CHAPITRE 10

EXERCICES 10.2

1. *a)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}$ *c)* pas défini *d)* $\begin{pmatrix} -16 & -30 \\ -17 & 3 \\ -7 & -68 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} -22 & 16 & 13 \\ 5 & -18 & 6 \end{pmatrix}$

2. *a)* $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & 4 & \sqrt{32} & 4 \\ 4 & 0 & 4 & \sqrt{32} \\ \sqrt{32} & 4 & 0 & 4 \\ 4 & \sqrt{32} & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 8 & 0 & 6 & 10 & 5 \\ 10 & 6 & 0 & 8 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

3. *a)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 8 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 8 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. *a)* $\begin{pmatrix} 15\,500 & 16\,800 & 18\,200 & 19\,300 \\ 18\,300 & 19\,700 & 22\,600 & 24\,500 \\ 24\,000 & 26\,500 & 29\,400 & 31\,200 \\ 35\,000 & 39\,500 & 43\,200 & 46\,800 \end{pmatrix}$

b) $1{,}045 \times 1{,}04 \times 1{,}035 \begin{pmatrix} 15\,500 & 16\,800 & 18\,200 & 19\,300 \\ 18\,300 & 19\,700 & 22\,600 & 24\,500 \\ 24\,000 & 26\,500 & 29\,400 & 31\,200 \\ 35\,000 & 39\,500 & 43\,200 & 46\,800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17\,435 & 18\,897 & 20\,472 & 21\,709 \\ 20\,585 & 22\,159 & 25\,421 & 27\,559 \\ 26\,996 & 29\,808 & 33\,070 & 35\,095 \\ 39\,369 & 44\,431 & 48\,593 & 52\,642 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 17\,650 & 18\,950 & 20\,350 & 21\,450 \\ 20\,450 & 21\,850 & 24\,750 & 26\,650 \\ 26\,150 & 28\,650 & 31\,550 & 33\,350 \\ 37\,150 & 41\,650 & 45\,350 & 48\,950 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

6. *a)* $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \\ 10 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 11 \\ 15 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 11 \\ 15 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Tous les articles dont les quantités sont négatives doivent être produits en priorité pour répondre à la demande.

7. *a)* $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 15 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 9 & 3 & 15 \end{pmatrix}$ *d)* pas défini

8. *a*) $A+A^{t}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 3\\ 3 & -6 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{pmatrix}$ *b*) La matrice $A + A^t$ est toujours symétrique.

9. *a*) $A=\begin{pmatrix}4 & 10 & 6\\ 2 & 8 & 10\\ 6 & 12 & 2\\ 10 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 6\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{A}+\mathrm{B}=T=\begin{pmatrix}6 & 10 & 10\\ 3 & 8 & 12\\ 9 & 12 & 8\\ 12 & 2 & 10\end{pmatrix}$

b) non

c) $R=(1-0{,}20)T=0{,}8\ T=\begin{pmatrix}4{,}8 & 8{,}0 & 8{,}0\\ 2{,}4 & 6{,}4 & 9{,}6\\ 7{,}2 & 9{,}6 & 6{,}4\\ 9{,}6 & 1{,}6 & 8{,}0\end{pmatrix}$

EXERCICES 10.4

1. *a*) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 19\\ 0 & 1 & 13\end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2. Non; $A\bullet B=\begin{pmatrix}8 & -7\\ 17 & -3\end{pmatrix}$ et $B\bullet A=\begin{pmatrix}-9 & -17\\ 13 & 14\end{pmatrix}$

3. *a*) $\begin{pmatrix}0 & -13 & 13\\ 7 & 29 & -22\end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix}-6 & -23 & 17\\ 11 & 27 & -16\end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix}19 & 20\\ -17 & 4\end{pmatrix}$ *d*) pas défini

4. En effectuant le produit des matrices, on trouve $\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ 4a+2c & 4b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

On cherche donc a et c tels que $2a + c = 0$ et $4a + 2c = 0$. Ces deux équations ont les mêmes solutions et la condition s'écrit $c = -2a$. En donnant une valeur particulière à a dans cette équation, on aura donc une valeur c qui satisfait à la condition. En posant $a = 1$, par exemple, on trouve $c = -2$.

De plus, on cherche b et d tels que $2b + d = 0$ et $4b + 2d = 0$. Ces deux équations ont les mêmes solutions et la condition s'écrit $d = -2b$. En donnant une valeur particulière à b dans cette équation, on aura une valeur d qui satisfait à la condition. En posant $b = 4$, par exemple, on trouve $d = -8$.

La matrice $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -8\end{pmatrix}$ satisfait donc à la condition posée. En effet $A\bullet B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

On remarque que la matrice B satisfaisant à la condition posée n'est pas unique.

De plus, $B\bullet A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -8\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 9\\ -36 & -18\end{pmatrix}$. Donc $A\bullet B \neq B\bullet A$.

5. *a*) $A\bullet B=\begin{pmatrix}20 & 17\\ 5 & 81\end{pmatrix}$ et $B\bullet A=\begin{pmatrix}18 & 25 & 24\\ 16 & 41 & 17\\ 30 & 33 & 42\end{pmatrix}$. Un des produits donne une matrice 2×2 et l'autre donne une matrice 3×3.

b) $A\bullet B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -14 & -4\end{pmatrix}$ et $B\bullet A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

Les deux produits donnent une matrice 2×2. Cependant, les deux matrices sont différentes car les éléments des matrices sont différents.

c) $A \bullet B = \begin{pmatrix} 33 & 32 & -2 \\ 26 & 35 & 2 \\ 55 & 50 & -6 \end{pmatrix}, B \bullet A = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -7 \\ -16 & 39 & 16 \\ 12 & 43 & 32 \end{pmatrix}$

Les deux produits donnent une matrice 3×3. Cependant, les deux matrices sont différentes car les éléments des matrices sont différents.

d) Soit, par exemple, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a alors $A \bullet B = B \bullet A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

6. *a*) $(A + B)^t = A^t + B^t = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t = \begin{pmatrix} -1 & 37 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $(A + B)^t$ et $A^t + B^t$ ne sont pas définies. $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 17 & 81 \end{pmatrix}$

c) $(A + B)^t = A^t + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 5 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t = \begin{pmatrix} 33 & 26 & 55 \\ 32 & 35 & 50 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

7. *a*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6 \\ 2 & 8 & 10 \\ 6 & 12 & 2 \\ 10 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Il faut effectuer l'opération $(A + B + C) \bullet D^t$. Cela donne :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 12 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 12 & 2 \\ 6 & 10 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 & 180 & 100 & 160 \\ 136 & 136 & 136 & 192 \\ 124 & 132 & 116 & 100 \end{pmatrix}$$

b) Il faudrait effectuer l'opération $(1 \quad 1 \quad 1) \bullet (A + B + C) \bullet D^t$.

c) La matrice des temps d'exécution est : $E = (70 \quad 120 \quad 60)$.
Il faut effectuer l'opération $E \bullet (A + B + C)^t$. Cela donne :

$$(70 \quad 120 \quad 60) \bullet \begin{pmatrix} 4 & 12 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 14 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1600 \quad 1800 \quad 1470)$$

Il faut 1600 minutes pour l'équipe L_1, 1800 minutes pour L_2 et 1470 minutes pour l'équipe L_3.

8. *a*) $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 11 \\ 1,2 & 2 & 1,6 \\ 1,2 & 0,8 & 1,4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 50 \\ 65 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,802 \\ 273,2 \\ 184,8 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} 1\,802 \text{ unités de bois} \\ 273,2 \text{ unités de contreplaqué} \\ 184,8 \text{ unités d'aggloméré} \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 60 & 70 & 65 \\ 35 & 40 & 45 \\ 40 & 55 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 65 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,930 \\ 6\,690 \\ 9\,215 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} 182 \text{ h et 10 min à l'atelier de sciage} \\ 111 \text{ h et 30 min à l'atelier d'assemblage} \\ 153 \text{ h et 35 min à l'atelier de sablage} \end{cases}$

La réalisation nécessite donc 182 heures et 10 minutes de travail à l'atelier de sciage, 111 heures et 30 minutes à l'atelier d'assemblage et 153 heures et 35 minutes à l'atelier de sablage.

9. *a*) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

10. *a*) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A est nilpotente d'indice 3.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3a^2 & -a^2 \\ 0 & 3a^2 & -a^2 \\ 0 & 9a^2 & -3a^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A est nilpotente d'indice 3.

c) Les deux exemples des parties *a* et *b* suggèrent que oui.

d) Soit A une matrice nilpotente d'indice 3. On a alors $A^3 = 0$. Par les propriétés des opérations, on a

$$(aA)^3 = (aA) \bullet (aA) \bullet (aA) = aaa\,(A \bullet A \bullet A) = a^3A^3 = a^30 = 0$$

Donc, la matrice aA est nilpotente d'indice 3.

e) Soit A une matrice nilpotente d'indice n. On a alors $A^n = 0$. Par les propriétés des opérations, on a

$$(aA)^n = \underbrace{(aA) \bullet (aA) \bullet \ldots \bullet (aA)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(aa\ldots a)}_{n \text{ fois}}\underbrace{(A \bullet A \bullet \ldots \bullet A)}_{n \text{ fois}} = a^nA^n = a^n0 = 0.$$

Donc, la matrice aA est nilpotente d'indice n.

11. *a*) $A \bullet A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 14 & -17 \\ -17 & 50 \end{pmatrix}$ et $A^{\mathrm{t}} \bullet A = \begin{pmatrix} 17 & -17 & 10 \\ -17 & 34 & -21 \\ 10 & -21 & 13 \end{pmatrix}$

b) $A \bullet A^{\mathrm{t}}$ et $A^{\mathrm{t}} \bullet A$ sont des matrices symétriques quelle que soit la matrice A.

c) Soit A une matrice. Pour montrer que la matrice $A \bullet A^{\mathrm{t}}$ est symétrique, il faut montrer qu'elle est égale à sa transposée. On a, par les propriétés des opérations :

$(A \bullet A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{tt}} \bullet A^{\mathrm{t}} = A \bullet A^{\mathrm{t}}$.

La matrice $A \bullet A^{\mathrm{t}}$ est donc symétrique. De même pour $A^{\mathrm{t}} \bullet A$.

12. Parce que $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Le produit matriciel n'est pas commutatif, c'est-à-dire que $AB \neq BA$.

13. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 52 \\ 0 & 27 & 38 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 160 \\ 0 & 81 & 130 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Les puissances d'une matrice triangulaire supérieure sont également des matrices triangulaires supérieures.