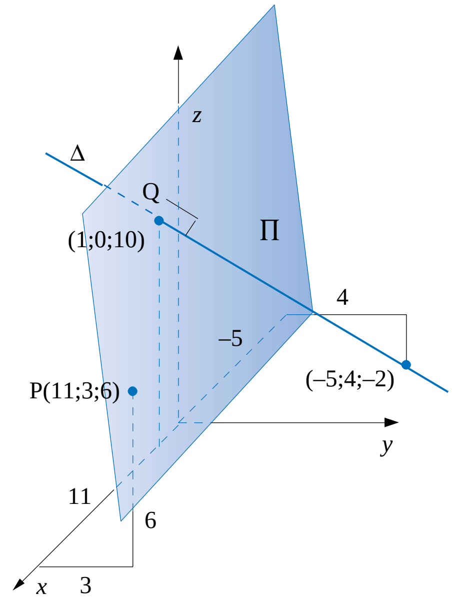
$$d(\mathrm{P,Q}) = \sqrt{(11-1)^2 + (3-0)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ unités.}$$

Vérifions que cette distance est bien la distance du point P à la droite Δ. Le point A(–5; 4; –2) est un point de la droite, il est obtenu en posant $t$ = 0 dans l'équation de celle-ci. Les vecteurs sont $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ = (16; –1; 8) et $\vec{D}$ = (–3; 2; –6). Le produit vectoriel donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\times\vec{D}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 16 & -1 & 8\\ -3 & 2 & -6\end{vmatrix}=-10\vec{i}+72\vec{j}+29\vec{k}.$$ D'où

$$d(\mathrm{P},\Delta)=\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\times\vec{D}\|}{\|\vec{D}\|}=\frac{\sqrt{6125}}{\sqrt{49}}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11{,}18 \text{ unités.}$$

La distance entre P et Q est bien la distance du point P à la droite Δ. Elle est d'environ 11,18 unités.




*b*) Le vecteur $\vec{N}$ = (–2; –5; 3) et $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ = ($x$ – 7; $y$ + 8; $z$ – 4), d'où : –2$x$ – 5$y$ + 3$z$ – 38 = 0.
Pour trouver le point de rencontre de la droite et du plan, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan pour déterminer la valeur du paramètre au point de rencontre. On a alors :
–2(4 – 2$t$) – 5(10 – 5$t$) + 3(–6 + 3$t$) – 38 = 0. D'où l'on tire $t$ = 3.
Le point de rencontre est alors :

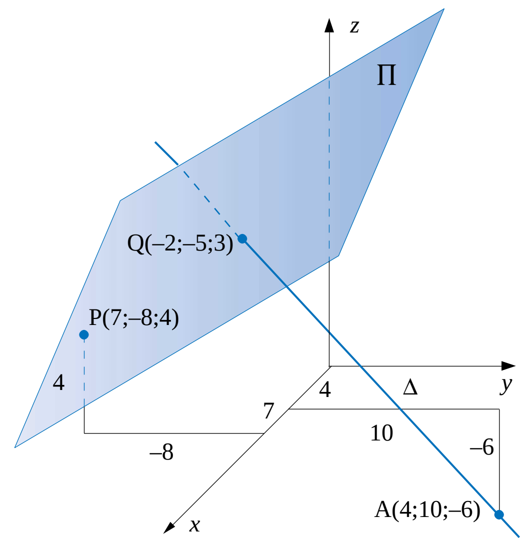
$$\Delta:\begin{cases}x=4-2\times3=-2\\ y=10-5\times3=-5\\ z=-6+3\times3=3\end{cases}$$

Le point Q est donc (–2; –5; 3). La distance entre les points P et Q est alors :

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\sqrt{91}\approx 9{,}54 \text{ unités.}$$

Vérifions que cette distance est bien la distance du point P à la droite Δ.
Le point A(4; 10; –6) est un point de la droite, il est obtenu en posant $t$ = 0 dans l'équation de celle-ci. Les vecteurs sont $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ = (3; –18; 10) et $\vec{D}$ = (–2; –5; 3). Le produit vectoriel donne alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\times\vec{D}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -18 & 10\\ -2 & -5 & 3\end{vmatrix}=-4\vec{i}-29\vec{j}-51\vec{k}.$$ D'où

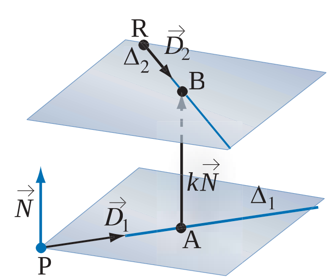



$$d(\mathrm{P},\Delta)=\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\times\vec{D}\|}{\|\vec{D}\|}=\frac{\sqrt{3458}}{\sqrt{38}}=\sqrt{91}\approx 9{,}54 \text{ unités.}$$

La distance entre P et Q est bien la distance du point P à la droite Δ. Elle est d'environ 9,54 unités.

20. *a*) Les vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{D}_1$ = (–2; –5; 1) et $\vec{D}_2$ = (3; 4; –1). Leur produit vectoriel donne un vecteur normal aux plans parallèles contenant les droites gauches.

$$\vec{N}=\vec{D}_1\times\vec{D}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -5 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}.$$




Les points les plus rapprochés sont sur une droite parallèle à ce vecteur normal. Notons A($a$; $b$; $c$), le point sur la droite $\Delta_1$ et $B$($d$; $e$; $f$) le point sur la droite $\Delta_2$. On a alors :

$$\text{A: }\begin{cases} a = -2-2t \\ b = -7-5t \\ c = -3+t \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{B: }\begin{cases} d = -6+3s \\ e = -8+4s \\ f = 5-s \end{cases}$$

Puisque $\overrightarrow{AB}$ est parallèle au vecteur , on a $\overrightarrow{AB} = k\vec{N}$, soit :

$$(d-a;\ e-b;\ f-c) = k(1;\ 1;\ 7)$$
$$(3s+2t-4;\ 4s+5t-1;\ -s-t+8) = (k;\ k\ ;\ 7k)$$

D'où l'on tire le système d'équations : $\begin{cases} 3s+2t-k = 4 \\ 4s+5t-k = 1 \\ -s-t-7k = -8 \end{cases}$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on a alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -7 & -8 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} -L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3-4L_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -22 & -20 \\ 0 & 1 & -29 & -31 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1+L_2 \\ L_2 \\ L_3+L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -15 & -12 \\ 0 & -1 & -22 & -20 \\ 0 & 0 & -51 & -51 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3/(-51) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -15 & -12 \\ 0 & -1 & -22 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1+15L_3 \\ L_2+22L_3 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En substituant les valeurs de $s$ et de $t$ dans les équations des droites, on obtient :

$$\text{A: }\begin{cases} a = -2-2\times -2 = 2 \\ b = -7-5\times -2 = 3 \\ c = -3+-2 = -5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{B: }\begin{cases} d = -6+3\times 3 = 3 \\ e = -8+4\times 3 = 4 \\ f = 5-3 = 2 \end{cases}$$

Le point sur la droite $\Delta_1$ est A(2; 3; –5) et le point sur la droite $\Delta_2$ est B(3; 4; 2).
La distance entre les droites est la distance entre les points A et B ou la longueur du vecteur. On trouve :

$\overrightarrow{AB} = (3;\ 4;\ 2) - (2;\ 3;\ -5) = (1;\ 1;\ 7)$ et $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{51} \approx 7{,}14$ unités.

*b*) Les vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{D}_1 = (2;\ -2;\ 8)$ et $\vec{D}_2 = (5;\ 7;\ 2)$. Leur produit vectoriel donne un vecteur normal aux plans parallèles contenant les droites gauches.

$$\vec{N} = \vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 8 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -60\vec{i} + 36\vec{j} + 24\vec{k}.$$

Le vecteur $\vec{N}$ est normal aux deux plans, mais on peut en utiliser un plus siple. En effet, le vecteur $\vec{N}_1 = (5;\ -3;\ -2)$ est également normal aux deux plans et les calculs seront plus simples.
Les points les plus rapprochés sont sur une droite parallèle à ce vecteur normal. Notons A($a$; $b$; $c$), le point sur la droite $\Delta_1$ et $B$($d$; $e$; $f$) le point sur la droite $\Delta_2$. On a alors :

$$\text{A: }\begin{cases} a = -5+2t \\ b = 4-2t \\ c = -2+8t \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{B: }\begin{cases} d = -8+5s \\ e = -15+7s \\ f = 2s \end{cases}$$

Puisque $\overrightarrow{AB}$ est parallèle au vecteur , on a $\overrightarrow{AB} = k\vec{N}$, soit :

$$(d-a;\ e-b;\ f-c) = k(5;\ -3;\ -2)$$
$$(5s-2t-3;\ 7s+2t-19;\ 2s-8t+2) = (5k;\ -3k\ ;\ -2k)$$

D'où l'on tire le système d'équations : $\begin{cases} 5s-2t-5k = 3 \\ 7s+2t+3k = 19 \\ 2s-8t+2k = -2 \end{cases}$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on a alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & 3 & 19 \\ 2 & -8 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3/2 \\ \approx L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & 3 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ \approx L_2 - 5L_1 \\ L_3 - 7L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 18 & -10 & 8 \\ 0 & 30 & -4 & 26 \end{array}\right) \begin{array}{l} 9L_1 + 2L_2 \\ \approx L_2 \\ 9L_3 - 15L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -11 & 7 \\ 0 & 18 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 114 & 114 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ \approx L_2 \\ L_3/114 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -11 & 7 \\ 0 & 18 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + 11L_3 \\ \approx L_2 + 10L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/9 \\ \approx L_2/18 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En substituant les valeurs de $s$ et de $t$ dans les équations des droites, on obtient :

$$\text{A: } \begin{cases} a = -5 + 2 \times 1 = -3 \\ b = 4 - 2 \times 1 = 2 \\ c = -2 + 8 \times 1 = 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{B: } \begin{cases} d = -8 + 5 \times 2 = 2 \\ e = -15 + 7 \times 2 = -1 \\ f = 2 \times 2 = 4 \end{cases}$$

Le point sur la droite $\Delta_1$ est A(–3; 2; 6) et le point sur la droite $\Delta_2$ est B(2; –1; 4).
La distance entre les droites est la distance entre les points A et B ou la longueur du vecteur. On trouve :

$\overrightarrow{AB}$ = (2; –1; 4) – (–3; 2; 6) = (5; –3; –2) et $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{38} \approx 6{,}16$ unités.

21. *a*) (4; –2; 5), c’est un point.
*b*) aucune solution. Les plans n’ont pas d’intersection commune.
*c*) $\{(x;\, y;\, z) \mid x = 9 + 8t/13,\ y = 23t/13,\ z = t\}$. C’est une droite passant par le point (9; 0; 0) et de vecteur directeur (8/13; 23/13; 1).
*d*) $\{(x;\, y;\, z) \mid x = 13 + 13t,\ y = 2 + 5t,\ z = t\}$. C’est une droite passant par le point (13; 2; 0) et de vecteur directeur (13; 5; 1).
*e*) $\{(x;\, y;\, z) \mid x = 11 - 13t/2,\ y = 5 - 3t,\ z = t\}$. C’est une droite passant par le point (11; 5; 0) et de vecteur directeur (–13/2; –3; 1).
*f*) (18; –12; 4), c’est un point.

22. En formant trois groupements et en calculant les valeurs moyennes, on obtient les valeurs du tableau ci-contre :

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|---|
| 2/3 | 1 | | |
| 1 | –2 | 1 | 0 |
| 4/3 | 1 | | |
| 5/3 | 2 | | |
| 2 | 1 | 2 | 2 |
| 7/3 | 3 | | |
| 8/3 | 5 | | |
| 3 | 9 | 3 | 10 |
| 10/3 | 16 | | |

On cherche donc l’équation de la parabole $y = a^2x + bx + c$ passant par les points (1; 0), (2; 2) et (3; 10). En substituant les données groupées, on obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 10 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ \approx L_2 - 4L_1 \\ L_3 - 9L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2L_1 + L_2 \\ \approx L_2 \\ L_3 - 3L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ \approx L_2 + 3L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/2 \\ \approx L_2/(-2) \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Le modèle quadratique est : $y = 3x^2 - 7x + 4$

23. En formant trois groupements et en calculant les valeurs moyennes, on obtient les valeurs du tableau ci-contre :

| $t$ | $P$ | $\bar{t}$ | $\bar{P}$ |
|---|---|---|---|
| 0,75<br>1,00<br>1,25 | 0,40<br>0,80<br>1,80 | 1 | 1 |
| 1,50<br>2,00<br>2,50 | 2,50<br>2,90<br>3,60 | 2 | 3 |
| 3,00<br>4,00<br>5,00 | 4,80<br>3,10<br>1,10 | 4 | 3 |

On cherche donc l’équation de la parabole $y = a^2x + bx + c$ passant par les points (1; 1), (2; 3) et (4; 3). En substituant les données groupées, on obtient :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=3 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 16 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-4L_1 \\ L_3-16L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -12 & -15 & -13 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 2L_1+L_2 \\ L_2 \\ L_3-6L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 3L_1+L_3 \\ L_2+L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/6 \\ L_2/(-2) \\ L_3/3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right)$$

Le modèle quadratique est : $y = \dfrac{-2}{3}x^2 + 4x - \dfrac{7}{3}$

24. Le système d’équations est : $\begin{cases} d_1+d_2=300 \\ d_1+d_3-d_5=-300 \\ d_2+d_4-d_6=-220 \\ d_3+d_4=400 \\ d_5+d_6=1220 \end{cases}$

En résolvant, on trouve :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -300 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1220 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -600 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1220 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1+L_2 \\ L_2 \\ L_3+L_2 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -300 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -820 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1220 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1-L_3 \\ L_2-L_3 \\ L_3 \\ L_4-L_3 \\ L_5 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 520 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -820 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1220 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1220 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5-L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 520 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -820 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1220 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système a deux variables libres, $d_4 = s$ et $d_6 = t$. La solution générale est alors :

$\{ (d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6) \mid d_1 = 520 + s - t,\ d_2 = -220 - s + t,\ d_3 = 400 - s,\ d_4 = s,\ d_5 = 1220 - t,\ d_6 = t\}$

La municipalité peut décider de changer une seule conduite et utiliser l’autre à sa capacité maximale actuelle. Ainsi, en posant $t = 400$ L/s, l’ensemble des solutions devient :

$\{ (d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6) \mid d_1 = 120 + s,\ d_2 = 180 - s,\ d_3 = 400 - s,\ d_4 = s,\ d_5 = 820,\ d_6 = 400\}$

Il faudrait, dans ces conditions, augmenter la capacité de la conduite $N_3N_4$ à 820 L/s.

25. Soit [Co], la concentration en cobalt et [Ni], la concentration en nickel. L’information à 510 nm donne l’équation :

$$36\,400[\text{Co}] + 5\,520[\text{Ni}] = 0{,}446$$

L’information à 656 nm donne l’équation :

$$1\,240[\text{Co}] + 17\,500[\text{Ni}] = 0{,}326$$

Pour déterminer les concentrations, il faut donc résoudre le système d’équations :

$$\begin{cases} 36\,400[\text{Co}]+5\,520[\text{Ni}]=0{,}446 \\ 1\,240[\text{Co}]+17500[\text{Ni}]=0{,}326 \end{cases}$$

Par la méthode de Gauss-Jordan, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 36\ 400 & 5\ 520 & 0{,}446 \\ 1\ 240 & 17\ 500 & 0{,}326 \end{array}\right) \underset{36\ 400L_2 - 1\ 240L_1}{\overset{L_1}{\approx}} \left(\begin{array}{cc|c} 36\ 400 & 5\ 520 & 0{,}446 \\ 0 & 6{,}30155\times10^8 & 11\ 313{,}36 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2}{\overset{6{,}30155\times10^8 L_1 - 5\ 520L_2}{\approx}} \left(\begin{array}{cc|c} 2{,}29376\times10^{13} & 0 & 2{,}18599\times10^8 \\ 0 & 6{,}30155\times10^8 & 11\ 313{,}36 \end{array}\right)$$

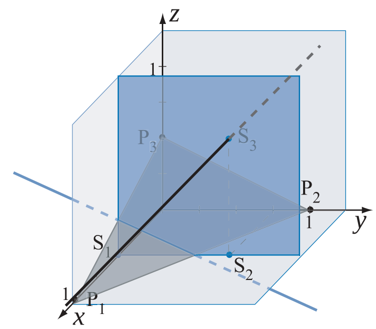
$$\underset{L_2/6{,}30155\times10^8}{\overset{L_1/2{,}29376\times10^{13}}{\approx}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9{,}53\times10^{-6} \\ 0 & 1 & 1{,}79\times10^{-5} \end{array}\right)$$

La concentration est donc de $9{,}53\times10^{-6}$ mol/L et celle du nickel est de $1{,}79\times10^{-5}$ mol/L.

26. *a*) $x + y + 2z = 1$

*b*) $2x = 1$

*c*) $\Delta = \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 - 2t \\ z = t \end{cases}$




*d*) $\angle(\Pi_1, \Pi_2) = 65{,}91°$

*e*) $d(S_3, \Pi_1) = 0{,}71$ unités

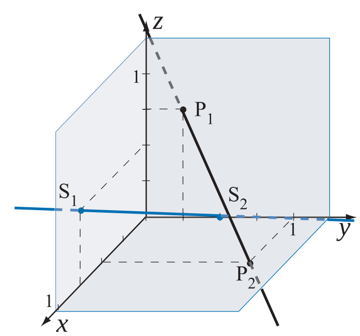
*f*) $P\left(\frac{5}{24};\ \frac{11}{24};\ \frac{4}{24}\right)$ et $\left\|\overrightarrow{PS_3}\right\| = 0{,}71$ unités

*g*) $\Delta_{S_1S_3} = \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 3t/4 \\ z = 3t/4 \end{cases}$ et $\angle(\Delta_{S_1S_3}, \Pi_1) = 30°$

*h*) $R\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{20}\right)$. Oui, car $d(\Delta_1,\ S_3) = \left\|\overrightarrow{RS_3}\right\| = 0{,}783$ unités.

*i*) $\Delta \cap \Delta_{S_1S_3} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$

27. La distance entre les liaisons $S_1S_2$ et $P_1P_2$ est la distance entre les droites gauches $\Delta_{S_1S_2}$ et $\Delta_{P_1P_2}$.




Le plan $\prod$ contenant la droite $\Delta_{P_1P_2}$ et parallèle à la droite $\Delta_{S_1S_2}$ a comme équation :

$12x + 5y + 13z = 11$.

$d(\Delta_{S_1S_2}, \Delta_{P_1P_2}) = 0{,}462$ unités

28. *a*) $\prod_1 : 3x + 3y + 4z = 3$, $\prod_2 : 12x + 12y + 18z = 9$

$d(\prod_1, \prod_2) = 0$ puisque les plans ne sont pas parallèles.

*b*) $R\left(\frac{3}{34};\ \frac{3}{34};\ \frac{21}{34}\right)$