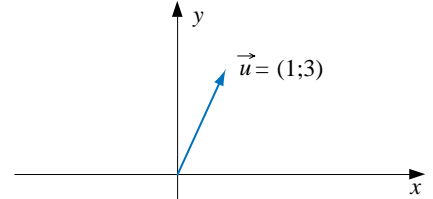


CHAPITRE 8

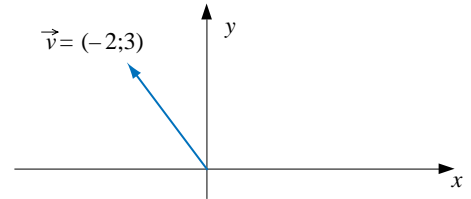
EXERCICES 8.2

1. a) $r = \|\vec{u}\| = \sqrt{10}, \alpha = \theta = \arctan\left(\frac{3}{1}\right) = 71,57^\circ$



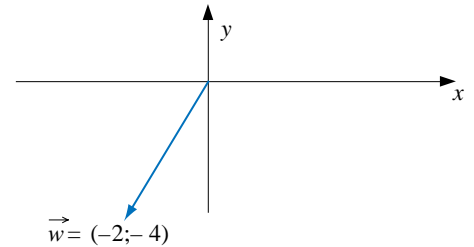
b) $r = \|\vec{v}\| = \sqrt{13}, \alpha = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) = -56,31^\circ$

Puisque \vec{v} est dans le deuxième quadrant, son argument est obtenu en additionnant 180° à α et on trouve alors $\theta = 180^\circ - 56,31^\circ = 123,69^\circ$.



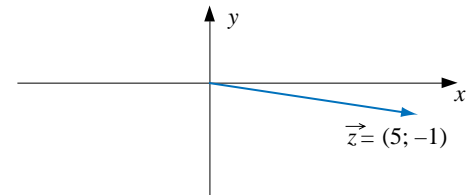
c) $r = \|\vec{w}\| = \sqrt{20}, \alpha = \arctan\left(\frac{-4}{-2}\right) = 63,43^\circ$

Puisque \vec{w} est dans le troisième quadrant, son argument est obtenu en additionnant 180° à α , et on trouve alors $\theta = 180^\circ + 63,43^\circ = 243,43^\circ$.



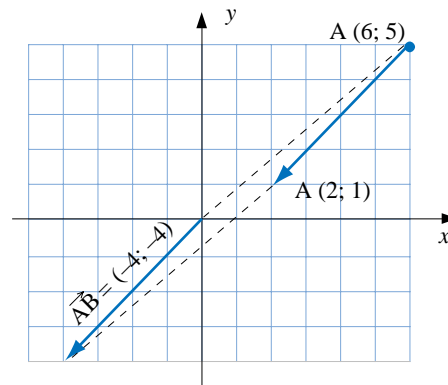
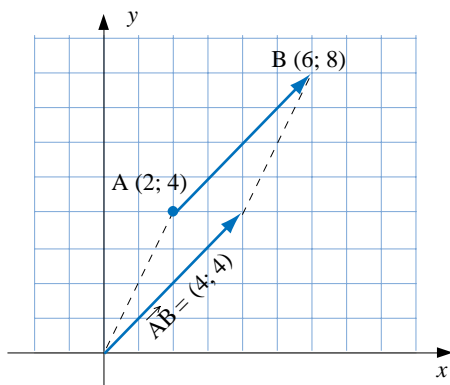
d) $r = \|\vec{z}\| = \sqrt{26}, \alpha = \arctan\left(\frac{-1}{5}\right) = -11,31^\circ$

Puisque \vec{z} est dans le quatrième quadrant, on prendra $\theta = \alpha$.



2. a) $\vec{AB} = (6; 8) - (2; 4) = (4; 4)$
 $5) = (-4; -4)$

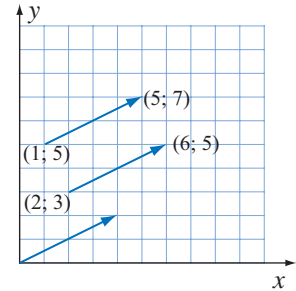
b) $\vec{AB} = (2; 1) - (6; 5)$



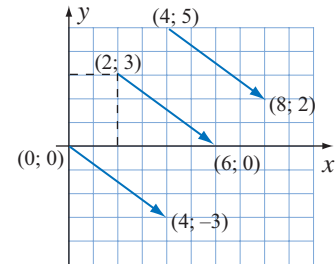
3. a) $\vec{u} + \vec{v} = (3; -2) + (-5; 4) = (-2; 2)$
 b) $\vec{u} - 2\vec{w} + \vec{v} = (3; -2) - 2(2; 3) + (-5; 4) = (-6; -4)$
 c) $3\vec{u} - \vec{z} + 2\vec{v} = (2; 7)$ d) $5\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (31; -9)$
 e) $23\vec{u} + 13\vec{v} - 2\vec{w} = (0; 0)$ f) $-5\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} + 4\vec{z} = (-43; -11)$

4. a) $\vec{v} = (2; 3); \|\vec{v}\| = \sqrt{13}$ et $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{13}} (2; 3) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$
 b) $(-3/5; 4/5)$
 c) $(-5/13; -12/13)$ d) $(-4/5; -3/5)$

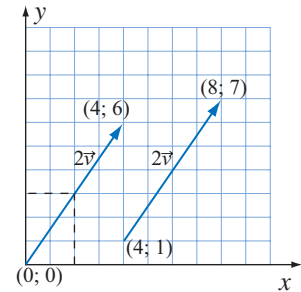
5. a) Le vecteur algébrique est : $\vec{v} = \overrightarrow{(4; 2)}$,
 Les vecteurs géométriques sont : $\overrightarrow{(2; 3)(6; 5)}$ et $\overrightarrow{(1; 5)(5; 7)}$



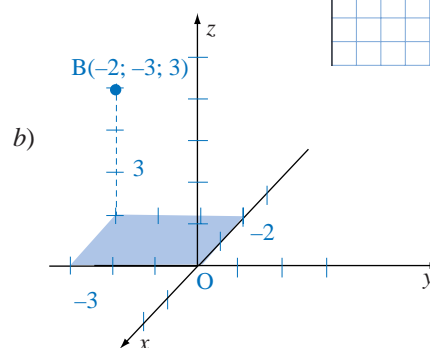
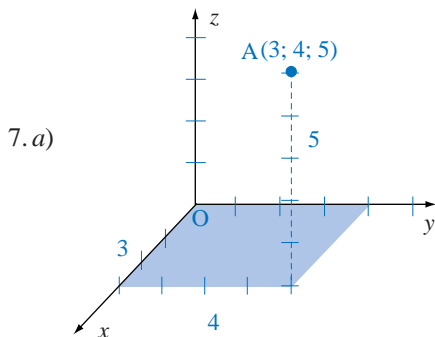
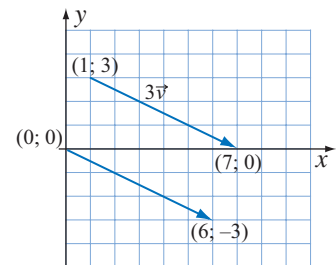
- b) Le vecteur algébrique est : $\vec{v} = \overrightarrow{(4; -3)}$
 Les vecteurs géométriques sont : $\overrightarrow{(2; 3)(6; 0)}$ et $\overrightarrow{(4; 5)(8; 2)}$



6. a) Le vecteur algébrique est : $\vec{v} = \overrightarrow{(2; 3)}$
 On a donc : $2\vec{v} = \overrightarrow{(4; 6)}$
 Le vecteur géométrique équipollent est : $\overrightarrow{(4; 1)(8; 7)}$

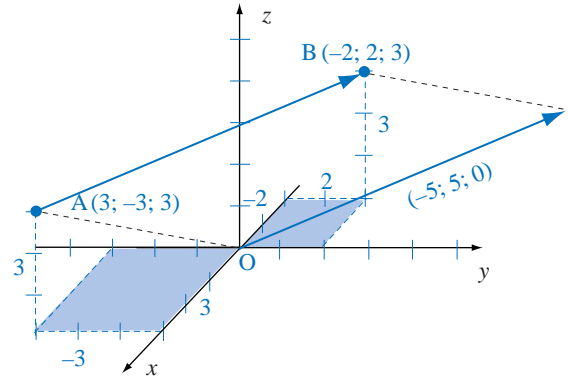
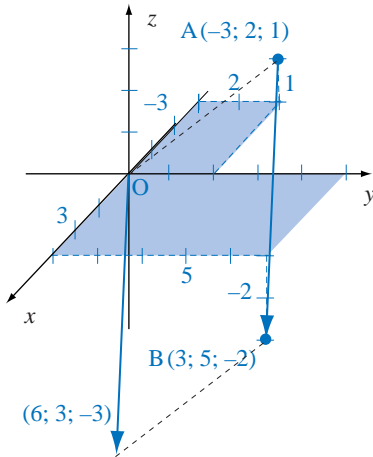


- b) Le vecteur géométrique est : $3\vec{v} = \overrightarrow{(1; 3)(7; 0)}$
 Le vecteur équipollent algébrique est : $3\vec{v} = \overrightarrow{(2; -1)}$



8. a) $\overrightarrow{AB} = (3; 5; -2) - (-3; 2; 1) = (6; 3; -3)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 3) - (3; -3; 3) = (-5; 5; 0)$



9. a) $(-1; -1; 5)$
d) $(-28; -7; 17)$

b) $(13; -12; -10)$

c) $(35; -1; -19)$

10. a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{198} \approx 14,07$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{144} \approx 12$

c) $\|\vec{u}\| = 3$

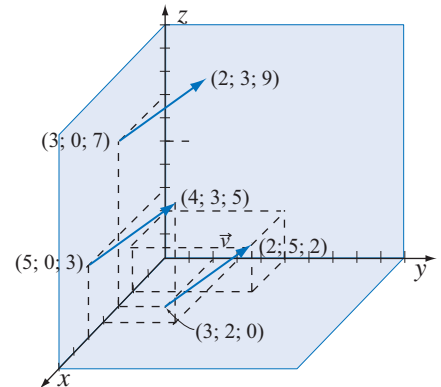
d) $\|\vec{u}\| = \sqrt{83} \approx 9,11$

e) $\|\vec{u}\| = \sqrt{21} \approx 4,58$

f) $\|\vec{u}\| = \sqrt{22} \approx 4,69$

11. a) Les vecteurs géométriques sont :

$\overrightarrow{(3; 2; 0)(2; 5; 2)}$, $\overrightarrow{(5; 0; 3)(4; 3; 5)}$ et $\overrightarrow{(3; 0; 7)(2; 3; 9)}$

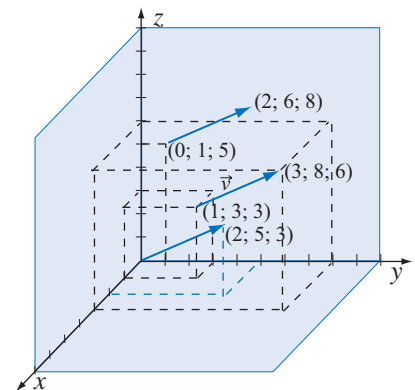


b) Le vecteur algébrique est :

$\vec{v} = \overrightarrow{(2; 5; 3)}$

Les vecteurs géométriques sont :

$\overrightarrow{(1; 3; 3)(3; 8; 6)}$ et $\overrightarrow{(0; 1; 5)(2; 6; 8)}$

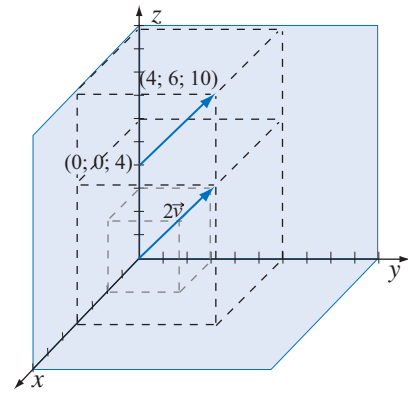


12. a) Les vecteurs algébriques sont :

$$\vec{v} = \overrightarrow{(2; 3; 3)} \text{ et } 2\vec{v} = \overrightarrow{(4; 6; 6)}$$

Le vecteur géométrique est :

$$\overrightarrow{(0; 0; 4)(4; 6; 10)}$$



b) Le vecteur est :

$$\vec{v} = \overrightarrow{(2; 1; 0)(3; 4; -3)}$$

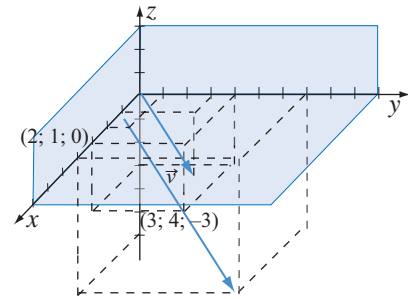
Le vecteur algébrique équipollent est :

$$\vec{v} = \overrightarrow{(1; 3; -3)}$$

On a donc $2\vec{v} = \overrightarrow{(2; 6; -6)}$

Le vecteur géométrique équipollent est :

$$2\vec{v} = \overrightarrow{(2; 1; 0)(4; 7; -6)}$$



13. a) i) Les points les plus hauts sont P_1 et P_3 .

ii) Le point le plus avancé est P_1 .

iii) Les points les plus à gauche sont P_1 et P_2 .

iv) Les points les plus à droite sont P_3 et P_4 .

v) Les coordonnées des points sont :

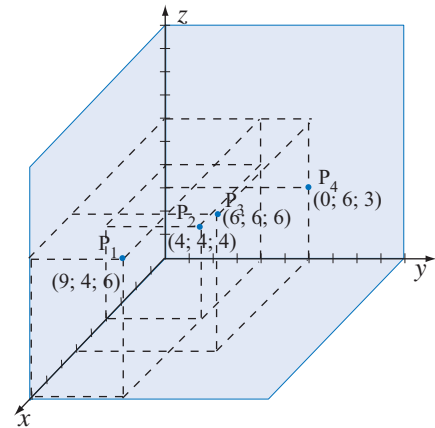
$$P_1(9; 4; 6), P_2(4; 4; 4), P_3(6; 6; 6) \text{ et } P_4(0; 6; 3).$$

Le vecteur joignant le point le plus avancé au point le plus bas est :

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{(9; 4; 6)(0; 6; 3)}$$

Le vecteur algébrique équipollent est :

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{(-9; 2; -3)}$$



b) i) Les points les plus hauts sont P_2 et P_3 .

ii) Les points les plus avancés sont P_2 et P_3 .

iii) Le point le plus à gauche est P_1 .

iv) Le point le plus à droite est P_5 .

v) Les coordonnées des points sont :

$$P_1(4; 0; 4), P_2(8; 3; 6), P_3(8; 6; 6), P_4(0; 3; 2) \text{ et } P_5(4; 7; 4).$$

Le vecteur joignant le point le plus à l'arrière au point le plus à droite est :

$$\overrightarrow{P_4P_5} = \overrightarrow{(0; 3; 2)(4; 7; 4)}$$

Le vecteur algébrique équipollent est :

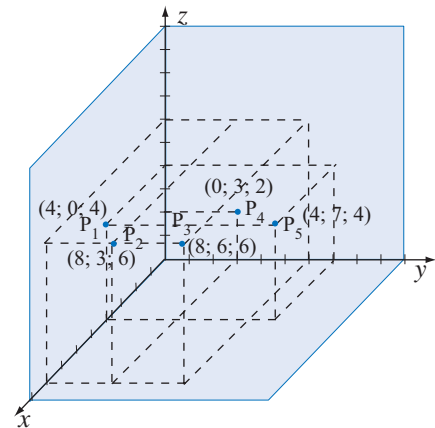
$$\overrightarrow{P_4P_5} = \overrightarrow{(4; 4; 2)}$$

Le vecteur joignant le point le plus à l'arrière au point le plus à droite est :

$$\overrightarrow{P_1P_5} = \overrightarrow{(4; 0; 4)(4; 7; 4)}$$

Le vecteur algébrique équipollent est :

$$\overrightarrow{P_1P_5} = \overrightarrow{(0; 7; 0)}$$

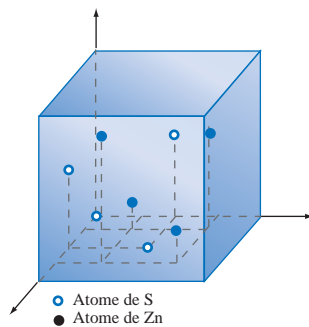


14. a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{-2}{3}\right)$
 d) $\left(\frac{3}{\sqrt{17}}; \frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$ e) $\left(\frac{-13}{\sqrt{198}}; \frac{2}{\sqrt{198}}; \frac{5}{\sqrt{198}}\right)$ f) $\left(\frac{7}{\sqrt{62}}; \frac{2}{\sqrt{62}}; \frac{-3}{\sqrt{62}}\right)$

15. a) $\overrightarrow{AB} = (4; 10; 6)$, $\overrightarrow{CD} = (4; 10; 6)$. Les vecteurs sont équipollents donc parallèles ($k = 1$).
 b) $\overrightarrow{AB} = (-4; 6; -12)$, $\overrightarrow{CD} = (2; -3; 6)$. Les vecteurs sont parallèles puisque $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$ ($k = -2$).
 c) $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -3)$, $\overrightarrow{CD} = (-6; -12; 9)$. Les vecteurs sont parallèles puisque $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ ($k = -1/3$).
 d) $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -8)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 2; 8)$. Les vecteurs ne sont pas parallèles, les composantes sont égales, sauf la troisième.

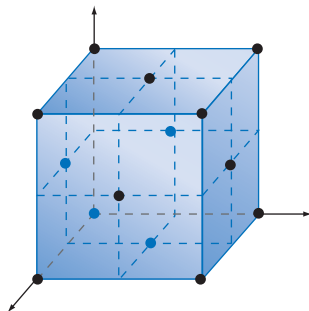
16. a) (5; 3; 12) b) (5; 14; -19) c) (11; -9; 20)

17. a)



b) Toutes les distances sont de $\sqrt{3}/4$ u.

18. a)

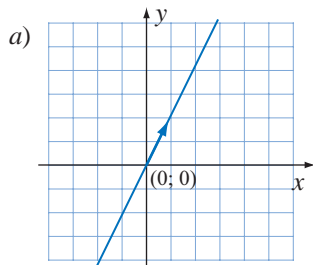


- b) Les coordonnées des points sont :
 (0; 0; 0), (1/2; 1/2; 0), (1/2; 0; 1/2), (0; 1/2; 1/2),
 (1/2; 1/2; 1), (1/2; 1; 1/2), (1; 1/2; 1/2), (0; 0; 1),
 (0; 1; 0), (1; 0; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0) et
 (1; 1; 1)
 c) $3,24 \times 10^{-3} \text{ nm}^3$ d) (0,074; 0; 0,074)
 e) $\sqrt{1,5}$
 f) $\sqrt{(-0,074)^2 + (0,148)^2 + (0,074)^2} = 0,181 \text{ nm}$

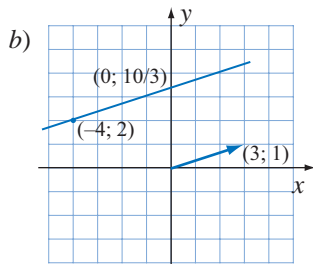
19. 463 pm

20. a) $x = 5 + 2t$ et $y = 3 + 5t$, (19/5; 0) et (0; -19/2)
 b) $x = 4 - 3t$ et $y = -3 + 6t$, (5/2; 0), (0; 5)
 c) $x = -5 + 2t$ et $y = -3 - 5t$, (-31/5; 0), (0; -31/2)
 d) $x = 4 - 2t$ et $y = 2 - 3t$, (8/3; 0), (0; -4)

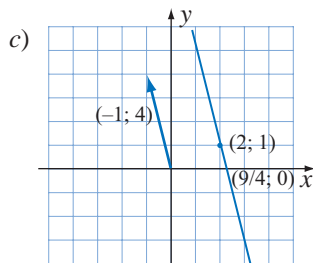
21. Pour représenter graphiquement une droite décrite par des équations paramétriques, on peut représenter le point donné par les équations et le vecteur directeur puis tracer la droite passant par le point et parallèle à la droite.



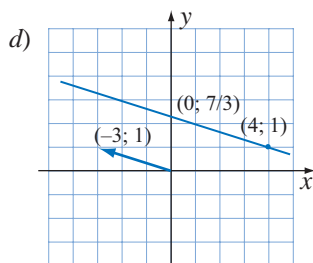
La droite rencontre les axes au point (0; 0).



La droite rencontre les axes aux points (-10; 0) et (0; 10/3).



La droite rencontre les axes aux points (9/4; 0) et (0; 9).



La droite rencontre les axes aux points (7; 0) et (0; 7/3).

22. a) $\Delta: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

b) $\Delta: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$

23. a) $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$

b) $\Delta: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 5t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

24. a) $\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 5 - 5t \\ z = 6t \end{cases}$

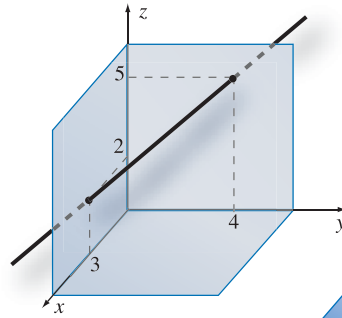
b) $\Delta: \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ z = t \end{cases}$

25. a) $\Delta: \begin{cases} x = 4 - 6t \\ y = 5 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

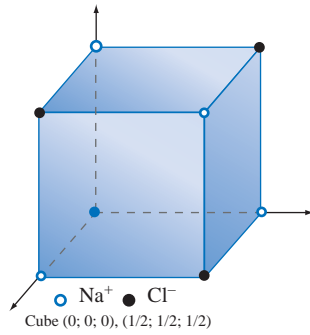
b) $\Delta: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 2 \\ z = 8 + 5t \end{cases}$

26. La droite se définit par :

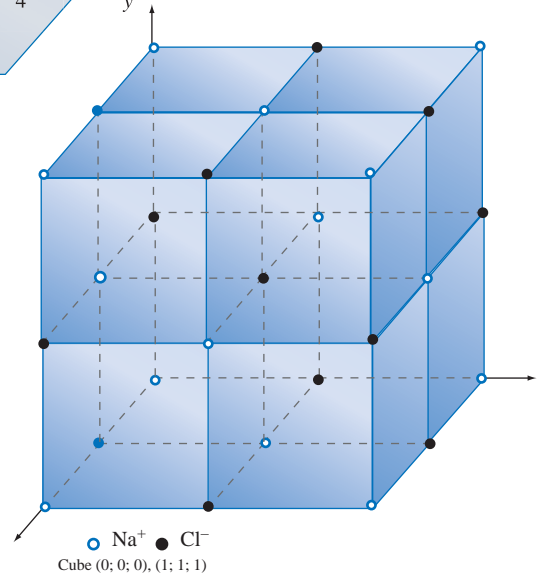
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$



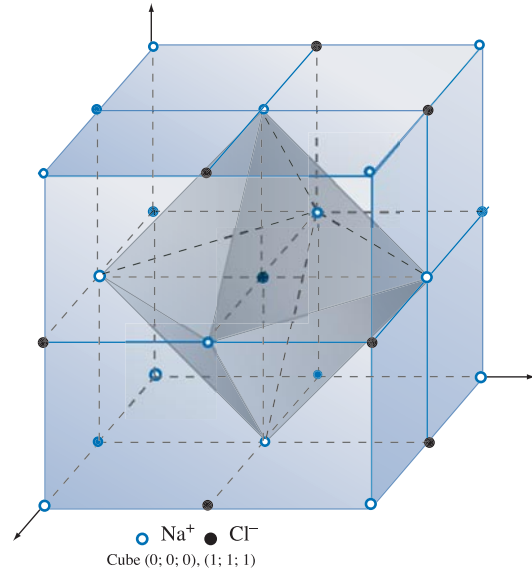
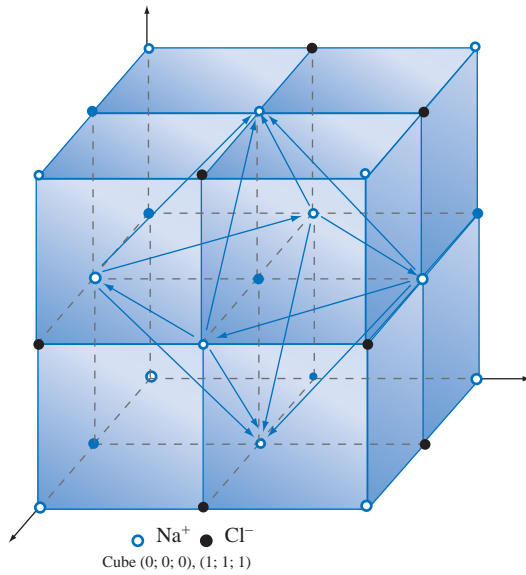
27. a)



Pour Na⁺: (1; 1/2; 0), (1/2; 1; 0), (1; 1/2; 0), (0; 1/2; 1),
(1; 1/2; 1), (1/2; 1; 0), (1; 1; 1/2), 0; 1; 1/2), (1/2; 1; 1)
Pour Cl⁻: (1; 0; 0), (1; 0; 1), (0; 0; 1), (1; 1/2; 1/2),
(1/2; 1/2; 1), (1; 1; 0), (0; 1; 0), (1/2; 1; 1/2), (1; 1; 1) et (0; 1; 1)



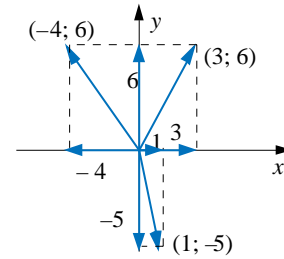
b)



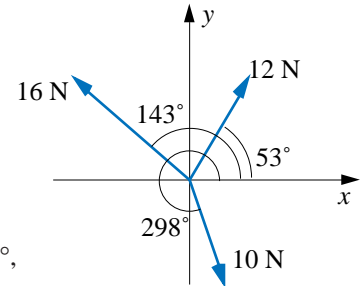
c) 2,716 g/cm³

EXERCICES 8.4

1. $R_x = 3 - 4 + 1 = 0$ et $R_y = 6 + 6 - 5 = 7$
d'où, $\vec{R} = (0; 7)$.

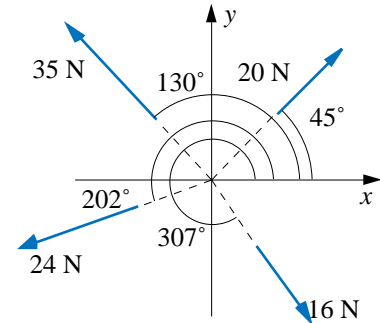


2. $R_x = 12 \cos 53^\circ + 16 \cos 143^\circ + 10 \cos 298^\circ = -0,86$
 $R_y = 12 \sin 53^\circ + 16 \sin 143^\circ + 10 \sin 298^\circ = 10,38$
 $\|\vec{R}\| = \sqrt{(-0,86)^2 + (10,38)^2} = 10,42 \text{ N}$,
 $\alpha = \arctan\left(\frac{10,38}{-0,86}\right) = -85,26^\circ$ et $\theta = 94,74^\circ$.



Dans ce cas, le signe des composantes permet de conclure que l'angle est de $94,74^\circ$,
donc $\vec{R} = 10,42 \angle 94,74^\circ$.

3. $R_x = 20 \cos 45^\circ + 35 \cos 130^\circ + 24 \cos 202^\circ + 16 \cos 307^\circ = -20,98$
 $R_y = 20 \sin 45^\circ + 35 \sin 130^\circ + 24 \sin 202^\circ + 16 \sin 307^\circ = 19,18$
 $\|\vec{R}\| = 28,43 \text{ N}$ et $\theta = 137,57^\circ$.



4. Les composantes doivent s'annuler puisque le système est en équilibre, on a donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} A_x + B_x &= 0 \\ A_y + B_y - 100 &= 0 \end{aligned}$$

Le système donne :

$$\begin{aligned} A \cos 150^\circ + B \cos 30^\circ &= 0 \\ A \sin 150^\circ + B \sin 30^\circ - 100 &= 0 \end{aligned}$$

En isolant B dans la première équation, on obtient :

$$B = \frac{-A \cos 150^\circ}{\cos 30^\circ}$$

De plus, puisque $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$, on a $B = A$.

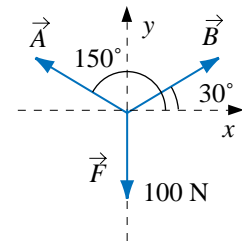
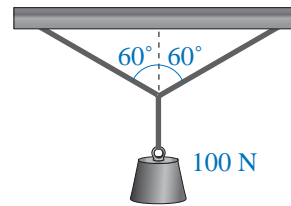
En substituant dans la deuxième équation, on obtient :

$$A \sin 150^\circ + A \sin 30^\circ = 100$$

De plus, puisque $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$, on a :

$$2A \sin 30^\circ = 100$$

et, puisque $\sin 30^\circ = 1/2$, on obtient : $A = B = 100 \text{ N}$.

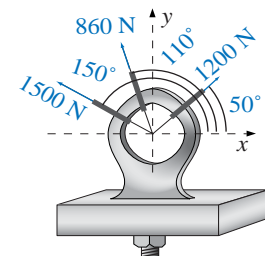


5. $R_x = 1200 \cos 50^\circ + 860 \cos 110^\circ + 1500 \cos 150^\circ$
 $= -821,830\dots$
 $R_y = 1200 \sin 50^\circ + 860 \sin 110^\circ + 1500 \sin 150^\circ$
 $= 2\,477,388\dots$

$$\|\vec{R}\| = 2\,610,145\dots \text{ et } \alpha = -71,647\dots^\circ$$

D'où, $\theta = \alpha + 180^\circ = 108,352\dots^\circ$

On estimera donc la résultante à 2,61 kN et l'angle à $108,35^\circ$

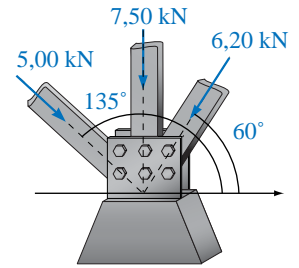


$$\begin{aligned}
 6. \quad R_x &= 6200 \cos 240^\circ + 7500 \cos 270^\circ + 5000 \cos 315^\circ \\
 &= 435,53... \approx 436 \text{ N}, \\
 R_y &= 6200 \sin 240^\circ + 7500 \sin 270^\circ + 5000 \sin 315^\circ \\
 &= -16404,89... \approx -16\,405 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(435,53...)^2 + (-16404,89...)^2} \approx 16,4 \text{ kN et}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-16404,89...}{435,53...}\right) \approx -88,48^\circ$$

$$\alpha = \theta = -88,48^\circ.$$



7. Les composantes doivent s'annuler puisque le système est en équilibre, on a donc le système d'équations suivant:

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1\,200 = 0$$

On a donc :

$$A \cos 140^\circ + B \cos 50^\circ = 0$$

$$A \sin 140^\circ + B \sin 50^\circ = 1\,200$$

En isolant B dans la première équation, on obtient :

$$B = \frac{-A \cos 140^\circ}{\cos 50^\circ}$$

En substituant dans la deuxième équation, on obtient :

$$A \sin 140^\circ - \frac{A \cos 140^\circ}{\cos 50^\circ} \sin 50^\circ = 1\,200$$

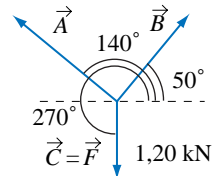
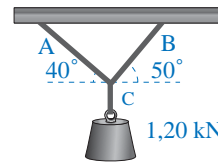
Soit, $A(\sin 140^\circ - \cos 140^\circ \tan 50^\circ) = 1\,200$ et :

$$A = \frac{1\,200}{\sin 140^\circ - \cos 140^\circ \tan 50^\circ} = 771,345...$$

En substituant cette valeur dans l'expression obtenue en isolant B à partir de la première équation, on obtient :

$$B = \frac{-771,345... \cos 140^\circ}{\cos 50^\circ} = 919,253...$$

On peut donc estimer que $A = 771 \text{ N}$ et $B = 919 \text{ N}$ et $C = 1\,200 \text{ N}$.



8. Les composantes doivent s'annuler puisque le système est en équilibre, on a donc le système d'équations suivant :

$$-A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1\,200 = 0$$

On a donc :

$$A \cos 180^\circ + B \cos 50^\circ = 0$$

$$A \sin 180^\circ + B \sin 50^\circ = 1\,200$$

Puisque $\cos 180^\circ = -1$ et $\sin 180^\circ = 0$, les équations deviennent :

$$-A + B \cos 50^\circ = 0$$

$$B \sin 50^\circ = 1\,200$$

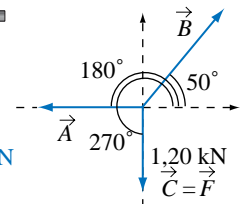
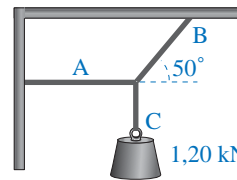
La deuxième équation donne alors :

$$B = \frac{1\,200}{\sin 50^\circ} = 1\,566,488...$$

En substituant cette valeur dans la première équation, on obtient :

$$A = B \cos 50^\circ = 1\,566,488... \cos 50^\circ = 1\,006,919...$$

On peut donc estimer que $A = 1\,007 \text{ N}$ et $B = 1\,566 \text{ N}$ et $C = 1\,200 \text{ N}$.



9. Construisons d'abord le diagramme des forces dans un système d'axes. Le système étant en équilibre, on a le système d'équations suivant :

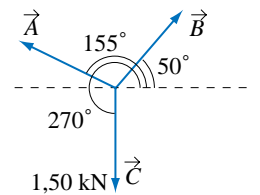
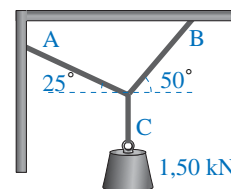
$$A_x + B_x + C_x = 0$$

$$A_y + B_y + C_y = 0$$

D'où,

$$A \cos 155^\circ + B \cos 50^\circ = 0$$

$$A \sin 155^\circ + B \sin 50^\circ - 1\,500 = 0$$



En isolant B dans la première équation, on obtient :

$$B = \frac{-A \cos 155^\circ}{\cos 50^\circ}$$

En substituant dans la deuxième équation, on obtient :

$$A \sin 155^\circ - \frac{A \cos 155^\circ}{\cos 50^\circ} \sin 50^\circ = 1\,500$$

Soit, $A(\sin 155^\circ - \cos 155^\circ \tan 50^\circ) = 1\,200$ et :

$$A = \frac{1\,500}{\sin 155^\circ - \cos 155^\circ \tan 50^\circ} = 998,194\dots$$

En substituant cette valeur dans l'expression obtenue en isolant B à partir de la première équation, on obtient :

$$B = \frac{-998,194\dots \cos 155^\circ}{\cos 50^\circ} = 1\,407,418\dots$$

On peut donc estimer que $A = 998$ N et $B = 1\,407$ N et $C = 1\,500$ N.

10. a) $\vec{A} = (25 \cos 35^\circ; 25 \sin 35^\circ) = (20,48; 14,34)$
 b) $\vec{B} = (142 \cos 124^\circ; 142 \sin 124^\circ) = (-79,41; 117,72)$
 c) $\vec{C} = (45,3 \cos 212^\circ; 45,3 \sin 212^\circ) = (-38,42; -24,01)$
 d) $\vec{D} = (28,2 \cos 341^\circ; 28,2 \sin 341^\circ) = (26,66; -9,18)$

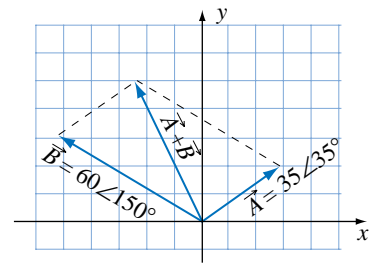
11. a) $a = 35 \cos 35^\circ + 60 \cos 150^\circ = -23,291\dots$
 $b = 35 \sin 35^\circ + 60 \sin 150^\circ = 50,075\dots$
 $\sqrt{a^2 + b^2} = 55,226\dots$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{50,075\dots}{-23,291\dots}\right) = -65,055\dots^\circ$$

On a donc $\theta = \alpha + 180^\circ = 114,944\dots^\circ$

$$\vec{A} + \vec{B} = 55,23 \angle 114,94$$

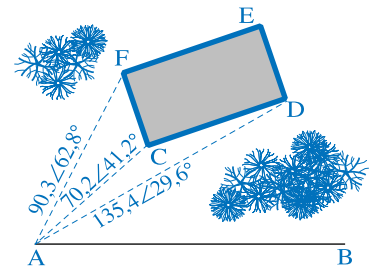
- b) $34,23 \angle 236,17^\circ$ c) $71,17 \angle 21,84^\circ$
 d) $73,99 \angle 44,97^\circ$



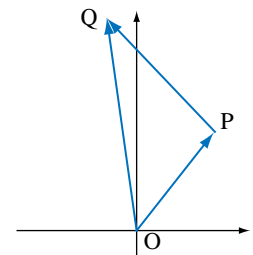
12. a) F (41,28;80,31), C (52,82;46,24), D (117,73;66,88), E (106,19;100,95)
 b) $\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD} = (106,19; 100,95) - (117,73; 66,88) = (-11,54; 34,07)$
 donc l'angle que fait ce vecteur avec la ligne AB est
 $\alpha = \arctan\left(\frac{34,07\dots}{-11,54\dots}\right) \approx -71,28^\circ$

Puisque la façade DE se situe au-dessus de la ligne AB, on a donc
 $\theta = 180^\circ - 71,28^\circ = 108,72^\circ$

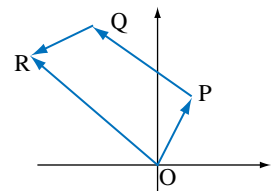
- c) 35,98 m sur 68,11 m et 2 450,60 m².



13. $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$
 $= (610 \cos 52^\circ + 812 \cos 132^\circ; 610 \sin 52^\circ + 812 \sin 132^\circ)$
 $= (-167,780\dots; 1084,120\dots)$
 $= 1097 \angle 98,8^\circ$



14. $\vec{OP} = (420 \cos 62^\circ; 420 \sin 62^\circ) = (197,178\dots; 370,837\dots)$
 $\vec{PQ} = (948 \cos 146^\circ; 948 \sin 146^\circ) = (-785,927\dots; 530,114\dots)$
 $\vec{QR} = (364 \cos 206^\circ; 364 \sin 206^\circ) = (-327,161\dots; -159,567\dots)$
 $\vec{OR} = (-915,9\dots; 741,4\dots) = 1178 \angle 141^\circ$



15. a) La particule q_1 est repoussée par la particule q_2 et l'intensité de cette force de répulsion est :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{21}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(2,00 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,00 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,09 \text{ m})^2} \\ &= 4444 \times 10^{-3} \text{ N} = 4,44 \text{ N}\end{aligned}$$

L'intensité de la force de répulsion est donc de 4,44 N et elle s'exerce dans la direction négative de l'axe horizontal, on a donc :

$$\vec{F}_{21} = 4,44 \angle 180^\circ$$

La particule q_1 est attirée par la particule q_3 et l'intensité de cette force d'attraction est :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{31}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(3,00 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,00 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,09 \text{ m})^2} \\ &= 3750 \times 10^{-3} \text{ N} = 3,75 \text{ N}\end{aligned}$$

L'angle que fait cette force avec la direction positive de l'axe horizontal est donc de 240° et le vecteur est :

$$\vec{F}_{31} = 3,75 \angle 60^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces deux forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :

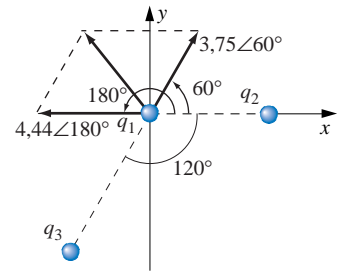
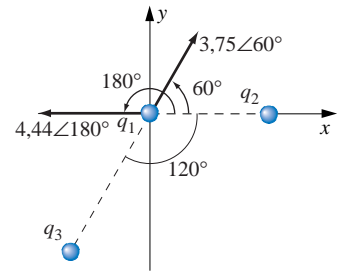
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \\ &= 4,44(\cos 180^\circ; \sin 180^\circ) + 3,75(\cos 60^\circ; \sin 60^\circ) \\ &= 4,44(-1; 0) + 3,75(-1/2; \sqrt{3}/2) \\ &= \left(-4,44 + \frac{1}{2} \times 3,75; \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3,75\right) \\ &= (-2,565; 3,247595\dots) = (a; b)\end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 4,1387\dots \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -51,70^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le deuxième quadrant, on a $\theta = 180^\circ - 51,70^\circ = 128,30^\circ$. La force que les charges q_2 et q_3 exercent sur q_1 est donc décrite en coordonnées polaires par le vecteur :

$$\vec{F} = 4,14 \angle 128,30^\circ$$



16. Pour déterminer l'intensité de la force d'attraction entre les particules q_1 et q_3 , il faut d'abord déterminer la distance entre celles-ci. Cette distance est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 8 cm et 5 cm. Par le théorème de Pythagore, on obtient :

$$r_{13} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} = 9,43$$

On a donc $r_{23} = 9,43$ cm.

La particule q_3 est attirée par la particule q_1 et l'intensité de cette force de répulsion est :

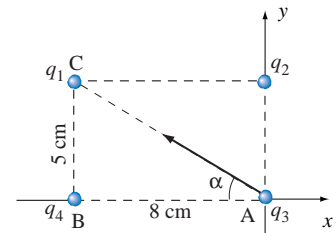
$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{13}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(3,7 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,0943 \text{ m})^2} \\ &= 9362 \times 10^{-3} \text{ N} = 9,36 \text{ N}\end{aligned}$$

L'intensité de la force de répulsion est donc de 9,362 N. Pour déterminer sa direction, calculons l'angle α du triangle ABC. On trouve :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{8}\right) = 32,0^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le deuxième quadrant, on a $\theta = 122^\circ$. La force est donc décrite par le vecteur :

$$\vec{F}_{13} = 9,36 \angle 122^\circ$$



La particule q_3 est repoussée par la particule q_2 et l'intensité de cette force de répulsion est :

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_{23}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,5 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,05 \text{ m})^2} \\ &= 13500 \times 10^{-3} \text{ N} = 13,50 \text{ N} \end{aligned}$$

L'angle que fait cette force avec la direction positive de l'axe horizontal est donc de 270° et le vecteur décrivant cette force est :

$$\vec{F}_{23} = 13,50 \angle 270^\circ$$

La particule q_3 est repoussée par la particule q_4 et l'intensité de cette force de répulsion est :

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_{43}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(3,2 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,08 \text{ m})^2} \\ &= 11250 \times 10^{-3} \text{ N} = 11,25 \text{ N} \end{aligned}$$

L'angle que fait cette force avec la direction positive de l'axe horizontal est donc de 0° et le vecteur décrivant cette force est :

$$\vec{F}_{43} = 11,25 \angle 0^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces trois forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :

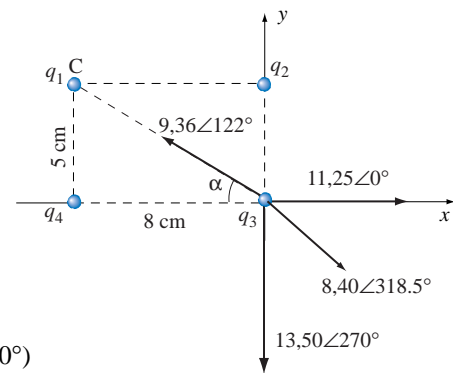
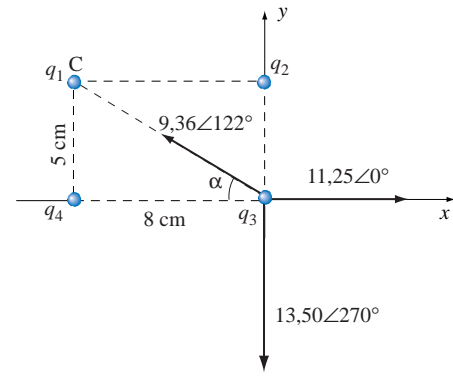
$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} \\ &= 9,36(\cos 122^\circ; \sin 122^\circ) + 13,50(\cos 270^\circ; \sin 270^\circ) + 11,25(\cos 0^\circ; \sin 0^\circ) \\ &= 9,36(\cos 122^\circ; \sin 122^\circ) + 13,50(0; -1) + 11,25(1; 0) \\ &= (9,36 \cos 122^\circ + 11,25; 9,36 \sin 122^\circ - 13,50) \\ &= (6,2899\dots; -5,5622\dots) = (a; b) \end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 8,3964\dots \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -41,465\dots^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le quatrième quadrant, on a $\theta = 360 - 41,5^\circ = 318,5^\circ$. La force que les charges q_1, q_2 et q_4 exercent sur q_3 est donc décrite en coordonnées polaires par :

$$\vec{F} = 8,40 \angle 318,5^\circ$$



17. a) On veut connaître l'effet sur la particule q_3 , on construit donc un système d'axes dont l'origine est cette particule. On obtient alors l'illustration ci-contre.

L'intensité de la force de répulsion entre les particules q_1 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_{13}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,50 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,20 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,10 \text{ m})^2} \\ &= 1620 \times 10^{-3} \text{ N} = 1,620 \text{ N} \end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 60° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{13} = 1,620 \angle 60^\circ$$

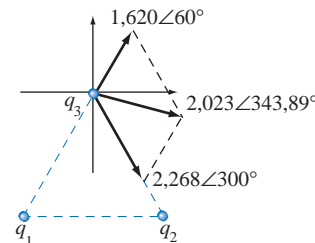
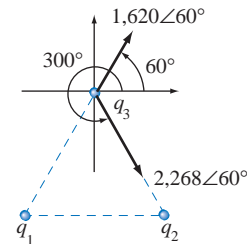
L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_2 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_{23}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(2,10 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,20 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,10 \text{ m})^2} \\ &= 2268 \times 10^{-3} \text{ N} = 2,268 \text{ N} \end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 300° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{23} = 2,268 \angle 300^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces deux forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :



$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \\
 &= 1,620(\cos 60^\circ; \sin 60^\circ) + 2,268(\cos 300^\circ; \sin 300^\circ) \\
 &= 1,620\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2,268\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1,620 + 2,268}{2}; \frac{(1,620 - 2,268)\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= (1,944; -0,5612) = (a; b)
 \end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2,0233\dots \text{ et } \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -16,10^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le quatrième quadrant, on a $\theta = 360^\circ - 16,10^\circ = 343,90^\circ$. La force que les charges q_1 et q_2 exercent sur q_3 est donc décrite en coordonnées polaires par le vecteur :

$$\vec{F} = 2,023 \angle 343,10^\circ$$

b) On veut connaître l'effet sur la particule q_2 , on construit donc un système d'axes dont l'origine est cette particule. On obtient alors l'illustration ci-contre.

L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_1 et q_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{F}_{12}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,50 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,10 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,10 \text{ m})^2} \\
 &= 2835 \times 10^{-3} \text{ N} = 2,835 \text{ N}
 \end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 180° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{12} = 2,835 \angle 180^\circ$$

L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_2 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{F}_{32}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,20 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,10 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,10 \text{ m})^2} \\
 &= 2268 \times 10^{-3} \text{ N} = 2,268 \text{ N}
 \end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 120° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{32} = 2,268 \angle 120^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces deux forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :

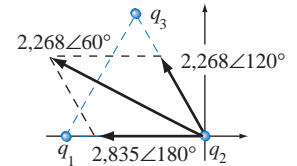
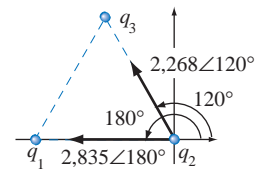
$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \\
 &= 2,835(\cos 180^\circ; \sin 180^\circ) + 2,268(\cos 120^\circ; \sin 120^\circ) \\
 &= 2,835(-1; 0) + 2,268\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= \left(-2,835 - \frac{2,268}{2}; \frac{2,268\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= (-3,969; 1,964) = (a; b)
 \end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 4,4283\dots \text{ et } \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -26,33^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le deuxième quadrant, on a $\theta = 180^\circ - 26,33^\circ = 153,67^\circ$. La force que les charges q_1 et q_3 exercent sur q_2 est donc décrite en coordonnées polaires par le vecteur :

$$\vec{F} = 4,428 \angle 153,67^\circ$$



18. a) On veut connaître l'effet sur la particule q_3 , on construit donc un système d'axes dont l'origine est cette particule. On obtient alors l'illustration ci-contre.

L'intensité de la force de répulsion entre les particules q_1 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{13}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(2,50 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,90 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,20 \text{ m})^2} \\ &= 1068,75 \times 10^{-3} \text{ N} \approx 1,069 \text{ N}\end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 90° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{13} = 1,069 \angle 90^\circ$$

On obtient la distance de 25 cm entre les charges q_2 et q_3 en appliquant le théorème de Pythagore. L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_2 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{23}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,80 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,90 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,25 \text{ m})^2} \\ &= 492,8 \times 10^{-3} \text{ N} \approx 0,493 \text{ N}\end{aligned}$$

La direction de cette force est obtenu en déterminant d'abord un angle aigu dans le triangle formé par les particules. On trouve :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{20}{15}\right) = 53,13^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le quatrième quadrant, on a $\theta = 360^\circ - 53,13^\circ = 306,87^\circ$. Le vecteur décrivant la force est :

$$\vec{F}_{23} = 0,493 \angle 306,87^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces deux forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :

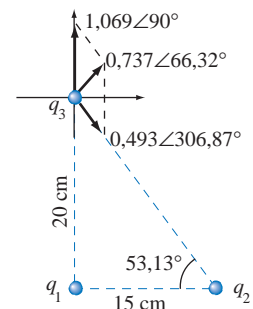
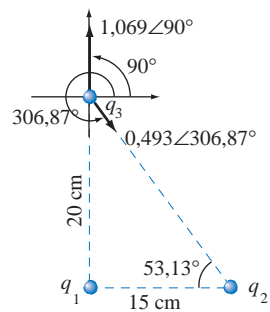
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \\ &= 1,069(\cos 90^\circ; \sin 90^\circ) + 0,493(\cos 306,87^\circ; \sin 306,87^\circ) \\ &= 1,069(0; 1) + 0,493(\cos 306,87^\circ; \sin 306,87^\circ) \\ &= (0,493 \cos 306,87^\circ; 1,069 + 0,493 \sin 306,87^\circ) \\ &= (0,2958; 0,6746) = (a; b)\end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0,7366... \text{ et } \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 66,32^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le premier quadrant, on a $\theta = \alpha = 66,32^\circ$. La force que les charges q_1 et q_2 exercent sur q_3 est donc décrite en coordonnées polaires par le vecteur :

$$\vec{F} = 0,737 \angle 66,32^\circ$$



b) On veut connaître l'effet sur la particule q_2 , on construit donc un système d'axes dont l'origine est cette particule. On obtient alors l'illustration ci-contre.

L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_1 et q_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{12}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(2,50 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,80 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,15 \text{ m})^2} \\ &= 1800 \times 10^{-3} \text{ N} = 1,80 \text{ N}\end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 180° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{12} = 1,80 \angle 180^\circ$$

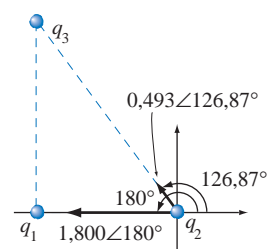
L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_2 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{32}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,90 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,80 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,25 \text{ m})^2} \\ &= 492,8 \times 10^{-3} \text{ N} = 0,493 \text{ N}\end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 120° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{32} = 0,493 \angle 126,87^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces deux forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :



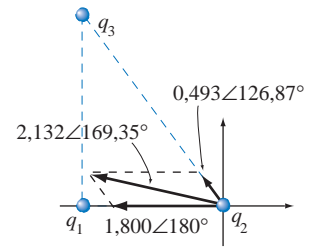
$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \\
 &= 1,800(\cos 180^\circ; \sin 60^\circ) + 0,493(\cos 126,87^\circ; \sin 126,87^\circ) \\
 &= 1,800(-1; 0) + 0,493(\cos 126,87^\circ; \sin 126,87^\circ) \\
 &= (-1,800 + 0,493 \cos 126,87^\circ; 0,493 \sin 126,87^\circ) \\
 &= (-2,0958\dots; 0,3943\dots) = (a; b)
 \end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2,1325\dots \text{ et } \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -10,65^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le deuxième quadrant, on a $\theta = 180^\circ - 10,65^\circ = 169,35^\circ$. La force que les charges q_1 et q_3 exercent sur q_2 est donc décrite en coordonnées polaires par le vecteur :

$$\vec{F} = 2,13 \angle 169,35^\circ$$



19. a) Déterminons l'angle α du triangle formé par les trois particules. Par la loi des cosinus, on obtient :

$$\cos \alpha = \frac{15^2 + 33^2 - 25^2}{2 \times 15 \times 33} \text{ et } \alpha = \arccos\left(\frac{15^2 + 33^2 - 25^2}{2 \times 15 \times 33}\right) = 45,90^\circ$$

On veut connaître l'effet sur la particule q_3 , on construit donc un système d'axes dont l'origine est cette particule. On obtient alors l'illustration ci-contre.

L'intensité de la force de répulsion entre les particules q_1 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{F}_{13}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,50 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,20 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,33 \text{ m})^2} \\
 &= 148,76 \times 10^{-3} \text{ N} \approx 0,149 \text{ N}
 \end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 90° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{13} = 0,149 \angle 314,10^\circ$$

On obtient la distance de 25 cm entre les charges q_2 et q_3 en appliquant le théorème de Pythagore. L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_2 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{F}_{23}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(2,10 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,90 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,25 \text{ m})^2} \\
 &= 1008 \times 10^{-3} \text{ N} = 1,008 \text{ N}
 \end{aligned}$$

La direction de cette force est de 180° et le vecteur décrivant la force est :

$$\vec{F}_{23} = 1,008 \angle 180^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces deux forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :

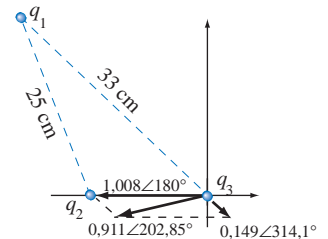
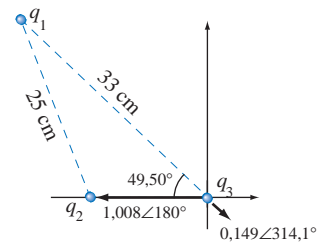
$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \\
 &= 0,149(\cos 314,10^\circ; \sin 314,10^\circ) + 1,008(\cos 180^\circ; \sin 180^\circ) \\
 &= 0,149(\cos 314,10^\circ; \sin 314,10^\circ) + 1,008(-1; 0) \\
 &= (0,149 \cos 314,10^\circ - 1,008; 0,149 \sin 314,10^\circ) \\
 &= (-0,9043\dots; -0,1070) = (a; b)
 \end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0,9106\dots \text{ et } \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 6,74^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le troisième quadrant, on a $\theta = 180^\circ + \alpha = 186,74^\circ$. La force que les charges q_1 et q_2 exercent sur q_3 est donc décrite en coordonnées polaires par le vecteur :

$$\vec{F} = 0,911 \angle 186,74^\circ$$



b) Déterminons l'angle α du triangle formé par les trois particules. Par la loi des cosinus, on obtient :

$$\cos \gamma = \frac{15^2 + 25^2 - 33^2}{2 \times 15 \times 25} \text{ et } \gamma = \arccos\left(\frac{15^2 + 25^2 - 33^2}{2 \times 15 \times 25}\right) = 108,58^\circ$$

On veut connaître l'effet sur la particule q_2 , on construit donc un système d'axes dont l'origine est cette particule. On obtient alors l'illustration ci-contre.

L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_1 et q_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{12}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1,50 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (2,10 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,15 \text{ m})^2} \\ &= 453,6 \times 10^{-3} \text{ N} = 0,4536 \text{ N}\end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 180° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{12} = 0,454 \angle 108,58^\circ$$

L'intensité de la force d'attraction entre les particules q_2 et q_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_{32}\| &= 9,0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(2,10 \times 10^{-6} \text{ C}) \times (1,20 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0,15 \text{ m})^2} \\ &= 1008 \times 10^{-3} \text{ N} = 1,008 \text{ N}\end{aligned}$$

La direction de cette force fait un angle de 120° avec la direction positive de l'axe horizontal. Le vecteur la décrivant est :

$$\vec{F}_{32} = 1,008 \angle 0^\circ$$

Pour déterminer la résultante de ces deux forces, il faut les exprimer en coordonnées rectangulaires, on a alors :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \\ &= 0,454(\cos 108,58^\circ; \sin 108,58^\circ) + 1,008(\cos 0^\circ; \sin 0^\circ) \\ &= 0,454(\cos 108,58^\circ; \sin 108,58^\circ) + 1,008(1; 0) \\ &= (0,454 \cos 108,58^\circ + 1,008; 0,454 \sin 108,58^\circ) \\ &= (0,8633\dots; 0,4303\dots) = (a; b)\end{aligned}$$

En exprimant à nouveau en coordonnées polaires, on obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0,9645\dots \text{ et } \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 26,49^\circ$$

Puisque le vecteur est dans le premier quadrant, on a $\theta = \alpha = 26,49^\circ$. La force que les charges q_1 et q_3 exercent sur q_2 est donc décrite en coordonnées polaires par le vecteur :

$$\vec{F} = 0,965 \angle 26,49^\circ$$

