



6. Il faut déterminer les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$  et vérifier si deux de ces vecteurs sont perpendiculaires en utilisant le produit scalaire.

a)  $\overrightarrow{AB} = (6; 4)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2; -3)$  et  $\overrightarrow{BC} = (-4; -7)$ . Le triangle est rectangle en A puisque  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (6; 4) \cdot (2; -3) = 12 - 12 = 0$ .

b)  $\overrightarrow{AB} = (3; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4; 11)$  et  $\overrightarrow{BC} = (1; 12)$ . Le triangle n'est pas rectangle puisque tous les produits sont non nuls.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -9$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 136$ .

c)  $\overrightarrow{AB} = (-5; -2; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-3; -3; 6)$  et  $\overrightarrow{BC} = (2; -1; 4)$ . Le triangle est rectangle en B puisque  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-5; -2; 2) \cdot (2; -1; 4) = -10 + 2 + 8 = 0$ .

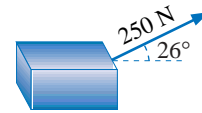
d)  $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; 4)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (3; -5; 7)$  et  $\overrightarrow{BC} = (5; -9; 3)$ . Le triangle n'est pas rectangle puisque tous les produits sont non nuls.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -34$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 81$ .

7. En procédant géométriquement, on détermine la composante du vecteur représentant la force dans le sens du déplacement, soit :

$\|\vec{F}\| \cos 26^\circ$  et le travail est :

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos 26^\circ = 250 \times 50 \cos 26^\circ = 11\,234,9 \text{ J}$$

On trouve donc  $\approx 11,2 \text{ kJ}$



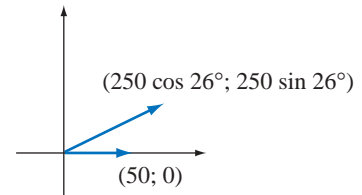
En procédant algébriquement, on détermine les composantes algébriques du vecteur représentant la force et du vecteur représentant le déplacement, On a alors :

$$\vec{F} = (250 \cos 26^\circ; 250 \sin 26^\circ) \text{ et } \vec{d} = (50; 0)$$

Le produit scalaire de ces vecteurs algébriques donne alors :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{d} &= (250 \cos 26^\circ; 250 \sin 26^\circ) \cdot (50; 0) \\ &= 250 \times 50 \cos 26^\circ = 11\,234,9 \text{ J} \end{aligned}$$

On trouve donc  $\approx 11,2 \text{ kJ}$



8. a) La force s'exerce dans le sens du déplacement. Il faut cependant trouver le déplacement, soit la longueur du plan incliné ou de l'hypoténuse du triangle rectangle. On trouve alors :

$\|\vec{d}\| = 6 \operatorname{cosec} 20^\circ$  et puisque  $\|\vec{F}\| = 200 \text{ N}$ , le travail est :

$$T = 200 \times 6 \operatorname{cosec} 20^\circ = 3\,508,56 \text{ J}$$

b) Si la force était appliquée horizontalement, la description algébrique des vecteurs serait :

$$\vec{F} = (F_x; 0) \text{ et } \vec{d} = (6 \cot 20^\circ; 6)$$

Le travail est donné par le produit scalaire, soit :

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d} = (F_x; 0) \cdot (6 \cot 20^\circ; 6) = 6 F_x \cot 20^\circ$$

Le travail effectué est le même, on a donc :

$$6 F_x \cot 20^\circ = 200 \times 6 \operatorname{cosec} 20^\circ, \text{ ce qui donne :}$$

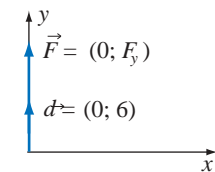
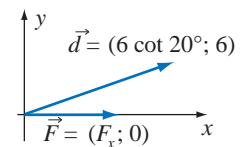
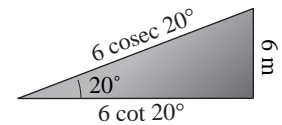
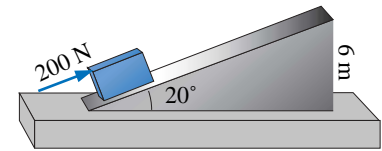
$$F_x = \frac{200}{\cos 20^\circ} = 212,84 \approx 213 \text{ N. L'intensité de la force devrait être de } 213 \text{ N.}$$

c) Pour monter verticalement le bloc à une hauteur de 6 m, il faut effectuer le même travail. La description algébrique des vecteurs serait :

$$\vec{F} = (0; F_y) \text{ et } \vec{d} = (0; 6). \text{ Le travail effectué est le même, on a donc :}$$

$$6 F_y = 200 \times 6 \operatorname{cosec} 20^\circ, \text{ ce qui donne :}$$

$$F_y = 200 \operatorname{cosec} 20^\circ = 584,76 \text{ N, soit une force d'environ } 585 \text{ N.}$$



9. a) La force s'exerce dans le sens du déplacement qui est de 5 m et puisque

$\|\vec{F}\| = 200 \text{ N}$ , le travail est :

$T = 200 \times 5 = 1000 \text{ J}$ . Le travail effectué est  $1000 \text{ J} = 1 \text{ kJ}$ .

- b) Si la force était appliquée horizontalement, la description algébrique des vecteurs serait :

$$\vec{F} = (F_x; 0) \text{ et } \vec{d} = (4; 3)$$

Le travail est donné par le produit scalaire, soit :

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d} = (F_x; 0) \cdot (4; 3) = 4 F_x$$

Le travail effectué est le même, on a donc :

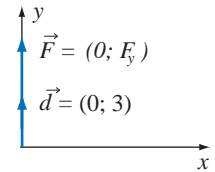
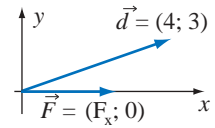
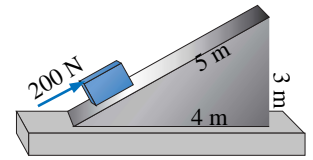
$$4 F_x = 1000 \text{ J, ce qui donne : } F_x = 250 \text{ N.}$$

- c) Pour monter verticalement le bloc à une hauteur de 3 m, il faut effectuer le même travail. La description algébrique des vecteurs serait :

$$\vec{F} = (0; F_y) \text{ et } \vec{d} = (0; 3)$$

Le travail effectué est le même, on a donc :

$$3 F_y = 1000, \text{ ce qui donne } F_y = 333 \text{ N.}$$



10. a) En représentant les vecteurs algébriquement, on a :

$$\vec{F} = (1500; 0) \text{ et } \vec{d} = (12; 5)$$

Le travail est donné par le produit scalaire, soit :

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d} = (1500; 0) \cdot (12; 5) = 18\,000 \text{ J} = 18 \text{ kJ}$$

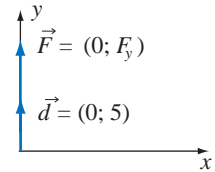
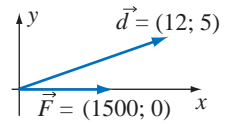
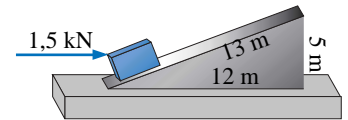
- b) Pour monter verticalement le bloc à une hauteur de 5 m, il faut effectuer le même travail. La description algébrique des vecteurs serait :

$$\vec{F} = (0; F_y) \text{ et } \vec{d} = (0; 5)$$

Le travail effectué est le même, on a donc :

$$5 F_y = 18\,000, \text{ ce qui donne } F_y = 3\,600 \text{ N.}$$

La force nécessaire serait de 3,6 kN.



11. Le déplacement étant horizontal, on a :

$$\vec{d} = (10; 0)$$

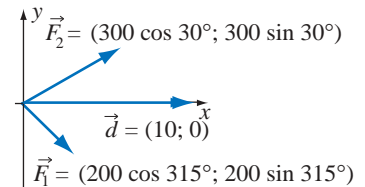
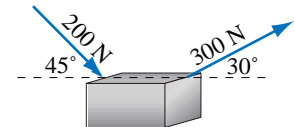
Les vecteurs algébriques sont :

$$\vec{F}_1 = (200 \cos 315^\circ; 200 \sin 315^\circ) \text{ et}$$

$$\vec{F}_2 = (300 \cos 30^\circ; 300 \sin 30^\circ)$$

Puisque le produit scalaire est distributif sur l'addition des vecteurs, on peut procéder comme suit :

$$T = \vec{d} \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = 10 (200 \cos 315^\circ + 300 \cos 30^\circ) \\ = 4\,012 \text{ J soit environ } 4 \text{ kJ.}$$



12. a) Soit  $P(x; y; z)$  un point quelconque de  $\mathbf{R}^3$ .  $P$  est dans le plan  $\Pi$  si et seule-

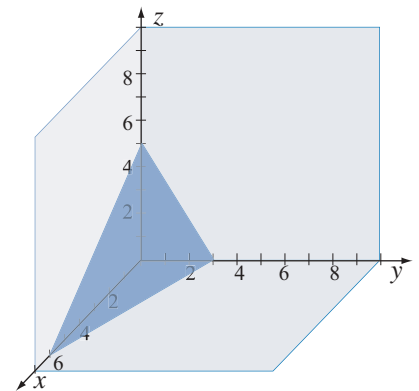
ment si le vecteur  $\vec{QP} = (x - 10; y + 2; z)$  est perpendiculaire au vecteur

$\vec{N} = (5; 10; 6)$  normal au plan, c'est-à-dire si et seulement si le produit scalaire de ces vecteurs est nul.

$$\vec{N} \cdot \vec{QP} = (5; 10; 6) \cdot (x - 10; y + 2; z) = 0$$

Ce qui donne :  $5x - 50 + 10y + 20 + 6z = 0$

et :  $5x + 10y + 6z = 30$

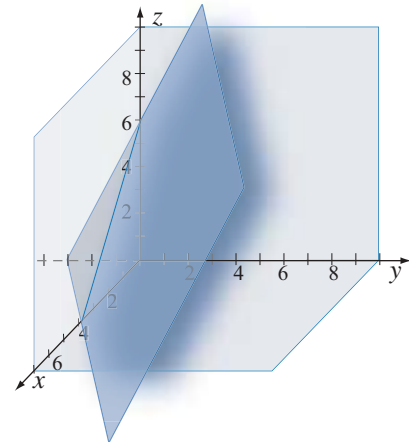


b) Soit  $P(x; y; z)$  un point quelconque de  $\mathbf{R}^3$ .  $P$  est dans le plan  $\Pi$  si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{QP} = (x - 2; y; z - 3)$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{N} = (3; -4; 2)$  normal au plan, c'est-à-dire si et seulement si le produit scalaire de ces vecteurs est nul.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{QP} = (3; -4; 2) \cdot (x - 2; y; z - 3) = 0$$

Ce qui donne :  $3x - 6 - 4y + 20 + 2z - 6 = 0$

$$\text{et : } 3x - 4y + 2z = 12$$

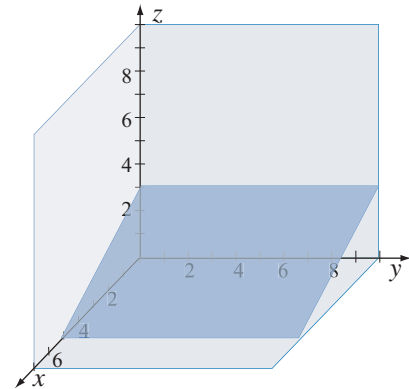


c) Soit  $P(x; y; z)$  un point quelconque de  $\mathbf{R}^3$ .  $P$  est dans le plan  $\Pi$  si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{QP} = (x; y; z - 3)$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{N} = (3; 0; 5)$  normal au plan, c'est-à-dire si et seulement si le produit scalaire de ces vecteurs est nul.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{QP} = (3; 0; 5) \cdot (x; y; z - 3) = 0$$

Ce qui donne :  $3x + 5z - 15 = 0$

$$\text{et : } 3x + 5z = 15$$

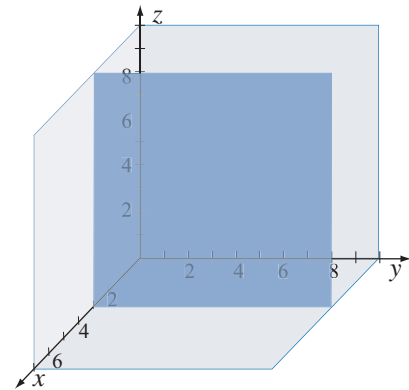


d) Soit  $P(x; y; z)$  un point quelconque de  $\mathbf{R}^3$ .  $P$  est dans le plan  $\Pi$  si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{QP} = (x - 3; y - 4; z - 5)$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{N} = (1; 0; 0)$  normal au plan, c'est-à-dire si et seulement si le produit scalaire de ces vecteurs est nul.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{QP} = (1; 0; 0) \cdot (x - 3; y - 4; z - 5) = 0$$

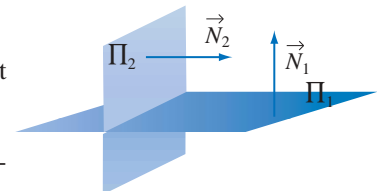
Ce qui donne :  $x - 3 = 0$

$$\text{et : } x = 3$$



13. Les deux plans ont un même vecteur normal  $\vec{N} = (2; -3; 5)$ . Les vecteurs normaux sont parallèles, les plans le sont donc également.

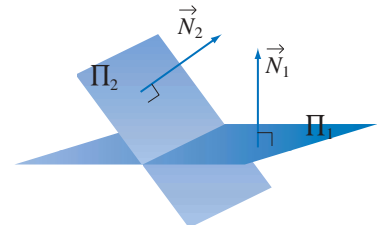
14. Le vecteur normal à  $\Pi_1$  est  $\vec{N}_1 = (3; 4; 5)$  et le vecteur normal à  $\Pi_2$  est  $\vec{N}_2 = (2; -4; 2)$ . Le produit scalaire de ces vecteurs donne :  
 $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = (3; 4; 5) \cdot (2; -4; 2) = 6 - 16 + 10 = 0$ . Les vecteurs sont donc perpendiculaires. Les plans sont donc également perpendiculaires.



15. Les vecteurs normaux sont  $\vec{N}_1 = (2; -1; 3)$  et  $\vec{N}_2 = (1; -4; 5)$ . Ces vecteurs ne sont pas colinéaires puisque le rapport des composantes de même rang n'est pas constant. Ils ne sont pas perpendiculaires non plus puisque :

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = (2; -1; 3) \cdot (1; -4; 5) = 2 + 4 + 15 = 21 \neq 0.$$

Les plans ne sont ni parallèles ni perpendiculaires, ils sont donc concourants ou sécants.





b) Le vecteur  $\vec{D} = (-2; -4)$  est un vecteur directeur de la droite. On connaît le point  $R(3; -5)$  sur la droite  $\Delta$ . On a alors :

$$\vec{RQ} = (6; -5) - (3; -5) = (3; 0)$$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

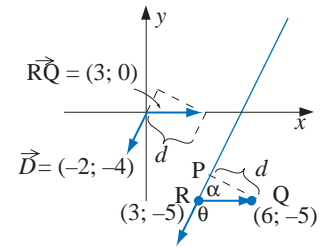
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{D}\|} \right) = \arccos \left( \frac{-6}{\sqrt{9} \sqrt{20}} \right) \approx 116,57^\circ$$

Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 180^\circ - \theta = 63,43^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \sin \alpha = 3 \sin 63,43^\circ = 2,683...$$

La distance est d'environ 2,68 unités.



21. a) Le vecteur  $\vec{D} = (-2; 4)$  est un vecteur directeur des deux droites. On connaît le point  $R(6; 8)$  sur la droite  $\Delta_1$  et le point  $Q(-3; 7)$  sur la droite  $\Delta_2$ . On a alors :

$$\vec{RQ} = (-3; 7) - (6; 8) = (-9; -1)$$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{D}\|} \right) = \arccos \left( \frac{14}{\sqrt{82} \sqrt{20}} \right) \approx 69,78^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 69,78^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{82} \sin 69,78^\circ = 8,497...$$

La distance est d'environ 8,50 unités.

b) Le vecteur  $\vec{N} = (2; 3)$  est normal aux deux droites. De plus le point  $R(0; 6)$  est sur la droite  $\Delta_1$  et le point  $Q(0; -8)$  est sur la droite  $\Delta_2$ . On a alors :

$$\vec{RQ} = (0; -8) - (0; 6) = (0; -14)$$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{N}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{N}\|} \right) = \arccos \left( \frac{-42}{\sqrt{196} \sqrt{13}} \right) \approx 146,31^\circ$$

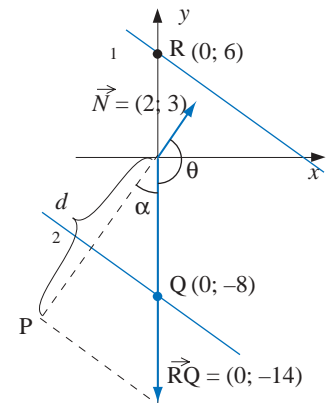
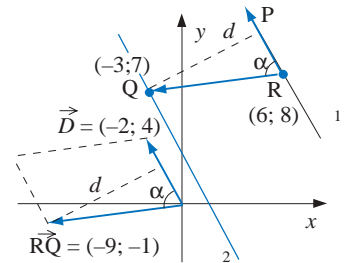
Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 180^\circ - \theta = 33,69^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est

la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \cos \alpha = \sqrt{196} \cos 33,69^\circ = 11,648...$$

La distance est d'environ 11,65 unités.



22. a) Le vecteur normal est  $\vec{N} = (1; 2; 2)$ . Le point  $R(12; 6; 6)$  est un point de  $\Pi$ . On a alors :

$$\vec{RQ} = (12; 6; 6) - (2; 3; 4) = (10; 3; 2)$$

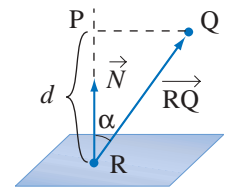
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{N}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{N}\|} \right) = \arccos \left( \frac{20}{\sqrt{113} \sqrt{9}} \right) \approx 51,16^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 51,16^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \cos \alpha = \sqrt{113} \cos 51,16^\circ = 6,666...$$

La distance est donc de  $6,\overline{7}$  unités.



b) Le vecteur normal est  $\vec{N} = (3; -2; 7)$ . Le point  $R(15; 0; 0)$  est un point de  $\Pi$ . On a alors :

$$\vec{RQ} = (-6; 4; -3) - (15; 0; 0) = (-21; 4; -3).$$

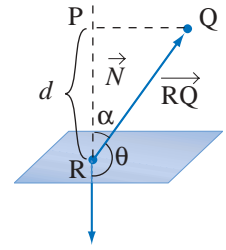
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{N}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{N}\|} \right) = \arccos \left( \frac{-92}{\sqrt{466} \sqrt{62}} \right) \approx 122,77^\circ$$

Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 180^\circ - \theta = 57,23^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \cos \alpha = \sqrt{466} \cos 57,23^\circ = 11,684\dots$$

La distance est donc de 11,68 unités.



23. a) Le vecteur normal aux deux plans est  $\vec{N} = (3; 2; -5)$ .  $R(-4; 0; 0)$  est un point de  $\Pi_1$  et  $Q(8; 5; 0)$  est un point de  $\Pi_2$ . D'où  $\vec{RQ} = (8; 5; 0) - (-4; 0; 0) = (12; 5; 0)$ .

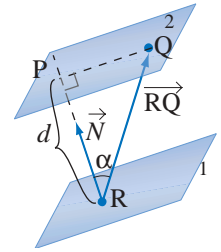
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{N}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{N}\|} \right) = \arccos \left( \frac{46}{\sqrt{169} \sqrt{38}} \right) \approx 54,97^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 54,97^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \cos \alpha = 13 \cos 54,97^\circ = 7,462\dots$$

La distance est donc de 7,46 unités.



b) Le vecteur normal aux deux plans est  $\vec{N} = (1; -3; 7)$ .  $R(0; 5; 0)$  est un point de  $\Pi_1$  et  $Q(10; -6; 2)$  est un point de  $\Pi_2$ . D'où  $\vec{RQ} = (10; -6; 2) - (0; 5; 0) = (10; -11; 2)$ .

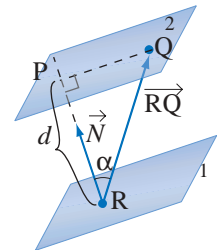
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{N}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{N}\|} \right) = \arccos \left( \frac{57}{\sqrt{225} \sqrt{59}} \right) \approx 60,35^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 60,35^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \cos \alpha = 13 \cos 54,97^\circ = 7,462\dots$$

La distance est d'environ 7,42 unités.



c) Le vecteur normal est  $\vec{N} = (3; -4; 5)$ .  $R(2; 4; -5)$  est un point de  $\Pi_1$  et  $Q(7; -6; 8)$  est un point de  $\Pi_2$ .

$$\vec{RQ} = (7; -6; 8) - (2; 4; -5) = (5; -10; 13).$$

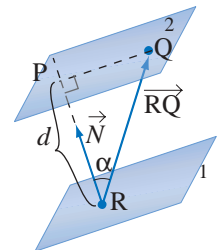
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{N}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{N}\|} \right) = \arccos \left( \frac{120}{\sqrt{294} \sqrt{50}} \right) \approx 8,21^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 8,21^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \cos \alpha = \sqrt{294} \cos 8,21^\circ = 16,970\dots$$

La distance est de 16,97 unités.



24. a) Le vecteur  $\vec{D} = (-3; 8; 2)$  est un vecteur directeur de la droite.

On connaît le point  $R(2; 6; -5)$  sur la droite  $\Delta$ . On a alors :

$$\vec{RQ} = (5; -1; 7) - (2; 6; -5) = (3; -7; 12)$$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

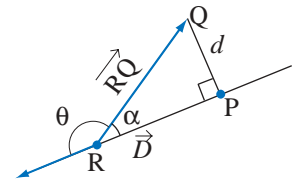
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{D}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-41}{\sqrt{202}\sqrt{77}}\right) \approx 109,19^\circ$$

Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 180^\circ - \theta = 70,81^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{202} \sin 70,81^\circ = 13,422\dots$$

La distance est d'environ 13,42 unités.



b) Le vecteur  $\vec{D} = (7; -4; 8)$  est un vecteur directeur de la droite.

On connaît le point  $R(7; 5; -8)$  sur la droite  $\Delta$ . On a alors :

$$\vec{RQ} = (8; 4; 2) - (7; 5; -8) = (1; -1; 10)$$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

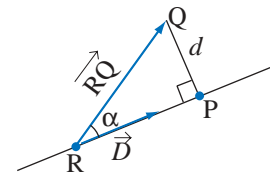
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{D}\|}\right) = \arccos\left(\frac{91}{\sqrt{102}\sqrt{129}}\right) \approx 37,50^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 37,50^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{102} \sin 37,50^\circ = 6,148\dots$$

La distance est d'environ 6,15 unités.



c) Le point  $R(2; -3; 1)$  est un point de la droite. Le vecteur directeur est équipollent au vecteur  $\vec{RS}$ .

Les vecteurs sont  $\vec{RQ} = (5; -5; 11)$  et  $\vec{D} = \vec{RS} = (3; 0; -3)$ . L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

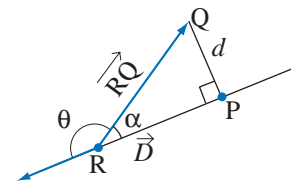
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{D}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-18}{\sqrt{171}\sqrt{18}}\right) \approx 108,93^\circ$$

Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 180^\circ - \theta = 71,07^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\vec{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{171} \sin 71,07^\circ = 12,369\dots$$

La distance est donc d'environ 12,37 unités.



25. a) Le vecteur  $\vec{D} = (-2; 4; -5)$  est un vecteur directeur des deux droites. On connaît le point  $R(6; 2; -3)$  sur la droite  $\Delta_1$  et le point  $Q(4; -7; 8)$  sur la droite  $\Delta_2$ . On a alors :

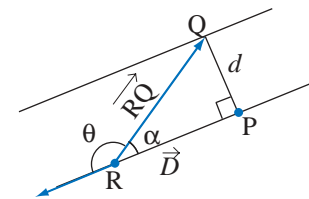
$$\vec{RQ} = (4; -7; 8) - (6; 2; -3) = (-2; -9; 11)$$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\vec{RQ}\| \|\vec{D}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-87}{\sqrt{206}\sqrt{45}}\right) \approx 154,64^\circ$$

Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 80^\circ - \theta = 25,36^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\vec{RQ}$ . On trouve alors :



$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\overline{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{206} \sin 25,36^\circ = 6,147\dots$$

La distance est d'environ 6,15 unités.

- b) Le vecteur  $\vec{D} = (-3; 5; 2)$  est un vecteur directeur des deux droites. On connaît le point  $R(4; 7; -5)$  sur la droite  $\Delta_1$  et le point  $Q(8; -3; 4)$  sur la droite  $\Delta_2$ . On a alors :

$$\overline{RQ} = (8; -3; 4) - (4; 7; -5) = (4; -10; 9)$$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

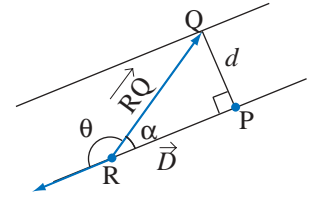
$$\theta = \arccos \left( \frac{\overline{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\overline{RQ}\| \|\vec{D}\|} \right) = \arccos \left( \frac{-44}{\sqrt{197} \sqrt{38}} \right) \approx 120,57^\circ$$

Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 80^\circ - \theta = 59,43^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\overline{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\overline{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{197} \sin 59,43^\circ = 12,084\dots$$

La distance est d'environ 12,08 unités.



26. a) Le vecteur  $\vec{N} = (7; 1; -2)$  est un vecteur normal au plan et le vecteur  $\vec{D} = (-2; 4; -5)$  est un vecteur directeur de la droite. À l'aide de ces vecteurs, on peut vérifier si la droite et le plan sont bien parallèles. Le produit scalaire donne :

$$\vec{N} \cdot \vec{D} = (7; 1; -2) \cdot (-2; 4; -5) = -14 + 4 + 10 = 0$$

La droite et le plan sont parallèles puisque les vecteurs sont perpendiculaires.

Considérons le point  $R(0; 0; -6)$  sur le plan  $\Pi$  et le point  $Q(5; 7; -2)$  sur la droite  $\Delta$ . On a alors :

$$\overline{RQ} = (5; 7; -2) - (0; 0; -6) = (5; 7; 4)$$

L'angle entre les vecteurs  $\overline{RQ}$  et  $\vec{D}$  est alors donné par :

$$\theta = \arccos \left( \frac{\overline{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\overline{RQ}\| \|\vec{D}\|} \right) = \arccos \left( \frac{-2}{\sqrt{90} \sqrt{45}} \right) \approx 91,80^\circ$$

Puisque  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = 180^\circ - \theta = 88,20^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\overline{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\overline{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{90} \sin 88,20^\circ = 9,482\dots$$

La distance est d'environ 9,48 unités.

Note : on peut également procéder en considérant les vecteurs  $\vec{N}$  et  $\overline{RQ}$  pour trouver la distance. On utilise alors l'angle complémentaire de  $\alpha$ .

- b) Le vecteur  $\vec{N} = (1; 1; -1)$  est un vecteur normal au plan et le vecteur  $\vec{D} = (-3; 5; 2)$  est un vecteur directeur de la droite. À l'aide de ces vecteurs, on peut vérifier si la droite et le plan sont bien parallèles. Le produit scalaire donne :

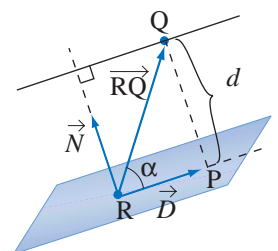
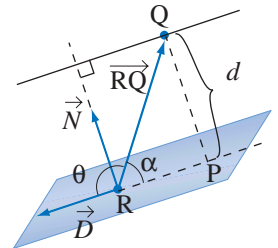
$$\vec{N} \cdot \vec{D} = (1; 1; -1) \cdot (-3; 5; 2) = -3 + 5 - 2 = 0$$

La droite et le plan sont parallèles puisque les vecteurs sont perpendiculaires.

Considérons le point  $R(42; 0; 0)$  sur le plan  $\Pi$  et le point  $Q(4; 7; -5)$  sur la droite  $\Delta$ . On a alors :

$$\overline{RQ} = (4; 7; -5) - (42; 0; 0) = (-38; 7; -5)$$

L'angle entre les vecteurs  $\overline{RQ}$  et  $\vec{D}$  est alors donné par :



$$\theta = \arccos \left( \frac{\overrightarrow{RQ} \cdot \vec{D}}{\|\overrightarrow{RQ}\| \|\vec{D}\|} \right) = \arccos \left( \frac{139}{\sqrt{1518} \sqrt{38}} \right) \approx 54,64^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 54,64^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\overrightarrow{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(Q, \Pi) = \overline{PR} = |\overrightarrow{RQ}| \sin \alpha = \sqrt{1518} \sin 54,64^\circ = 31,774\dots$$

La distance est d'environ 31,77 unités.

## 9.4 EXERCICES

$$1. \ a) \ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(-1-1) + \vec{k}(1+1) = 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Le produit vectoriel donne  $2\vec{j} + 2\vec{k} = (0; 2; 2)$ .

$$b) \ \vec{u} \times \vec{v} = 8\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = (8; -1; -5) \qquad c) \ \vec{u} \times \vec{v} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k} = (5; 7; -1)$$

$$d) \ \vec{u} \times \vec{v} = 60\vec{i} + 48\vec{j} + 135\vec{k} = (60; 48; 135)$$

2. a) Le produit vectoriel donne un vecteur perpendiculaire à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ . On a donc :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-9+10) - \vec{j}(3-4) + \vec{k}(-5+6) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Le vecteur cherché est donc  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1; 1; 1)$ . On peut vérifier que ce vecteur est bien perpendiculaire aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  à l'aide du produit scalaire.

On obtient alors  $\vec{u} \cdot \vec{w} = (1; -3; 2) \cdot (1; 1; 1) = 1 - 3 + 2 = 0$ . Par conséquent, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

On a également  $\vec{v} \cdot \vec{w} = (2; -5; 3) \cdot (1; 1; 1) = 2 - 5 + 3 = 0$ . Par conséquent, les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

b) Le produit vectoriel donne un vecteur perpendiculaire à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ . On a donc :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4-9) - \vec{j}(8-15) + \vec{k}(12+10) = -13\vec{i} + 7\vec{j} + 22\vec{k}.$$

Le vecteur cherché est donc  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-13; 7; 22)$ . On peut vérifier que ce vecteur est bien perpendiculaire aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  à l'aide du produit scalaire.

On obtient alors  $\vec{u} \cdot \vec{w} = (4; -2; 3) \cdot (-13; 7; 22) = -52 - 14 + 66 = 0$ . Par conséquent, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

On a également  $\vec{v} \cdot \vec{w} = (5; 3; 2) \cdot (-13; 7; 22) = -65 + 21 + 44 = 0$ . Par conséquent, les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

c) Le produit vectoriel donne un vecteur perpendiculaire à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ . On a donc :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+12) - \vec{j}(-2-8) + \vec{k}(-6+2) = 13\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Le vecteur cherché est donc  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (13; 10; -4)$ . On peut vérifier que ce vecteur est bien perpendiculaire aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  à l'aide du produit scalaire. On obtient alors :

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2; -1; 4) \cdot (13; 10; -4) = 26 - 10 - 16 = 0$ . Par conséquent, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

On a également  $\vec{v} \cdot \vec{w} = (2; -3; -1) \cdot (13; 10; -4) = 26 - 30 + 4 = 0$ . Par conséquent, les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

d) Le produit vectoriel donne un vecteur perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On a donc :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}(-10 - 12) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(0 + 0) = -22\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Le vecteur cherché est donc  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-22; 0; 0)$ . On peut vérifier que ce vecteur est bien perpendiculaire aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  à l'aide du produit scalaire. On obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (0; -2; 3) \cdot (-22; 0; 0) = 0 + 0 + 0 = 0. \text{ Par conséquent, les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont perpendiculaires.}$$

On a également  $\vec{v} \cdot \vec{w} = (0; 4; 5) \cdot (-22; 0; 0) = 0 + 0 + 0 = 0$ . Par conséquent, les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont perpendiculaires.

$$3. \ a) \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 7 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(14 + 15) - \vec{j}(-10 - 12) + \vec{k}(25 - 28) = 29\vec{i} + 22\vec{j} - 3\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est donnée par le module du produit vectoriel, soit :

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{29^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1334} \approx 36,5 \text{ unités d'aire.}$$

$$b) \quad \vec{AB} = (3; 2; 5) \text{ et } \vec{AD} = (5; -6; 8), \text{ d'où :}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -6 & 8 \end{vmatrix} = \vec{i}(16 + 30) - \vec{j}(24 - 25) + \vec{k}(-18 - 10) = 46\vec{i} + \vec{j} - 28\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est donnée par le module du produit vectoriel, soit :

$$\|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \sqrt{46^2 + 1^2 + (-28)^2} = \sqrt{2901} \approx 53,9 \text{ unités d'aire.}$$

4. a) L'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs

$\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ . On trouve  $\vec{AB} = (-2; -1; 9)$  et  $\vec{AC} = (-5; 3; 3)$ , d'où :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 9 \\ -5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3 - 27) - \vec{j}(-6 + 45) + \vec{k}(-6 - 5) = -30\vec{i} - 39\vec{j} - 11\vec{k}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-30)^2 + (-39)^2 + (-11)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2542}}{2} \approx 25,2 \text{ unités d'aire.}$$

- b) L'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs

$\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ . On trouve  $\vec{AB} = (-4; 4; 0)$  et  $\vec{AC} = (-4; 0; 4)$ , d'où

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(16 - 0) - \vec{j}(-16 - 0) + \vec{k}(0 + 16) = 16\vec{i} + 16\vec{j} + 16\vec{k}$$

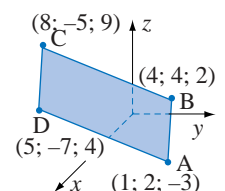
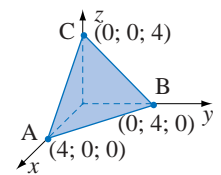
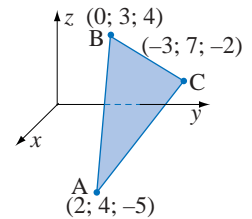
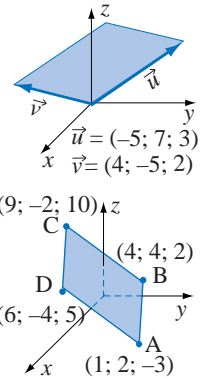
$$A_{\Delta} = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2}}{2} = \frac{\sqrt{768}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \approx 13,9 \text{ unités d'aire.}$$

5. a) Puisque  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| h$ , alors  $h = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$ . Ainsi, pour trouver la hauteur abaissée

sur la base AB, il faut calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  et diviser cette aire par la base du parallélogramme, soit le module du vecteur  $\vec{AB}$ .

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs algébriques  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$ . On trouve :

$\vec{AB} = (3; 2; 5)$  et  $\vec{AD} = (4; -9; 7)$ , d'où :



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -9 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i}(14 + 45) - \vec{j}(21 - 20) + \vec{k}(-27 - 8) = 59\vec{i} - \vec{j} - 35\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme est donnée par le module du produit vectoriel, soit

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{59^2 + (-1)^2 + (-35)^2} = \sqrt{4707} \text{ unités d'aire.}$$

Le module du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$  unités.

La hauteur du parallélogramme est alors

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{4707} \text{ unités d'aire}}{\sqrt{38} \text{ unités}} \approx 11,1 \text{ unités.}$$

- b) En joignant les points milieux d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme. Il faut donc déterminer les coordonnées des points milieux des côtés du quadrilatère. On trouve A(4; 0; 2), B(5; 4; -3), C(1; 5; 2) et D(0; 1; 7). On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = (1; 4; -5) \text{ et } \overrightarrow{AD} = (-4; 1; 5), \text{ d'où :}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -5 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}(20 + 5) - \vec{j}(5 - 20) + \vec{k}(1 + 16) = 25\vec{i} + 15\vec{j} + 17\vec{k}$$

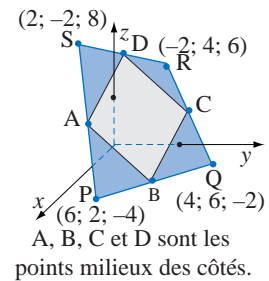
L'aire du parallélogramme est donnée par le module du produit vectoriel, soit :

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{25^2 + 15^2 + 17^2} = \sqrt{1139} \text{ unités d'aire.}$$

Le module du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{42}$  unités.

La hauteur du parallélogramme est alors :

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{1139} \text{ unités d'aire}}{\sqrt{42} \text{ unités}} \approx 5,2 \text{ unités.}$$



6. a) L'aire d'un triangle est le demi-produit de la base par la hauteur. On peut donc trouver la hauteur du triangle en multipliant son aire par 2 et en divisant par la base. L'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

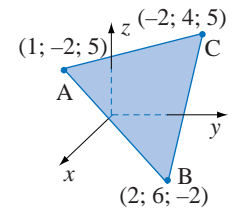
On trouve  $\overrightarrow{AB} = (1; 8; -7)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-3; 6; 0)$ , d'où :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 8 & -7 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 + 42) - \vec{j}(0 - 21) + \vec{k}(6 + 24) = 42\vec{i} + 21\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{42^2 + 21^2 + 30^2}}{2} = \frac{\sqrt{3105}}{2} \approx 27,9 \text{ unités d'aire.}$$

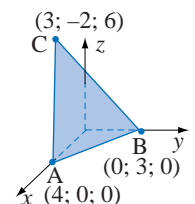
Le module du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 8^2 + (-7)^2} = \sqrt{114}$  unités.

La hauteur est  $h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{3105} \text{ unités d'aire}}{\sqrt{114} \text{ unités}} \approx 5,2 \text{ unités.}$



- b) On trouve  $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; 0)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-1; -2; 6)$ , d'où :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(18 - 0) - \vec{j}(-24 - 0) + \vec{k}(8 + 3) = 18\vec{i} + 24\vec{j} + 11\vec{k}$$



$$A_{\Delta} = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{18^2 + 24^2 + 11^2}}{2} = \frac{\sqrt{1021}}{2} \approx 16,0 \text{ unités d'aire.}$$

Le module du vecteur  $\vec{AB}$  est  $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$  unités.

$$\text{La hauteur est } h = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{1021} \text{ unités d'aire}}{5 \text{ unités}} \approx 6,4 \text{ unités.}$$

7. a) Le produit vectoriel donne un vecteur perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . En multipliant ce vecteur par l'inverse du module du produit vectoriel, on obtiendra un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On a donc :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}(20-12) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-0) = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (8; 0; 0)$  est donc perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . De plus, son module est  $\|\vec{w}\| = 8$ . Le vecteur

$\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{8}(8; 0; 0) = (1; 0; 0)$  est alors un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On remarque que le vecteur

$\frac{-\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = (-1; 0; 0)$  est également un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$$b) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(20-18) - \vec{j}(-8-0) + \vec{k}(12-0) = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}$$

Le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (2; 8; 12)$  est donc perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . De plus, son module est

$\|\vec{w}\| = \sqrt{2^2 + 8^2 + 12^2} = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$ . Le vecteur  $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{2\sqrt{53}}(2; 8; 12) = \left(\frac{1}{\sqrt{53}}; \frac{4}{\sqrt{53}}; \frac{6}{\sqrt{53}}\right)$  est alors un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

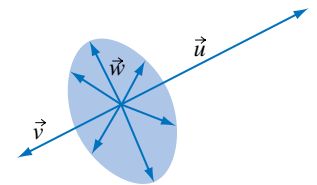
$$c) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-16+10) - \vec{j}(12-20) + \vec{k}(6-16) = -6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$

Le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-6; 8; -10)$  est donc perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . De plus, son module est

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2 + (-10)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ . Le vecteur  $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{10\sqrt{2}}(-6; 8; -10) = \left(\frac{-3}{5\sqrt{2}}; \frac{4}{5\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$  est alors un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$$d) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(4-4) - \vec{j}(-6+6) + \vec{k}(12-12) = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Le produit vectoriel est nul, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont donc parallèles et on ne peut trouver un vecteur perpendiculaire par ce procédé. Dans un tel cas, tout vecteur perpendiculaire à  $\vec{u}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$ . Il existe une infinité de vecteurs unitaires perpendiculaires à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Ainsi, tous les vecteurs perpendiculaires à  $\vec{u}$  et dont l'extrémité est sur un cercle de rayon unitaire centré à l'origine du vecteur  $\vec{u}$  satisfont à la condition.



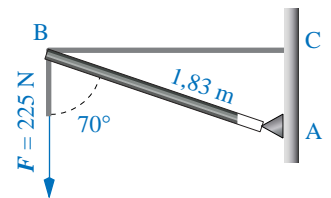
8. a) Géométriquement, on peut procéder de deux façons.

On peut trouver le bras du moment, soit la longueur BC et multiplier par l'intensité de la force, ce qui donne :

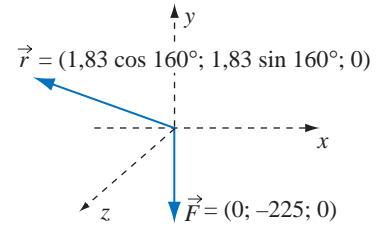
$$\vec{BC} = 183 \sin 70^\circ \text{ et } \vec{M} = 1,83 \sin 70^\circ \times 225 \approx 387 \text{ N}\cdot\text{m} \approx 387 \text{ J.}$$

On peut également faire le produit de la longueur BA par la composante de la force qui est perpendiculaire à BA, ce qui donne :

$$\vec{M} = 1,83 \times 225 \sin 70^\circ \approx 387 \text{ N}\cdot\text{m} \approx 387 \text{ J.}$$



Algébriquement, on représente la situation par des vecteurs algébriques dans un espace tridimensionnel en considérant que le bras et la force sont dans le plan  $xy$ . On a alors  $\vec{F} \approx (225 \cos 270^\circ; 225 \sin 270^\circ; 0) = (0; -225; 0)$  et  $\vec{r} = (1,83 \cos 160^\circ; 1,83 \sin 160^\circ; 0)$ , représentés graphiquement ci-contre. Le moment algébrique est alors :



$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1,83 \cos 160^\circ & 1,83 \sin 160^\circ & 0 \\ 0 & -225 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + (1,83 \cos 160^\circ \times -225)\vec{k}$$

On obtient donc  $0\vec{i} + 0\vec{j} + 387\vec{k}$ , la rotation est de sens antihoraire puisque le coefficient de  $\vec{k}$  est positif et son intensité est le module du vecteur, soit  $M = 387 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

b) Géométriquement, on a :

$$\|\vec{r}\| = \overline{AB} = \sqrt{2^2 + (1,5)^2} = 2,5 \text{ m};$$

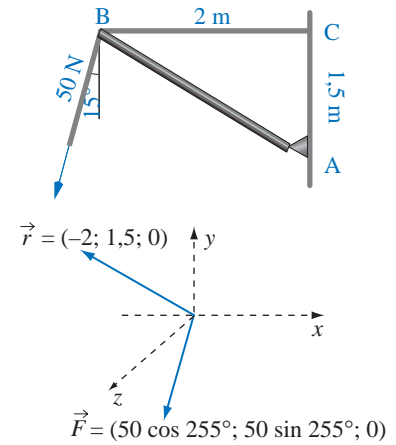
$$\theta = 15^\circ + \arctan\left(\frac{2}{1,5}\right) = 68,13^\circ$$

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \sin\theta = 2,5 \times 50 \times \sin 68,13^\circ = 116 \text{ N}\cdot\text{m}$$

On a donc  $M = 116 \text{ N}\cdot\text{m}$  et la rotation est manifestement de sens antihoraire.

Algébriquement, les vecteurs sont :

$\vec{r} = (-2; 1,5; 0)$  et  $\vec{F} = (50 \cos 255^\circ; 50 \sin 255^\circ; 0)$ , représentés graphiquement ci-contre. Le produit vectoriel est :



$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1,5 & 0 \\ 50 \cos 255^\circ & 50 \sin 255^\circ & 0 \end{vmatrix} = (-100 \sin 255^\circ - 75 \cos 255^\circ)\vec{k}$$

Le module du produit vectoriel est alors :

$$M = (-100 \sin 255^\circ - 75 \cos 255^\circ) \approx 116 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

9. a) Pour avoir équilibre de rotation, il faut que les moments soient égaux.

$$0,2 \times 1\,220 \sin 65^\circ = 0,35 F \sin 55^\circ, \text{ d'où : } F = \frac{0,2 \times 1\,220 \sin 65^\circ}{0,35 \sin 55^\circ} \approx 771 \text{ N}.$$

Algébriquement, on doit avoir :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,2 & 0 & 0 \\ 1220 \cos 245^\circ & 1220 \sin 245^\circ & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,35 & 0 & 0 \\ F \cos 305^\circ & F \sin 305^\circ & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

D'où :

$$(-0,2 \times 1220 \sin 245^\circ)\vec{k} + (0,35 \times F \sin 305^\circ)\vec{k} = \vec{0}, \text{ qui donne : } -0,2 \times 1220 \sin 245^\circ + 0,35 F \sin 305^\circ = 0 \text{ et } F \approx 771 \text{ N}.$$

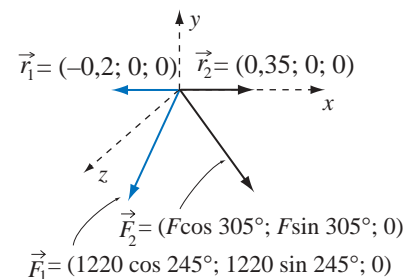
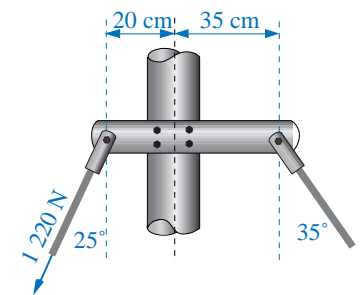
b) Pour avoir équilibre de translation, il faut que :

$$1\,220 \cos 245^\circ + F \cos 305^\circ = 0, \text{ ce qui donne :}$$

$$F = \frac{-1220 \cos 245^\circ}{\cos 305^\circ} = 899 \text{ N}.$$

c) Non

d) Les discussions sont ouvertes.



10. La composante  $F_x$  est parallèle au bras, elle n'a donc aucun moment par rapport à l'axe. La composante  $F_x$  ne peut faire tourner le système par rapport à l'axe. Elle peut, si elle est trop grande, entraîner une déformation du bras, ce qui ne devrait pas être le cas pour une force de 500 N (L'étude des contraintes internes relève de la résistance des matériaux). Considérons donc que le matériau a été choisi pour résister facilement à une force de 500 N. Seule la composante  $F_y$  a un moment par rapport à l'axe de l'essieu. Les triangles ABC et AFG sont semblables et on a

$$\cos \angle CAB = \frac{F_y}{F_{yz}} = \frac{0,35}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2}}, \text{ d'où } F_y = \frac{0,35}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2}} F_{yz}$$

Les triangles ACD et AGI sont semblables et on a :

$$\cos \angle CAD = \frac{F_{yz}}{F} = \frac{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2}}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2 + 0,27^2}},$$

$$\text{d'où } F_{yz} = \frac{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2}}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2 + 0,27^2}} F$$

On a donc :

$$F_y = \frac{0,35}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2}} \times \frac{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2}}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2 + 0,27^2}} F = \frac{0,35}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2 + 0,27^2}} \times 500 \approx 327,6 \text{ N.}$$

Le moment est alors :  $M = 327,6 \text{ N} \times 0,30 \text{ m} = 98,3 \text{ N}\cdot\text{m}$  et l'effet est de sens horaire.

Algébriquement, on peut déterminer un vecteur dont le module est de 500 N et la direction est celle de la force appliquée. On a alors :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (F_x; F_y; F_z) \\ &= \frac{500}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2 + 0,27^2}} (0,27; 0,35; -0,30) \end{aligned}$$

De plus,  $\vec{r} = (0; 0,35; 0)$  puisque l'on veut déterminer le moment par rapport à l'axe de l'essieu.

Le produit vectoriel donne :

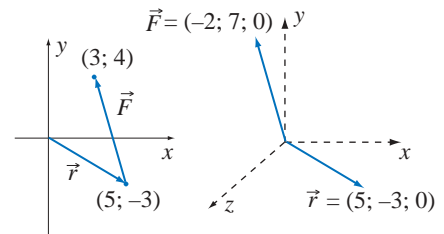
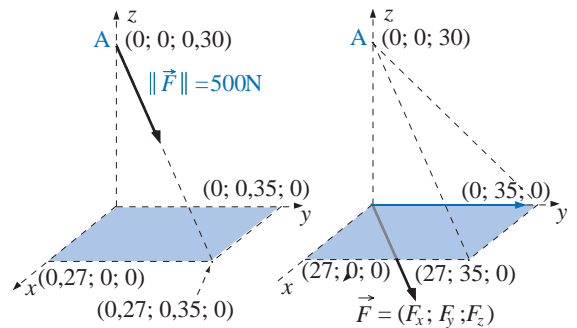
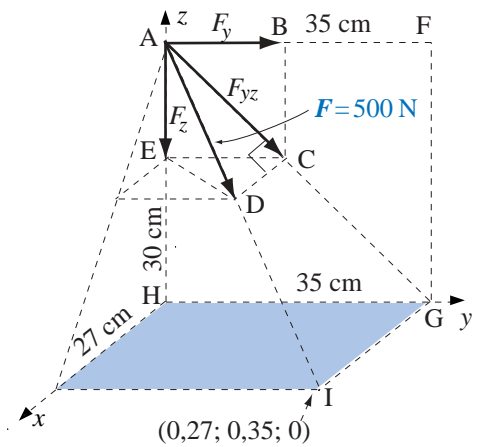
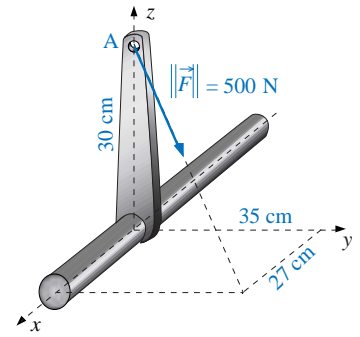
$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,35 & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (0,35F_z)\vec{i} - 0\vec{j} + (-0,35F_x)\vec{k}$$

Le moment par rapport à l'axe est donc :

$$M = 0,35F_z = 0,35 \times \frac{-0,30 \times 500}{\sqrt{0,35^2 + 0,30^2 + 0,27^2}} \approx -98,3 \text{ N}\cdot\text{m.} \text{ Le moment est négatif car la rotation est de sens horaire.}$$

11. a)  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 29\vec{k}.$

On a donc  $M = 29 \text{ Nm}$ . Le moment est positif car la rotation est de sens antihoraire.

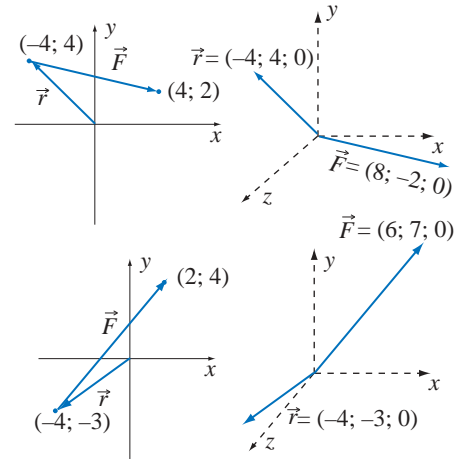


$$b) \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} - 24\vec{k}.$$

On a donc  $M = 24 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Le moment est négatif car la rotation est de sens horaire.

$$c) \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} - 10\vec{k}.$$

On a donc  $M = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Le moment est négatif car la rotation est de sens horaire.

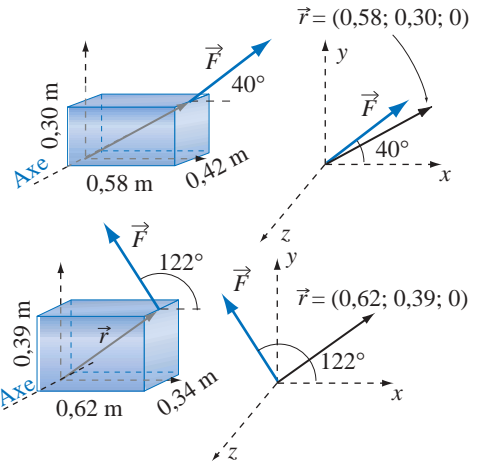


$$12. a) \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,58 & 0,30 & 0 \\ 500 \cos 40^\circ & 500 \sin 40^\circ & 0 \end{vmatrix} = 71,5\vec{k}.$$

On a donc  $M = 71,5 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Le moment est positif, la rotation est de sens antihoraire.

$$b) \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,62 & 0,39 & 0 \\ 500 \cos 122^\circ & 500 \sin 122^\circ & 0 \end{vmatrix} = 366,23\vec{k}.$$

On a donc  $M = 366,23 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Le moment est positif, la rotation est de sens antihoraire.

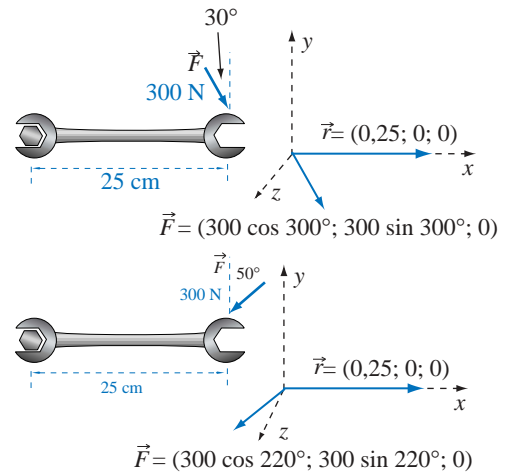


$$13. a) \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 300 \cos 300^\circ & 300 \sin 300^\circ & 0 \end{vmatrix} = 0,25 \times 300 \sin 330^\circ \vec{k} = -64,95\vec{k}.$$

On a donc  $M \approx 65 \text{ J}$ . Le moment est négatif, la rotation est de sens horaire.

$$b) \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 300 \cos 220^\circ & 300 \sin 220^\circ & 0 \end{vmatrix} = 0,25 \times 300 \sin 220^\circ \vec{k} = -48,21\vec{k}.$$

On a donc  $M \approx 48 \text{ J}$ . Le moment est négatif, la rotation est de sens horaire.

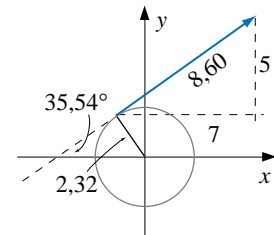


$$14. a) R_x = 7; R_y = 5; \|\vec{R}\| = 8,60; \theta = 35,54^\circ;$$

$$\sum_{i=1}^3 \vec{M}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (15 - 6)\vec{k} + (-9 - 0)\vec{k} + (-20 - 0)\vec{k} = -20\vec{k}.$$

Le moment est négatif, la rotation est de sens horaire.

$$d\|\vec{R}\| = M \text{ donne } 8,60d = 20, \text{ d'où } d = 2,324\dots$$



Le vecteur est tangent à un cercle de rayon 2,324 unités centré à (0; 0), son module est 8,60 unités. Il fait un angle de 35,54° avec l'horizontale et imprime une rotation de sens horaire.

b)  $R_x = -3; R_y = 0; \|\vec{R}\| = 3; \theta = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ ;

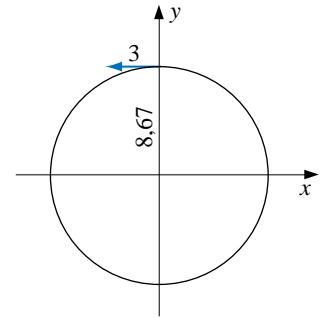
$$\sum_{i=1}^3 \vec{M}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (12 - 6)\vec{k} + (-2 + 12)\vec{k} + (10 - 0)\vec{k} = 26\vec{k}.$$

Le moment est positif, la rotation est de sens antihoraire.

$d\|\vec{R}\| = M$  donne  $3d = 26$ , d'où  $d = 8,666\dots$

Le vecteur est tangent à un cercle de rayon 8,67 unités centré à (0; 0), son module est 3 unités. Il fait un angle de 180° avec l'horizontale et imprime une rotation de sens antihoraire.



c)  $R_x = 4,50; R_y = 5,52; \|\vec{R}\| = 7,13; \theta = 50,83^\circ$ ;

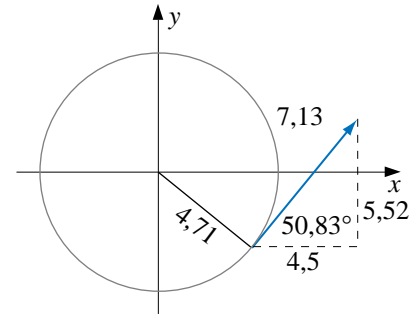
$$\sum_{i=1}^3 \vec{M}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 \cos 60^\circ & 6 \sin 60^\circ & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 \cos 135^\circ & 4 \sin 135^\circ & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 0 \\ 5 \cos 330^\circ & 5 \sin 330^\circ & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 18 \sin 60^\circ \vec{k} - 12(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)\vec{k} + 15 \cos 330^\circ \vec{k} = 33,578\dots \vec{k}.$$

Le moment est positif, la rotation est de sens antihoraire.

$d\|\vec{R}\| = M$  donne  $7,13d = 33,578\dots$ , d'où  $d = 4,709\dots$

Le vecteur est tangent à un cercle de rayon 4,71 unités centré à (0; 0), son module est 7,13 unités. Il fait un angle de 50,83° avec l'horizontale et imprime une rotation de sens antihoraire.



15. a) Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$ .

Les forces et les bras sont :

$\vec{r}_A = (0; 0), \vec{F}_A = (A_x; A_y),$

$\vec{r}_1 = (3,5; 0), \vec{F}_1 = (900 \cos 270^\circ; 900 \sin 270^\circ) = (0; -900)$

$\vec{r}_2 = (7; 0), \vec{F}_2 = (500 \cos 270^\circ; 500 \sin 270^\circ) = (0; -500)$

$\vec{r}_T = (7; 0), \vec{T} = (T \cos 140^\circ; T \sin 140^\circ).$

La somme des produits vectoriels donne :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3,5 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 0 & 0 \\ T \cos 140^\circ & T \sin 140^\circ & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

D'où :  $0 - 3\ 150 - 3\ 500 + 7T \sin 140^\circ = 0$

et :  $7T \sin 140^\circ = 6\ 650$  qui donne  $T = 1\ 477,937\dots \approx 1\ 478$  N

La condition d'équilibre de translation est  $\sum F_x = 0$  et  $\sum F_y = 0$ .

On a alors :

$T_y = T \sin 140^\circ = 950$  N et

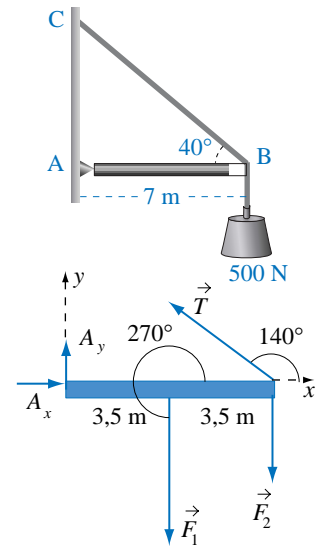
$T_x = T \cos 140^\circ = -1\ 132,165\dots \approx -1\ 132$  N

$A_x + T_x = 0$  d'où  $A_x = -T_x = 1\ 132$  N

$A_y + T_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$

d'où  $A_y + 950 - 900 - 500 = 0$

et  $A_y = 450$  N



b) Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$ .

Les forces et les bras sont :

$$\vec{r}_A = (0; 0), \vec{F}_A = (A_x; A_y),$$

$$\vec{r}_1 = (3,5; 0), \vec{F}_1 = (900 \cos 270^\circ; 900 \sin 270^\circ) = (0; -900)$$

$$\vec{r}_2 = (7; 0), \vec{F}_2 = (500 \cos 270^\circ; 500 \sin 270^\circ) = (0; -500)$$

$$\vec{r}_T = (5; 0), \vec{T} = (T \cos 130^\circ; T \sin 130^\circ).$$

La somme des produits vectoriels donne :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3,5 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ T \cos 130^\circ & T \sin 130^\circ & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{D'où : } 0 - 3\,150 - 3\,500 + 5T \sin 130^\circ = 0$$

$$\text{et : } 5T \sin 130^\circ = 6\,650 \text{ qui donne } T = 1\,736,191... \approx 1\,736 \text{ N}$$

La condition d'équilibre de translation est  $\sum F_x = 0$  et  $\sum F_y = 0$ .

On a alors :

$$T_y = T \sin 130^\circ = 1\,330 \text{ N et}$$

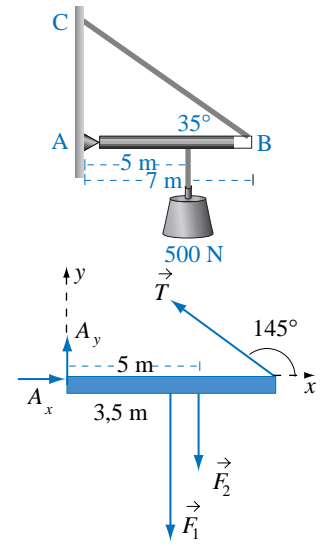
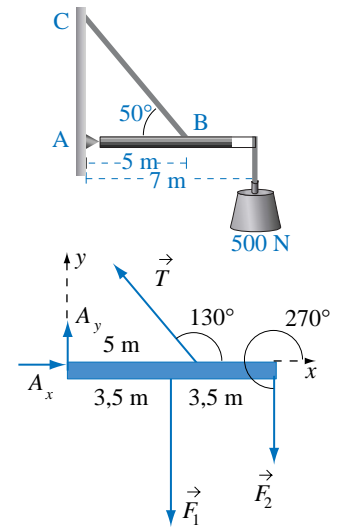
$$T_x = T \cos 130^\circ = -1\,116,002... \approx -1\,116 \text{ N}$$

$$A_x + T_x = 0 \text{ d'où } A_x = -T_x = 1\,116 \text{ N}$$

$$A_y + T_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$$

$$\text{d'où } A_y + 1\,330 - 900 - 500 = 0$$

$$\text{et } A_y = 70 \text{ N}$$



c) Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$ .

Les forces et les bras sont :

$$\vec{r}_A = (0; 0), \vec{F}_A = (A_x; A_y),$$

$$\vec{r}_1 = (3,5; 0), \vec{F}_1 = (900 \cos 270^\circ; 900 \sin 270^\circ) = (0; -900)$$

$$\vec{r}_2 = (5; 0), \vec{F}_2 = (500 \cos 270^\circ; 500 \sin 270^\circ) = (0; -500)$$

$$\vec{r}_T = (7; 0), \vec{T} = (T \cos 145^\circ; T \sin 145^\circ).$$

La somme des produits vectoriels donne :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3,5 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 0 & 0 \\ T \cos 14^\circ & T \sin 145^\circ & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{D'où : } 0 - 3\,150 - 2\,500 + 7T \sin 145^\circ = 0$$

$$\text{et : } 7T \sin 145^\circ = 5\,650 \text{ qui donne } T = 1\,407,210... \approx 1\,407 \text{ N}$$

La condition d'équilibre de translation est  $\sum F_x = 0$  et  $\sum F_y = 0$ .

On a alors :

$$T_y = T \sin 145^\circ = 807,142... \approx 807 \text{ N et}$$

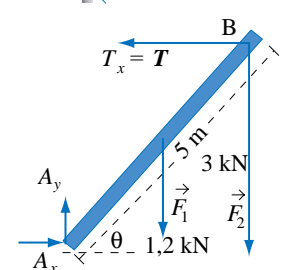
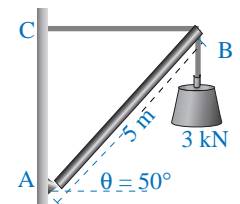
$$T_x = T \cos 145^\circ = -1\,152,719... \approx -1\,153 \text{ N}$$

$$A_x + T_x = 0 \text{ d'où } A_x = -T_x = 1\,153 \text{ N}$$

$$A_y + T_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$$

$$\text{d'où } A_y + 807 - 900 - 500 = 0$$

$$\text{et } A_y = 593 \text{ N}$$



16. a) Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$ .

Les forces et les bras sont :

$$\vec{r}_A = (0; 0), \vec{F}_A = (A_x; A_y),$$

$$\vec{r}_1 = (2,5 \cos 50^\circ; 2,5 \sin 50^\circ), \vec{F}_1 = (1200 \cos 270^\circ; 1200 \sin 270^\circ) = (0; -1200),$$

$$\vec{r}_2 = (5 \cos 50^\circ; 5 \sin 50^\circ), \vec{F}_2 = (3000 \cos 270^\circ; 3000 \sin 270^\circ) = (0; -3000),$$

$$\vec{r}_T = (5 \cos 50^\circ; 5 \sin 50^\circ), \vec{T} = (T \cos 180^\circ; T \sin 180^\circ) = (T_x; 0).$$

Le moment des forces en A est nul, on peut en faire abstraction. La somme des produits

vectoriels donne alors :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2,5\cos 50^\circ & 2,5\sin 50^\circ & 0 \\ 0 & -1200 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5\cos 50^\circ & 5\sin 50^\circ & 0 \\ 0 & -3000 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5\cos 50^\circ & 5\sin 50^\circ & 0 \\ T_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

D'où  $-3\,000\cos 50^\circ - 15\,000\cos 50^\circ - 5\sin 50^\circ T_x = 0$ , cela donne :

$$T_x = -3\,020,759\dots \approx -3\,021 \text{ N.}$$

De plus,  $A_x + T_x = 0$  d'où  $A_x = -T_x = 3\,021 \text{ N}$

$A_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$ , d'où  $A_y = 4\,200 \text{ N}$ .

b) Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$ .

Les forces et les bras sont :

$$\vec{r}_A = (0; 0), \vec{F}_A = (A_x; A_y),$$

$$\vec{r}_1 = (2; 1,5), \vec{F}_1 = (1200 \cos 270^\circ; 1200 \sin 270^\circ) = (0; -1200),$$

$$\vec{r}_2 = (4; 3), \vec{F}_2 = (3000 \cos 270^\circ; 3000 \sin 270^\circ) = (0; -3000),$$

$$\vec{r}_T = (4; 3), \vec{T} = (T \cos 180^\circ; T \sin 180^\circ) = (T_x; 0).$$

Le moment des forces en A est nul, on peut en faire abstraction. La somme des produits vectoriels donne alors :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1,5 & 0 \\ 0 & -1200 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ T_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

D'où  $-2\,400 - 12\,000 - 3T_x = 0$ , cela donne :

$$T_x = -4\,800 \text{ N}$$

De plus,  $A_x + T_x = 0$  d'où  $A_x = -T_x = 4\,800 \text{ N}$

$$A_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$$

$$\text{d'où } A_y = 4\,200 \text{ N}$$

c) Pour que le système soit en équilibre de rotation, il faut que  $\sum M_A = 0$ .

Les forces et les bras sont :

$$\vec{r}_A = (0; 0), \vec{F}_A = (A_x; A_y),$$

$$\vec{r}_1 = (4; 3), \vec{F}_1 = (1200 \cos 270^\circ; 1200 \sin 270^\circ) = (0; -1200),$$

$$\vec{r}_2 = (8 \cos \theta; 8 \sin \theta), \vec{F}_2 = (2400 \cos 270^\circ; 2400 \sin 270^\circ) = (0; -2400),$$

$$\vec{r}_T = (8; 6), \vec{T} = (T \cos 180^\circ; T \sin 180^\circ) = (T_x; 0).$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1200 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 \cos \theta & 8 \sin \theta & 0 \\ 0 & -2400 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & 0 \\ T_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

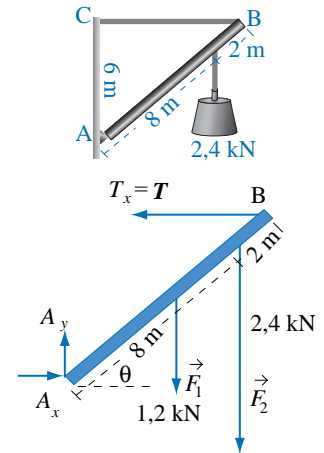
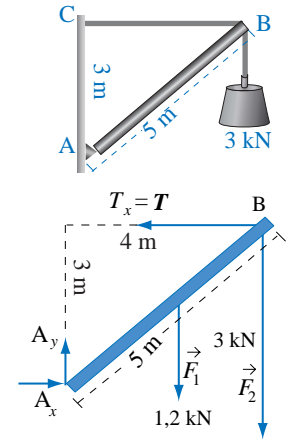
Cela donne :  $-4\,800 - 19\,200 \cos \theta - 6T_x = 0$ , et :

$$T_x = \frac{4\,800 + 19\,200 \cos \theta}{-6} = -3360 \text{ N, puisque } \cos \theta = \frac{4}{5}.$$

On alors :

$$A_x + T_x = 0 \text{ d'où } A_x = -T_x = 3\,360 \text{ N.}$$

$$\text{De plus, } A_y + P_{1y} + P_{2y} = 0, \text{ d'où } A_y = 3\,600 \text{ N.}$$



17. a) Pour trouver une équation cartésienne d'un plan passant par les points A, B et C, on considère un point quelconque P(x; y; z). On détermine alors les vecteurs  $\vec{AP}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ . Le point P est sur le plan cherché si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires. C'est-à-dire si et seulement si le produit mixte des vecteurs est nul. Les vecteurs sont :

$$\overrightarrow{AP} = (x - 3; y + 2; z - 4), \overrightarrow{AB} = (4; -3; -2) \text{ et } \overrightarrow{AC} = (-6; -4; 4)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-4 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -20(x-3) - 4(y+2) - 34(z-4) = 0$$

D'où  $-20x - 4y - 34z + 188 = 0$  ou encore  $10x + 2y + 17z - 94 = 0$ . Le vecteur  $\vec{N} = (10; 2; 17)$  est normal au plan.

b) Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AP} = (x - 2; y + 5; z - 3)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 2)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-8; 7; 0)$ . D'où :

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -14(x-2) - 16(y+5) + 38(z-3) = 0$$

D'où  $-14x - 16y + 38z - 166 = 0$  ou encore  $7x + 8y - 19z + 83 = 0$ . Le vecteur  $\vec{N} = (7; 8; -19)$  est normal au plan.

c) Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AP} = (x; y - 5; z - 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 2)$  et  $\overrightarrow{AC} = (0; 3; 3)$ . D'où :

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x & y-5 & z-2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12x - 0(y-5) + 0(z-2) = 0$$

D'où  $-12x = 0$  ou encore  $x = 0$ . Le vecteur  $\vec{N} = (1; 0; 0)$  est normal au plan.

d) Les vecteurs  $\overrightarrow{AB} = (2; 0; 0)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-8; 0; 0)$  sont colinéaires et ne peuvent décrire un plan.

e) Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AP} = (x - 8; y; z - 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-8; 3; 3)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-2; 8; -2)$ . D'où :

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-8 & y & z-2 \\ -8 & 3 & 3 \\ -2 & 8 & -2 \end{vmatrix} = -30(x-8) - 22y - 58(z-2) = 0$$

D'où  $-30x - 22y - 58z + 356 = 0$  ou encore  $15x + 11y + 29z - 178 = 0$ .

Le vecteur  $\vec{N} = (15; 11; 29)$  est normal au plan.

f) Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AP} = (x - 3; y + 5; z - 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (1; 12; -10)$  et  $\overrightarrow{AC} = (4; 7; 2)$ . D'où :

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-3 & y+5 & z-2 \\ 1 & 12 & -10 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 94(x-3) - 42(y+5) - 41(z-2) = 0$$

D'où  $94x - 42y - 41z - 410 = 0$ . Le vecteur  $\vec{N} = (94; -42; -41)$  est normal au plan.

18. a) Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AP} = (x - 2; y - 1; z - 1)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 1)$ . D'où :

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2) - (-1)(y-1) + 1(z-1) = 0$$

D'où  $2x + y + z = 6$

c) Le vecteur normal est  $\vec{N} = (2; 1; 1)$ . Le point  $R(3; 0; 0)$  est un point de  $\Pi$ .

On a alors :

$$\overrightarrow{RD} = (3; 6; 4) - (3; 0; 0) = (0; 6; 4)$$

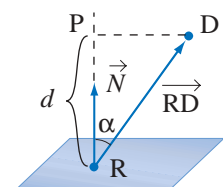
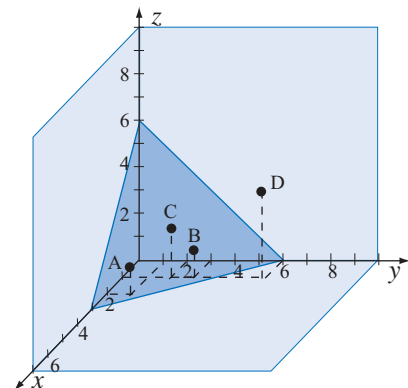
$$\theta = \arccos \left( \frac{\overrightarrow{RD} \cdot \vec{N}}{\|\overrightarrow{RD}\| \|\vec{N}\|} \right) = \arccos \left( \frac{10}{\sqrt{52} \sqrt{6}} \right) \approx 55,52^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 55,52^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\overrightarrow{RQ}$ . On trouve alors :

$$d(D, \Pi_{ABC}) = \overline{PR} = \|\overrightarrow{RD}\| \cos \alpha = \sqrt{52} \cos 55,52^\circ = 4,082\dots$$

On trouve donc  $d(D, \Pi_{ABC}) = 4,08$  unités.



19. a) Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs est donné par la valeur absolue du produit mixte. On a alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -3 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -203.$$

Le volume est donc  $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = 203$  unités de volume.

$$b) \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 8 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 27.$$

Le volume est donc  $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = 27$  unités de volume

20. a) Les positions des particules sont  $P_1(3/4; 1/4; 0)$ ,  $P_2(1/4; 1/4; 1/4)$ ,  $P_3(2/4; 3/4; 2/4)$ ,  $P_4(1; 1; 3/4)$ ,  $P_5(0; 3/4; 3/4)$ .

Les vecteurs sont  $\vec{P_3P_1} = (1/4; -2/4; -2/4)$  et  $\vec{P_3P_5} = (-2/4; 0; 1/4)$ .

L'angle entre ces vecteurs est alors :

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \left( \frac{\vec{P_3P_1} \cdot \vec{P_3P_5}}{\|\vec{P_3P_1}\| \|\vec{P_3P_5}\|} \right) = \arccos \left( \frac{-4/16}{\sqrt{9/16} \sqrt{8/16}} \right) \\ &= \arccos \left( \frac{-4}{\sqrt{72}} \right) \approx 118,13^\circ \end{aligned}$$

L'angle de liaison est de  $118,13^\circ$ .

- b) Les vecteurs sont  $\vec{P_3P} = (x - 2/4; y - 3/4; z - 2/4)$ ,  $\vec{P_3P_1} = (1/4; -2/4; -2/4)$  et  $\vec{P_3P_5} = (-2/4; 0; 1/4)$ .

Pour simplifier les calculs, on peut considérer  $\vec{AP} = 4\vec{P_3P} = (4x - 2; 4y - 3; 4z - 2)$ ,

$\vec{AB} = 4\vec{P_3P_1} = (1; -2; -2)$  et  $\vec{AC} = 4\vec{P_3P_5} = (-2; 0; 1)$ .

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) &= \begin{vmatrix} 4x-2 & 4y-3 & 4z-2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(4x-2) - (-3)(4y-3) - 4(4z-2) \\ &= -8x + 4 + 12y - 9 - 16z + 8 \end{aligned}$$

Ce produit est nul lorsque  $-8x + 12y - 16z + 3 = 0$ .

L'équation du plan de liaison est donc

$$8x - 12y + 16z = 3$$

- c) Pour déterminer si un point est dans le plan, il faut vérifier si ses coordonnées satisfont à l'équation du plan. Pour  $P_2(1/4; 1/4; 1/4)$ , on trouve :

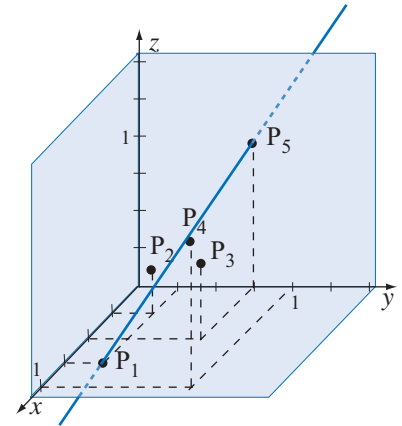
$8 \times (1/4) - 12 \times (1/4) + 16 \times (1/4) = 3$ , qui donne  $3 = 3$  qui est une égalité vraie. Par conséquent,  $P_2$  est dans le plan de liaison.

Pour  $P_4(1; 1; 3/4)$ , on trouve :

$8 \times 1 - 12 \times 1 + 16 \times (3/4) = 3$ , qui donne  $8 = 3$  qui est une égalité fautive. Par conséquent,  $P_4$  n'est pas dans le plan de liaison.

- d) On peut considérer  $P_1(3/4; 1/4; 0)$  et  $\vec{D} = 4\vec{P_1P_5} = (-3; 2; 3)$  comme vecteur directeur. On obtient alors :

$$\Delta_{P_1P_5} = \begin{cases} x = 3/4 - 3t \\ y = 1/4 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$$



e) Considérons le point  $P_1(3/4; 1/4; 0)$  et vecteur directeur  $\overrightarrow{P_1P_5} = (-3/4; 2/4; 3/4)$ .

On a alors :  $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-2/4; 0; 1/4)$

L'angle entre les vecteurs est alors donné par :

$$\theta = \arccos \left( \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_5}}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\| \|\overrightarrow{P_1P_5}\|} \right) = \arccos \left( \frac{9/16}{\sqrt{5/16} \sqrt{22/16}} \right) \approx 30,89^\circ$$

Puisque  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , l'angle entre les côtés du triangle est  $\alpha = \theta = 30,89^\circ$

La distance cherchée est la longueur du côté opposé à l'angle  $\alpha$  et l'hypoténuse est la longueur de  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . On trouve alors :

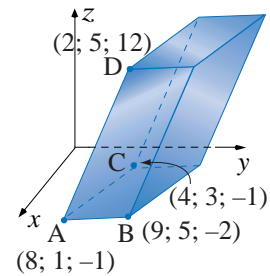
$$d(P_2, \Delta_{P_1P_5}) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| \sin \alpha = \sqrt{5/16} \sin 30,89^\circ = 0,2869\dots$$

La distance est d'environ 0,287 unités.

21. a) Le volume d'un parallélépipède est donné par la valeur absolue du produit mixte des vecteurs définissant ce parallélépipède.

Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AB} = (1; 4; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; 0)$  et  $\overrightarrow{AD} = (-6; 4; 13)$ . On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 238. \text{ On trouve donc 238 unités de volume.}$$

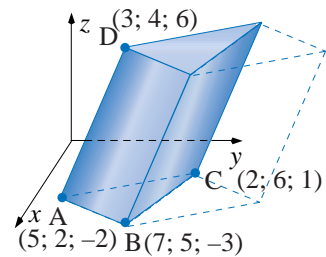


b) Le volume d'un prisme triangulaire est la moitié du volume du parallélépipède construit sur les mêmes vecteurs.

Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AB} = (2; 3; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-3; 4; 3)$  et  $\overrightarrow{AD} = (-2; 2; 8)$ . On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 104$$

Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  est de 104 unités de volume. Par conséquent, le volume du prisme triangulaire est de 52 unités de volume.



22. a) La hauteur du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{AQ}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  est la distance entre le point Q et le plan  $\Pi$ . On peut calculer le volume du parallélépipède par le produit mixte et diviser par le module du produit vectoriel  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  qui donne l'aire de la base du parallélépipède, ce qui donne la hauteur relative à cette base.

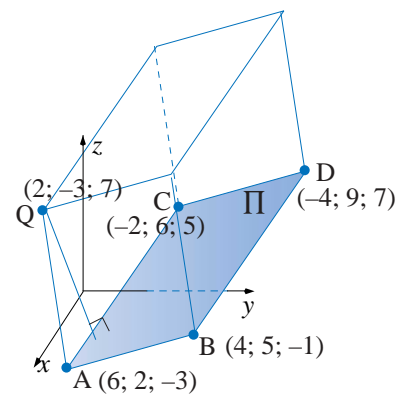
Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AQ} = (-4; -5; 10)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 2)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-8; 4; 8)$ . On a alors :

$$\overrightarrow{AQ} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 10 \\ -2 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 96$$

Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AQ}$  est de 96 unités de volume. Le produit vectoriel donne :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 16\vec{i} + 0\vec{j} + 16\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  est :



$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16^2 + 0^2 + 16^2} = \sqrt{512} \text{ unités d'aire.}$$

La distance cherchée est donc :  $d(Q, \Pi) = \frac{96}{\sqrt{512}} \approx 4,24$  unités.

b) Les vecteurs sont  $\overrightarrow{AQ} = (-1; 8; 0)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 5)$  et  $\overrightarrow{AC} = (-4; 5; 2)$ . On a alors :

$$\overrightarrow{AQ} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -109$$

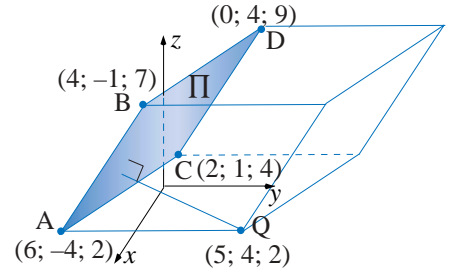
Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{AQ}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  est de 109 unités de volume. Le produit vectoriel donne :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -19\vec{i} - 16\vec{j} + 2\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  est :

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-19)^2 + (-16)^2 + 2^2} = \sqrt{621} \text{ unités d'aire.}$$

La distance cherchée est donc :  $d(Q, \Pi) = \frac{109}{\sqrt{621}} \approx 4,37$  unités.



23. a) Le vecteur  $\vec{N} = (3; -2; 3)$  est normal au plan  $\Pi$  et le vecteur  $\vec{D} = (-2; 4; -3)$  est un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ . L'angle entre ces deux vecteurs est donné par :

$$\cos \theta = \frac{\vec{N} \cdot \vec{D}}{\|\vec{N}\| \|\vec{D}\|} = \frac{-23}{\sqrt{22}\sqrt{29}} \text{ et } \theta = \arccos\left(\frac{-23}{\sqrt{22}\sqrt{29}}\right) \approx 155,59^\circ.$$

Puisque  $\theta > 90^\circ$ , on a  $\alpha = 155,59^\circ - 90^\circ = 65,59^\circ$ .

b) Le vecteur  $\vec{N} = (3; -6; 2)$  est normal au plan  $\Pi$ . Pour trouver un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ , on peut déterminer le vecteur algébrique équipollent à  $\overrightarrow{AB}$  et on obtient le vecteur  $\vec{D} = (3; -3; -2)$  comme vecteur directeur de la droite  $\Delta$ . L'angle entre ces deux vecteurs est donné par :

$$\cos \theta = \frac{\vec{N} \cdot \vec{D}}{\|\vec{N}\| \|\vec{D}\|} = \frac{23}{\sqrt{49}\sqrt{22}} \text{ et } \theta = \arccos\left(\frac{23}{\sqrt{49}\sqrt{22}}\right) \approx 45,53^\circ.$$

Puisque  $\theta < 90^\circ$ , on a  $\alpha = 90^\circ - 45,53^\circ = 44,47^\circ$ .

c) Pour obtenir un vecteur normal à  $\Pi$ , on peut déterminer une équation cartésienne du plan en effectuant le produit mixte des vecteurs  $\overrightarrow{AX}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . Ce produit mixte doit être nul pour que le point  $X(x; y; z)$  soit dans le même plan que les points A, B et C. Ce qui donne :

$$\overrightarrow{AX} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z-2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -4(x-5) - 4(y+2) - 4(z-2) = 0$$

Par conséquent,  $-4x - 4y - 4z + 20 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $\Pi$ . Il en est de même pour l'équation  $x + y + z - 5 = 0$ . Le vecteur  $\vec{N} = (1; 1; 1)$  est normal au plan  $\Pi$ . Pour trouver un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ , on peut déterminer le vecteur algébrique équipollent à  $\overrightarrow{DE}$  et on obtient le vecteur  $\vec{D} = (-10; 2; 11)$  comme vecteur directeur de la droite  $\Delta$ . L'angle entre ces deux vecteurs est donné par :

$$\cos \theta = \frac{\vec{N} \cdot \vec{D}}{\|\vec{N}\| \|\vec{D}\|} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{225}} \text{ et } \theta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{225}}\right) \approx 83,37^\circ.$$

Puisque  $\theta < 90^\circ$ , on a  $\alpha = 90^\circ - 83,37^\circ = 6,63^\circ$ .

24. a) Les équations des plans définissant les faces sont :

Face ADC,  $2x - 10y + 3z + 20 = 0$

Face BCD,  $3x + 2y + 13z - 55 = 0$

Face ABC,  $13x - 14y + 11z - 57 = 0$

Face ABD,  $x + 12y - 7z - 7 = 0$

b) Le volume de la pyramide triangulaire construite sur les vecteurs  $\vec{BA}$ ,  $\vec{BC}$  et  $\vec{BD}$  est le sixième du volume du parallélépipède construit sur les mêmes vecteurs et le volume du parallélépipède est la valeur absolue du produit mixte. On a donc :

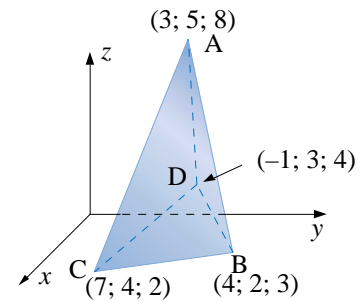
$$V = 68/6 \approx 11,3 \text{ unités de volume.}$$

c)  $A_{BCD} = \sqrt{182}/2 \approx 6,75$  unités d'aire,  $A_{ACD} = \sqrt{1808}/2 \approx 21,26$  unités d'aire,

$A_{ABD} = \sqrt{776}/2 \approx 13,93$  unités d'aire,  $A_{ABC} = \sqrt{486}/2 \approx 11,02$  unités d'aire.

d) La hauteur est la distance du sommet A au plan BCD, on trouve :

$$68/\sqrt{182} \approx 5,04 \text{ unités.}$$



25. a)  $\angle((0;0,5;0)(0,866;0;0), (0;0,5;0)(0;1,5;0)) = 120^\circ$

$$\| (0;0,5;0)(0,866;0;0) \| = 1 \text{ et } \| (0;0,5;0)(0;1,5;0) \| = 1$$

b)  $0,866 \text{ u}^3$

26. a)  $a = 170$ ,  $b = 225,6$ ,  $c = 390,6$ ,  $\alpha = 71,3^\circ$ ,  $\beta = 64,2^\circ$  et  $\chi = 77,3^\circ$

b)  $1,272 \times 10^7 \text{ pm}^3$

27. a)  $\Pi_A : x + y + z = 1$ ,  $\Pi_B : x + y + z = 2$ ,

$$\Pi_C : x + y + z = 3$$

b)  $54,7^\circ$

c) Puisque  $\vec{N}_A = b\vec{N}_B$  alors :

$$d((1/2; 1/2; 1), \Pi_A) = 0,58 \text{ unité.}$$

d) Oui, puisque  $\vec{N}_A, \vec{N}_B$  et  $\vec{N}_C$  sont parallèles au vecteur  $(0;0;1)(1;1;2)$ .

e) Oui, puisque les atomes 4, 5, et 8 sont sur cette droite.

28. 108 pm

29. Il faut bien noter que l'unité vaut 147,5 pm.

Calculs géométriques

Paramètres moléculaires

$$\| \vec{O}_a \vec{O}_c \| = 1$$

$$d_1 = 147,5$$

$$\| \vec{O}_b \vec{H}_a \| = 0,664$$

$$d_2 = 95$$

$$\| \vec{O}_c \vec{H}_d \| = 0,664$$

$$d_3 = 95$$

$$\angle(\vec{O}_b \vec{O}_c, \vec{O}_b \vec{H}_a) = 94,8^\circ$$

$$\alpha_1 = 94,8^\circ$$

$$\angle(\vec{O}_c \vec{O}_b, \vec{O}_c \vec{H}_d) = 94,8^\circ$$

$$\alpha_2 = 94,8^\circ$$

$$\angle(\Pi_{xy}, \Pi_{\vec{O}_c \vec{O}_b, \vec{O}_c \vec{H}_d}) = 68,5^\circ$$

$$\alpha_3 = 111,5^\circ$$

Donc, les distances de liaison sont de 147,5 pm, 95 pm et 95 pm. Les angles de liaison sont de  $94,8^\circ$ . L'angle dièdre est de  $111,5^\circ$ .

- 30.a) Dans ces problèmes, on peut procéder par résolution de triangle ou utilise le fait que le quotient du volume d'un parallélépipède par la surface de sa base donne la hauteur du parallélépipède. Nous avons suffisamment donné d'exemples de la première méthode, nous allons maintenant utiliser la deuxième. Le point  $P_1(6; 2; -3)$  est sur la droite  $\Delta_1$  et le point  $P_2(4; -7; 8)$  est sur la droite  $\Delta_2$ . On a alors  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2; -9; 11)$ . Le produit vectoriel des vecteurs directeurs donne :

$$\vec{N} = \vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -5 \\ 7 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -37\vec{i} - 41\vec{j} - 18\vec{k}.$$

La distance cherchée est alors la projection de  $\overrightarrow{P_1P_2}$  sur  $\vec{N}$ . On a donc :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|245|}{\sqrt{3374}} \approx 4,22 \text{ unités.}$$

La distance est donc d'environ 4,22 unités.

- b) Le point  $P_1(4; 7; -5)$  est sur la droite  $\Delta_1$  et le point  $P_2(8; -3; 4)$  est sur la droite  $\Delta_2$ . On a alors  $\overrightarrow{P_1P_2} = (4; -10; 9)$ . Le produit vectoriel des vecteurs directeurs donne :

$$\vec{N} = \vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 2 \\ -6 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -33\vec{i} - 27\vec{j} + 18\vec{k}.$$

La distance cherchée est alors la projection de  $\overrightarrow{P_1P_2}$  sur  $\vec{N}$ . On a donc :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|300|}{\sqrt{2142}} \approx 6,48 \text{ unités.}$$

La distance est donc d'environ 6,48 unités.

