CHAPITRE 6

6.2 EXERCICES

1. *a*) On connaît la longueur d'arc L = 12 cm et le rayon r = 5 cm et on cherche la mesure de l'angle en degrés. On peut trouver la circonférence $C = 2\pi r = 10\,\pi$ cm. La mesure de l'angle en degrés est alors donné par :

   $$\theta = \frac{L}{C} \times 360 = \frac{12}{10\pi} \times 360 = 137{,}5098...$$

   Pour exprimer la partie décimale en minutes, il faut la multiplier par 60, cela donne :
   0,5098... × 60 = 30,5922..., soit 30,5922 minutes.
   Pour exprimer la nouvelle partie décimale en secondes, il faut encore multiplier par 60, cela donne :
   0,5922... × 60 = 35,534..., soit 36 secondes.
   La mesure de l'angle au centre est de 137°30'36".

   b) 186°12'41"
   Remarque : Les données du problème sont des valeurs exactes et non des mesures. Dans ce cas, on n'arrondit pas le résultat.

2. *a*) On connaît la longueur d'arc L = 5 cm et le rayon r = 4 cm et on cherche la mesure de l'angle en radians. Cette mesure est donné par :

   $$\theta = \frac{L}{r} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \ \text{ rad}$$

   La mesure de l'angle au centre est de 1,25 rad.

   b) 0,686 rad

3. *a*) On connaît la longueur d'arc L = 12 m et la circonférence C = 48 m et on cherche la mesure de l'angle en radians. On peut envisager deux facons de faire, déterminer la mesure en degrés et convertir cette mesure en radians ou encore déterminer le rayon pour trouver directement l'angle en radians. Appliquons les deux méthodes pour les comparer.

   $\theta = \dfrac{L}{C} \times 360 = \dfrac{12}{48} \times 360 = 90°$. Pour convertir en radians, on utilise le fait que l'angle dont la mesure est de 90° intercepte les 90/360 de la circonférence d'un cercle de rayon 1 dont la longueur est de 2π. On a alors :

   $$\theta = \frac{90°}{360°} \times 2\pi = \frac{\pi}{4} = 1{,}57079...$$

   La mesure de l'angle est donc d'environ 1,571 rad.

   Par l'autre approche, on détermine d'abord le rayon puis on calcule la mesure de l'angle. Puisque $C = 2\pi r = 48$ m, on obtient r = 7,6394...

   D'où : $\theta = \dfrac{L}{r} = \dfrac{12}{7{,}6394...} = 1{,}57079...$

   La mesure de l'angle est donc d'environ 1,571 rad.

   b) 2,598 rad

4. *a*) La mesure en radians est donnée par : $\theta = \dfrac{30°}{360°} \times \pi == \dfrac{30°}{180°} \times \pi = \dfrac{\pi}{6} = 0{,}52359...$. Soit π/6 rad ou 0,524 rad.

   b) π/4 rad
   c) 1,57 rad
   d) 0,628 rad
   e) 1,257 rad
   f) 2,094 rad
   g) 5,498 rad
   h) 4,189 rad

5. *a*) La mesure en degrés est donnée par : $\alpha° = \pi \times \dfrac{180°}{\pi} = 180°$. La mesure de l'angle est de 180°.

   b) 360°
   c) 60°
   d) 225°
   e) 57°17'45"
   f) 150°
   g) 240°
   h) 315°

6. *a*) Puique la mesure de l'angle en radians est donnée par $\theta = \dfrac{L}{r}$, la longueur de l'arc est $L = r\theta = 5 \times 2\pi$ rad $=10\pi$

   Le rayon est mesuré en centimètres, on trouve donc 10π cm comme longueur d'arc, soit environ 31,42 cm.

   b) L'angle est donné en degrés, on peut le convertir en radians avant de calculer la longueur d'arc. On trouve alors :

   $\theta = \dfrac{135°}{180°} \times \pi$. En substituant dans la relation $L = r\theta$, on obtient : $L = r\theta = r \times \dfrac{135°}{180°} \times \pi$

   En substituant la longueur du rayon et en effectuant les calculs, on obtient :

   $L = r\theta = r \times \dfrac{135°}{180°} \times \pi = 8 \times \dfrac{135°}{180°} \times \pi = 18{,}84955...$

   On trouve donc $L \approx 18{,}85$ m.

7. *a*) On connaît la mesure de l'angle au centre, θ = 2π rad, et la longueur de l'arc intercepté, L = 20 cm. On cherche la longueur du rayon. Puisque $\theta = \dfrac{L}{r}$, on a $r = \dfrac{L}{\theta} = \dfrac{20\text{ cm}}{2\pi} = 3{,}18309...$ cm

   Le rayon est d'environ 3,183 cm.

   La circonférence est donnée par $C = 2\pi r = 2\pi \times 3{,}18309... = 20$ cm.

   b) On connaît la mesure de l'angle au centre, θ = 25°, et la longueur de l'arc intercepté, L = 12 m. On cherche la longueur du rayon. Puisque $\theta = \dfrac{L}{r}$ et $\theta = \dfrac{\alpha°}{180°} \times \pi$ on a $\dfrac{\alpha°}{180°} \times \pi = \dfrac{L}{r}$. Cela donne $r = L \times \dfrac{180°}{\alpha°} \times \dfrac{1}{\pi}$.

   En substituant les données et en effectuant les calculs, on a alors : $r = 12 \times \dfrac{180°}{25°} \times \dfrac{1}{\pi} = 27{,}5019...$

   Le rayon est d'environ 27,50 m.

   La circonférence est donnée par $C = 2\pi r = 2\pi \times 27{,}5019... = 86{,}4$ m.

8. *a*) La roue fait 24 tours/min. Or, il y a 60 secondes dans une minute. Par conséquent, en une seconde, elle fait 1/60 de 24 tours, soit :

   $24 \dfrac{\text{tours}}{\text{min}} \times \dfrac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = \dfrac{24}{60} \dfrac{\text{tour}}{\text{s}} = 0{,}4 \text{ tours/s}$

   b) Un tour correpond à un angle au centre de 2π rad. Par conséquent, si la roue fait 24 tours/min, sa vitesse en radians par minute est donnée par : $24 \dfrac{\text{tours}}{\text{min}} \times \dfrac{2\pi\text{ rad}}{\text{tour}} = 48\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{min}}$

   La vitesse est donc de 48π rad/min.

   c) De la même façon, on obtient $0{,}4 \dfrac{\text{tour}}{\text{s}} \times \dfrac{2\pi\text{ rad}}{\text{tour}} = 0{,}8\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$. La vitesse est donc de 4π/5 rad/s.

9. *a*) On peut considérer que la longueur de 6 cm est une mesure exacte. En vingt minutes, l'aiguille fait 1/3 de tour puique 1 tour correspond à 60 minute. La meure de l'angle au centre est de 2π/3 rad, la longueur de l'arc est donc :

   $L = \dfrac{2\pi}{3} \times 6 = 4\pi = 12{,}5663...$

   La longueur de l'arc parcouru en vingt minutes est d'environ 12,57 cm.

   b) En trente-cinq minutes, l'aiguille décrit un angle de $\dfrac{35}{60} \times 2\pi = \dfrac{7\pi}{6}$ rad, d'où :

   $L = \dfrac{7\pi}{6} \times 6 = 7\pi = 21{,}9911...$

   La longueur de l'arc parcouru en trente-cinq minutes est d'environ 21,99 cm.

10. $t°$ = 30°, d'où θ = π/6 rad et L = (π/6) × 6373 = 3337 km.

11. Puisque $\theta = L/r$, on trouve θ = 434/6 373 = 0,0681 rad = 3,9° = 3°54’07".

12. $\omega = v/r$ = 15 m/s ÷ 1,5 m = 10 rad/s

13. Il faut d’abord exprimer les deux vitesses dans la même unité de temps :

$$50\ \frac{\text{tour}}{\text{min}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = \frac{5}{6}\ \frac{\text{tour}}{\text{s}}$$

Pour utiliser la relation entre les vitesses, il faut que la vitesse angulaire sot en radians par seconde, en convertissant, on obtient :

$$\frac{5}{6}\ \frac{\text{tour}}{\text{s}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{tour}} = \frac{10\pi}{6}\ \text{rad/s} = \frac{5\pi}{3}\ \text{rad/s}$$

La relation entre la vitesse tangentielle et la vitesse angulaire est $v = r$w, ce qui donne :

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{12\ \text{m/s}}{5\pi/3\ \text{rad/s}} = \frac{36}{5\pi}\ \text{m} = 2{,}2918...\ \text{m}$$

Le diamètre est donné par : $d = 2r$ = 2 ¥ 2,2918... = 4,5836...
Le diamètre est donc d’environ 4,58 m.

14. On connaît le rayon, r = 35 cm, et la longueur de l’arc, L = 15 cm et on cherche l’angle dcrit. On a alors : $\theta = \frac{L}{r} = \frac{15\ \text{cm}}{35\ \text{cm}} = \frac{3}{7}$ rad = 24°33'19"

15. Ératosthène connaissait l’angle au centre a° = 7,5° et la longueur de l’arc intercepté L = 800 km.

Par conséquent, l’arc intercepté représente 7,5/360 de la circonférence terrestre, soit : $\frac{800\ \text{km}}{C} = \frac{7{,}5°}{360°}$

D’où l’on tire : $C = 800\ \text{km} \times \frac{360}{7{,}5} = 38\ 400\ \text{km}$

À l’aide de ces données, on peut estimer que la circonférence terrestre est de 38 400 km.

la circonférence est donnée par $C = 2\pi r$. On a donc : $r = \frac{C}{2\pi}$.

En utilisant la valeur 22/7, on trouve : $r = \frac{C}{2\pi} = \frac{38\ 400}{2(22/7)} = \frac{38\ 400 \times 7}{44} = 6\ 109\ \text{km}$

En utilisant la valeur 223/71, on trouve : $r = \frac{C}{2\pi} = \frac{38\ 400}{2(223/71)} = \frac{38\ 400 \times 71}{446} = 6\ 113\ \text{km}$

16. En exprimant la vitesse de l’auto en mètres par seconde, on trouve : $v = \frac{75000}{3600}$ = 20,83 m/s et r = 0,34 m.

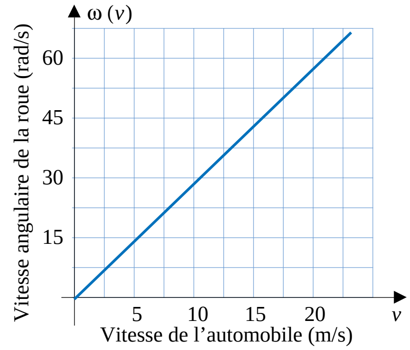
La relation entre les vitesses est $v = r\omega$, d’où $\omega = \frac{v}{r}$.

En substituant les données et en effectuant les calculs, on obtient :

$$\omega = \frac{20{,}83\ \text{m/s}}{0{,}34\ \text{m}} = 61{,}27\ \text{rad/s} = 585\ \text{t/min}$$

17. $\omega = v/r$ d'où $\omega(v) = v/0{,}35 = 2{,}86v$ où v est en m/s et w en rad/s.

v (m/s)	5	10	15	20
v(km/h)	18	36	54	72
ω (rad/s)	14,3	28,6	42,9	57,2



18. On peut établir une relation entre la vitesse v_c de la courroie et la vitesse angulaire de chacune des roues, cela donne : $v_c = r_1\omega_1$ et $v_c = r_2\omega_2$, on a donc $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$. En isolant ω_2, on trouve :

$$\omega_2 = \frac{r_1\omega_1}{r_2} = \frac{0{,}15 \text{ m}}{0{,}24 \text{ m}} \times 50 \text{ t/min} = 31{,}25 \text{ t/min}$$

En considérant que le rayon des poulies est une valeur exacte donnée par l'industriem, on retiendra 31,25 t/min.

19. La vitesse de la courroie est $v_c = r_1\omega_1$ et $v_c = r_2\omega_2$, on a donc en arrondissant :

$$\omega_2 = \frac{r_1\omega_1}{r_2} = \frac{0{,}26 \text{ m}}{0{,}14 \text{ m}} \times 68 \text{ t/min} = 126 \text{ t/min}$$

20. La vitesse de la courroie est $v_c = r_1\omega_1$ et $v_c = r_2\omega_2$, on a donc en arrondissant :

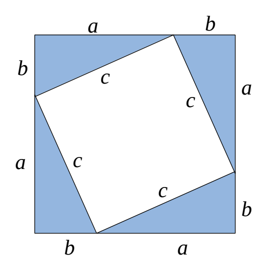
$$\omega_1 = \frac{v_c}{r_1} = \frac{2{,}8 \text{ m/s}}{0{,}26 \text{ m}} = 10{,}8 \text{ rad/s} = 1{,}71 \text{ t/s} = 103 \text{ t/min}$$

$$\omega_2 = \frac{v_c}{r_2} = \frac{2{,}8 \text{ m/s}}{0{,}12 \text{ m}} = 23{,}3 \text{ rad/s} = 3{,}71 \text{ t/s} = 223 \text{ t/min}$$

21. La vitesse de la courroie est $v_c = r_1\omega_1$ et $v_c = r_2\omega_2$, où r_1 est le rayon de la roue motrice et ω_1 est la vitesse angulaire de la roue motrice. On a donc, en isolant ω_2,

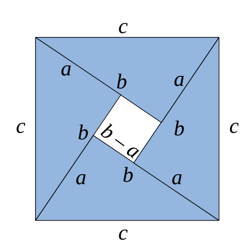
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{r_1\omega_1}{r_2}$$

22. L'aire du carré peut être obtenue en prenant le carré du côté ou encore en faisant la somme de l'aire du carré blanc et des aires des triangles. On a donc :



$$(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

23. L'aire du carré peut être obtenue en prenant le carré du côté ou encore en faisant la somme de l'aire du carré blanc et des aires des triangles. On a donc :



$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2$$
$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

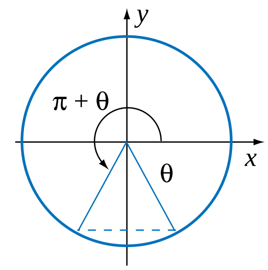
6.4 EXERCICES

1. *a*) $\arcsin(1) = \pi/2$ rad $= 1{,}57$ rad
   b) $\arcsin(–0{,}5) = –\pi/6$ rad $= 0{,}524$ rad
   c) $\arctan(–1) = –\pi/4$ rad $= –0{,}785$ rad
   d) $\arcsin(–1) = –\pi/2$ rad $= –1{,}57$ rad
   e) $\arctan(1) = \pi/4$ rad $= 0{,}785$ rad
   f) $\arccos(–0{,}866) = 2{,}618$ rad
   g) $\arcsin(0{,}789) = 0{,}909$ rad
   h) $\arctan(1{,}4142) = 0{,}955$ rad
   i) $\arccos(–2)$ n'est pas défini
   j) $\arccos(0{,}866) = 0{,}524$ rad
   k) $\arcsin(0{,}707) = 0{,}785$ rad
   l) $\arccos(1) = 0$ rad
   m) $\arcsin(0{,}345) = 0{,}352$rad
   n) $\arccos(0) = \pi/2$ rad $= 1{,}57$ rad
   o) $\arccos(–0{,}654) = 2{,}284$ rad

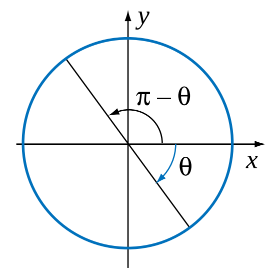
2. *a*) La calculatrice donne $\theta = \arcsin(–0{,}88) = –1{,}0759$ rad. La valeur principale n'est pas dans l'intervalle donné, mais la symétrie par rapport à l'axe des y donne :

   $$\sin(\pi – \theta) = \sin \theta$$

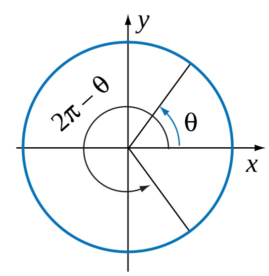
   On a donc : $\pi – \theta = \pi – (–1{,}0759) = 4{,}2175$
   Cette valeur est bien comprise dans l'intervalle $[\pi/2;3\pi/2] = [1{,}5708; 4{,}7124]$.
   En degrés, la calculatrice donne $–61{,}64°$ et :
   $180° – (–61{,}64°) = 241{,}64°$.



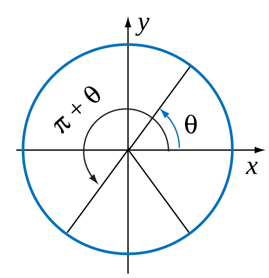
   b) La calculatrice donne $\theta = \arctan(– 1{,}44) = –0{,}9638$ rad. La valeur principale n'est pas dans l'intervalle donné, mais la symétrie par rapport à l'origine donne :
   $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$. On a donc $\pi + \theta = \pi + (–0{,}9638) = 2{,}1778$.
   Cette valeur est bien comprise dans l'intervalle $[\pi/2;3\pi/2] = [1{,}5708; 4{,}7124]$.
   En degrés, la calculatrice donne $– 55{,}22°$ et $180° + (–55{,}22°) = 124{,}78°$.



   c) La calculatrice donne $\theta = \arccos(0{,}6) = 0{,}9273$ rad. La valeur principale n'est pas dans l'intervalle donné, mais la symétrie par rapport à l'axe des x donne :
   $\cos(–\theta) = \cos \theta$. On a donc $–\theta = –0{,}9273$ rad.
   En exprimant positivement, on obtient :
   $2\pi – \theta = 2\pi – 0{,}9273$ rad $= 5{,}3559$ rad. Cette valeur est bien comprise dans l'intervalle $[\pi;2\pi] = [3{,}1416; 6{,}2832]$.
   En degrés, la calculatrice donne $53{,}13°$ et $360° + (–53{,}13°) = 306{,}87°$.



   d) La calculatrice donne $\theta = \arctan(1{,}44) = 0{,}9638$ rad. La valeur principale est dans l'intervalle donné, mais ce n'est pas la seule solution possible. La symétrie par rapport à l'origine donne :
   $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$. On a donc $\pi + \theta = \pi + (0{,}9638) = 4{,}1054$.
   Cette valeur est également comprise dans l'intervalle $[0;2\pi] = [0; 6{,}2832]$.
   En degrés, la calculatrice donne $55{,}22°$ et $180° + (55{,}22°) = 235{,}22°$.



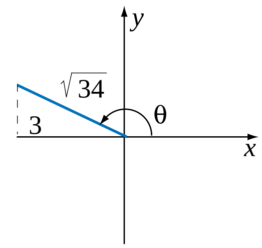
3. *a*) $\cos 3\theta = 1/2$ d'où $3\theta = \arccos (1/2) = \pi/3$ et $\theta = \pi/9$ rad $= 0{,}3491$ rad $= 20°$.
   b) $\sin 2\theta = 1/2$ d'où $2\theta = \arcsin (1/2) = \pi/6$ et $\theta = \pi/12$ rad $= 0{,}2618$ rad $= 15°$.
   c) $\sec^2 \theta = 4$ d'où $\cos^2 \theta = 1/4$ et $\cos \theta = \pm 1/2$. On a donc deux équations: $\cos \theta = 1/2$ qui donne :
   $\theta = \arccos(1/2) = \pi/3$ rad $= 60°$ et $\cos \theta = –1/2$ qui donne $\theta = \arccos(– 1/2) = 2\pi/3$ rad $= 120°$.
   d) $\tan \theta = \sin \theta$, d'où $\sin \theta = \sin \theta \cos \theta$ et $\sin \theta – \sin \theta \cos \theta = 0$; par mise en évidence, on obtient :
   $\sin \theta(1 – \cos \theta) = 0$. Par l'intégrité des réels, on a deux équations $\sin \theta = 0$ et $1 – \cos \theta = 0$.
   Chacune de ces équations donne $\theta = 0$ rad $= 0°$.
   e) $\sin^2 \theta + \sin 2\theta = 0$, d'où $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 0$ et $\sin \theta (\sin \theta + 2 \cos \theta) = 0$.
   Par l'intégrité des réels, on a deux équations : $\sin \theta = 0$ et $\sin \theta + 2 \cos \theta = 0$.

   La première équation donne $\theta = 0$ et la deuxième donne : $\sin \theta = –2 \cos \theta$ d'où $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = –2$ et $\tan \theta = –2$.

   On a donc : $\theta = \arctan (–2) = –1{,}1071$ rad $= –63{,}43°$

f) $2\sin^2\theta = 1 + \sin\theta$, d'où $2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$. On a donc une expression quadratique et $\sin\theta = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$, d'où l'on tire $\sin\theta = 1$ et $\sin\theta = -1/2$.
D'où $\theta = \arcsin(1) = \pi/2$ rad $= 90°$ et $\theta = \arcsin(-1/2) = -\pi/6$ rad $= -30°$.

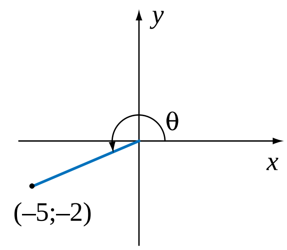
4. *a*) Par la fonction sinus, la calculatrice donne :



$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{34}},\ \text{d'où } \theta = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = 30{,}96°$$

Puisque l'angle est plus grand que 90°, la valeur de l'angle sera :
$$180° - 30{,}96° = 149{,}04°.$$

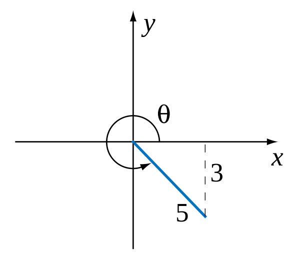
b) 225°



c) Par la fonction tangente, la calculatrice donne
$$\tan\theta = \frac{-2}{-5},\ \text{d'où } \theta = \arctan\left(\frac{-2}{-5}\right) = 21{,}80°$$

Puisque l'angle est plus grand que 180°, la valeur de l'angle sera :
$$180° + 21{,}80° = 201{,}80°$$

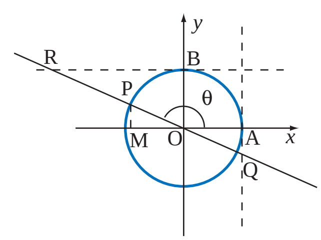
d) 111,80°



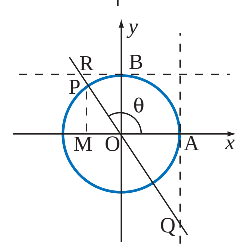
e) Par la fonction cosinus, la calculatrice donne :
$$\cos\theta = \frac{3}{5},\ \text{d'où } \theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13°$$

Puisque l'angle est plus grand que 270°, la valeur de l'angle sera :
$360° - 53{,}13° = 306{,}87°$

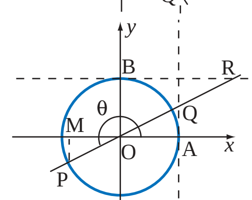
f) 210,96°



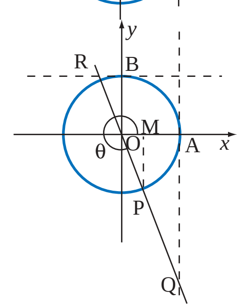
5. *a*) $\sin\theta \approx 0{,}41$, $\cos\theta \approx -0{,}91$,
$\tan\theta \approx -0{,}45$, $\cot\theta \approx -2{,}25$,
$\sec\theta \approx -1{,}09$, $\operatorname{cosec}\theta \approx 2{,}46$, $r \approx 3$.



b) $\sin\theta \approx 0{,}83$, $\cos\theta \approx -0{,}55$,
$\tan\theta \approx -1{,}51$, $\cot\theta \approx -0{,}66$,
$\sec\theta \approx -1{,}81$, $\operatorname{cosec}\theta \approx 1{,}20$, $r \approx 6$.



c) $\sin\theta \approx -0{,}45$, $\cos\theta \approx -0{,}89$,
$\tan\theta \approx 0{,}51$, $\cot\theta \approx 1{,}96$,
$\sec\theta \approx -1{,}12$, $\operatorname{cosec}\theta \approx -2{,}20$, $r \approx 9{,}2$.

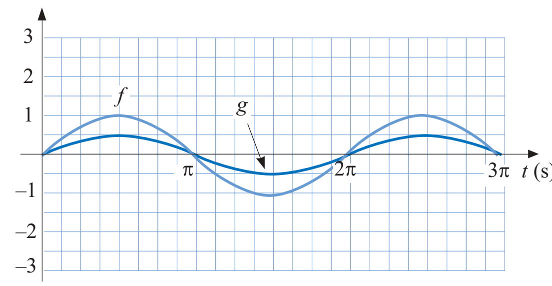


d) $\sin\theta \approx -0{,}93$, $\cos\theta \approx 0{,}36$,
$\tan\theta \approx -2{,}61$, $\cot\theta \approx -0{,}38$,
$\sec\theta \approx 2{,}79$, $\operatorname{cosec}\theta \approx -21{,}7$, $r \approx 5$.

6. *a*) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et } g(t) = 0{,}5 \sin t$$

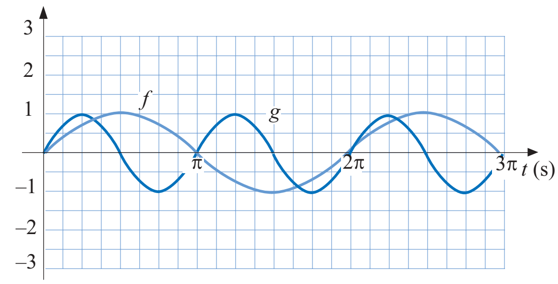
L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 0,5 unité. Leur période est 2π s et leur fréquence est $1/(2\pi)$ Hz. L'angle de phase initial est nul dans chaque cas, le déphasage de chacune des fonctions est donc nul.



b) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et } g(t) = \sin 2t$$

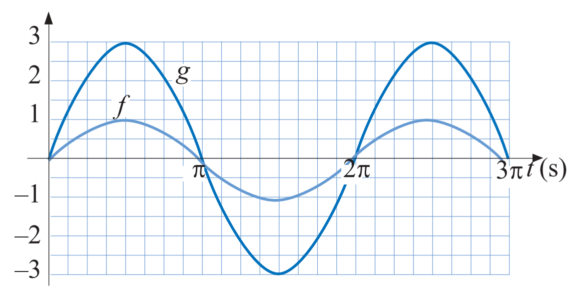
L'amplitude des deux fonctions est de une unité. La période de $f(t)$ est 2π s et sa fréquence est $1/(2\pi)$ Hz. La période de $g(t)$ est de π s et sa fréquence est de $1/\pi$ Hz. L'angle de phase initial est nul dans chaque cas, le déphasage de chacune des fonctions est donc nul.



c) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et } g(t) = 3 \sin t$$

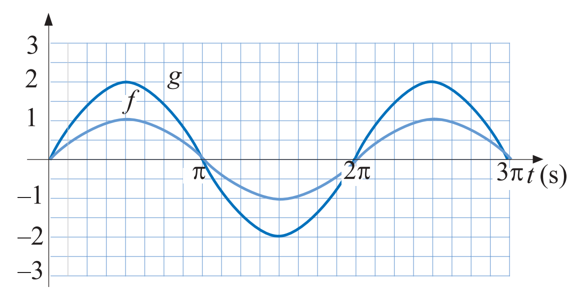
L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 3 unités. Leur période est 2π s et leur fréquence est $1/(2\pi)$ Hz. L'angle de phase initial est nul dans chaque cas, le déphasage de chacune des fonctions est donc nul.



d) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et } g(t) = 2 \sin t$$

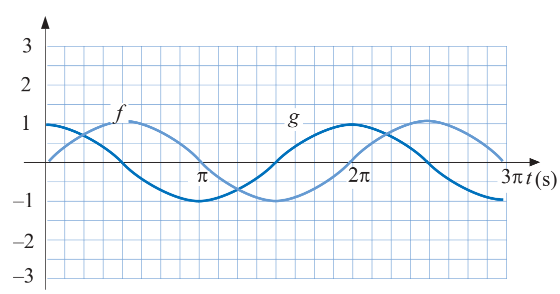
L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 2 unités. Leur période est 2π s et leur fréquence est $1/(2\pi)$ Hz. L'angle de phase initial est nul dans chaque cas, le déphasage de chacune des fonctions est donc nul.



e) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et } g(t) = \sin(t + \pi/2)$$

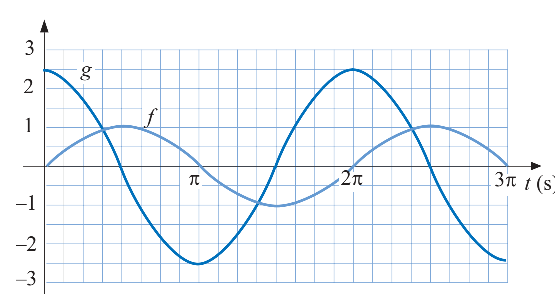
L'amplitude des deux fonctions est de une unité. Leur période est 2π s et leur fréquence est $1/(2\pi)$ Hz. L'angle de phase initial de $f(t)$ est nul, son déphasage est donc nul. L'angle de phase initial de $g(t)$ est $\pi/2$, cette fonction a un déphasage de $-\pi/2$ seconde. La fonction $g(t)$ est en avance de phase sur la fonction $f(t)$.



f) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \text{ et } g(t) = 2{,}5 \sin(t + \pi/2)$$

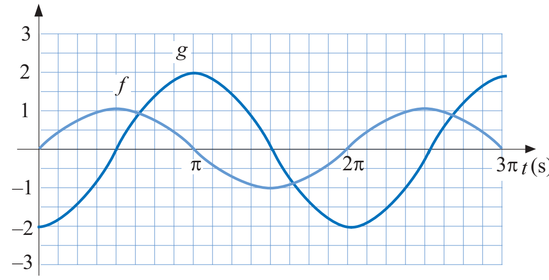
L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 2,5 unités. Leur période est 2π s et leur fréquence est $1/(2\pi)$ Hz. L'angle de phase initial de $f(t)$ est nul, son déphasage est donc nul. L'angle de phase initial de $g(t)$ est $\pi/2$ rad, cette fonction a un déphasage vers la gauche de $-\pi/2$ seconde. La fonction $g(t)$ est en avance de phase sur la fonction $f(t)$.



g) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = 2\sin(t - \pi/2)$$

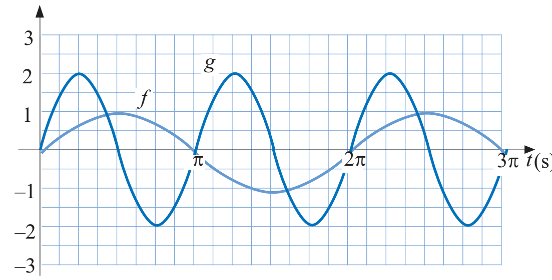
L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 2 unités. Leur période est 2π s et leur fréquence est 1/(2π) Hz. L'angle de phase initial de $f(t)$ est nul, son déphasage est donc nul. L'angle de phase initial de $g(t)$ est – π/2 rad, cette fonction a un déphasage vers la droite de π/2 seconde. La fonction $g(t)$ est en retard de phase sur la fonction $f(t)$.



h) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = 2\sin 2t$$

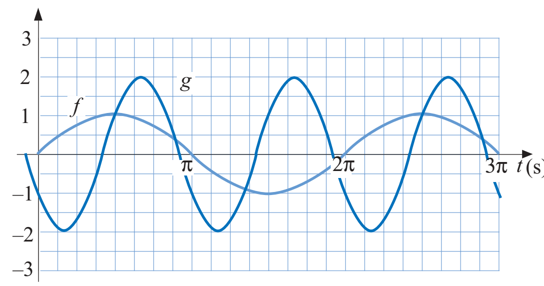
L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 2 unités. La période de $f(t)$ est de 2π s et sa fréquence est 1/(2π) Hz. La période de $g(t)$ est de π s et sa fréquence est 1/π Hz. L'angle de phase initial des deux fonctions est nul, leur déphasage est donc nul.



i) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = 2\sin(2t - 3)$$

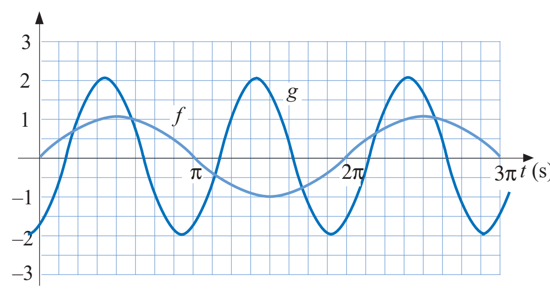
L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 2 unités. La période de $f(t)$ est de 2π s et sa fréquence est 1/(2π) Hz. La période de $g(t)$ est de π s et sa fréquence est 1/π Hz. L'angle de phase initial de $f(t)$ est nul, son déphasage est donc nul. L'angle de phase initial de $g(t)$ est –3 rad, cette fonction a un déphasage de 3/2 seconde vers la droite.



j) Les modèles sinusoïdaux sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = 2\sin(2t - 1)$$

L'amplitude de $f(t)$ est de une unité et celle de $g(t)$ est de 2 unités. La période de $f(t)$ est de 2π s et sa fréquence est 1/(2π) Hz. La période de $g(t)$ est de π s et sa fréquence est 1/π Hz. L'angle de phase initial de $f(t)$ est nul, son déphasage est donc nul. L'angle de phase initial de $g(t)$ est –1 rad, cette fonction a un déphasage de 1/2 seconde vers la droite.



7. *a*) $T = 2\pi$ s, $f = 1/(2\pi)$ Hz, $-\phi/\omega = 0$ s, $|A| = 4$, $f(t) = 4\sin t$
   b) $T = 2\pi$ s, $f = 1/(2\pi)$ Hz, $-\phi/\omega = -\pi/2$ s, $|A| = 2$, $f(t) = 2\sin(t + \pi/2)$
   c) $T = \pi$ s, $f = 1/\pi$ Hz, $-\phi/\omega = 0$ s, $|A| = 4$, $f(t) = 4\sin(2t)$
   d) $T = \pi/2$ s, $f = 2/\pi$ Hz, $-\phi/\omega = \pi/4$ s, $|A| = 3$, $f(t) = 3\sin(4t - \pi)$
   e) $T = \pi/2$ s, $f = 2/\pi$ Hz, $-\phi/\omega = 0$ s, $|A| = 2$, $f(t) = 2\sin(4t)$
   f) $T = 3/4$ s, $f = 4/3$ Hz, $-\phi/\omega = -1/4$ s, $|A| = 2$, $f(t) = 2\sin(8\pi t/3 + 2\pi/3)$
   g) $T = 1/2$ s, $f = 2$ Hz, $-\phi/\omega = 0$ s, $|A| = 3$, $f(t) = 3\sin(4\pi t)$
   h) $T = 2$ s, $f = 1/2$ Hz, $-\phi/\omega = -1/4$ s, $|A| = 3$, $f(t) = 3\sin(\pi t + \pi/4)$

8. *a*) La vitesse est connue, c'est celle de la lumière, $c = 2{,}9979 \times 10^8$ m/s. On peut déterminer la fréquence ν en connaissant la longueur d'onde λ, puisque :

$$\lambda\nu = c$$

Il faut d'abord exprimer la longueur d'onde en mètres. Puisque λ = 450 nm, on a :

$$\lambda = 4{,}50 \times 10^{-2} \times \frac{1 \text{ m}}{10^9 \text{ nm}} = 4{,}50 \times 10^{-7} \text{ m}$$

En isolant ν et en substituant les données, on trouve :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2{,}9979 \times 10^8 \text{ m/s}}{4{,}50 \times 10^{-7} \text{ m}} = 0{,}6662 \times 10^{15}$$

La fréquence est de $6{,}66 \times 10^{14}$ Hz, en arrondissant à trois chiffres significatifs.

b) L'énergie d'un quantum est alors :

$$\Delta E = h\nu = (6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J·s})\ (6{,}66 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1}) = 4{,}41 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Lorsqu'une lumière de 450 nm de longueur d'onde est émise en chauffant du CuCl, la perte d'énergie ne se fait que par des « paquets » de $4{,}41 \times 10^{-19}$ J, soit la valeur d'un quantum.

9. *a*) Exprimons la longueur d'onde en mètres. Puisque $\lambda = 780$ nm, on a :

$$\lambda = 7{,}80 \times 10^{-2} \times \frac{1\ \text{m}}{10^9\ \text{nm}} = 7{,}80 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

En isolant ν et en substituant les données, on trouve :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2{,}9979 \times 10^8\ \text{m/s}}{7{,}80 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 0{,}3843... \times 10^{15}$$

La fréquence est de $3{,}84 \times 10^{14}$ Hz, en arrondissant à trois chiffres significatifs.

b) L'énergie d'un photon est alors :

$$\Delta E = h\nu = (6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J·s})\ (3{,}84 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1}) = 2{,}54 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

10. La fréquence est de 102,3 MHz, soit $1{,}023 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$. On a alors :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2{,}9979 \times 10^8\ \text{m/s}}{1{,}023 \times 10^6\ \text{s}^{-1}} = 12{,}705... \times 10^2$$

La longueur d'onde est de $1{,}271 \times 10^3$ m.

11. *a*) Exprimons les longueurs d'onde en mètres.

$$\lambda_1 = 407{,}7 \times 10^{-2} \times \frac{1\ \text{m}}{10^9\ \text{nm}} = 4{,}077 \times 10^{-7}\ \text{m et } \lambda_2 = 435{,}8 \times 10^{-2} \times \frac{1\ \text{m}}{10^9\ \text{nm}} = 4{,}358 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

Calculons les fréquences :

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{2{,}9979 \times 10^8\ \text{m/s}}{4{,}077 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 0{,}73532... \times 10^{15} \text{ et } \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{2{,}9979 \times 10^8\ \text{m/s}}{4{,}358 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 0{,}6879... \times 10^{15}$$

Les fréquences sont de $7{,}353 \times 10^{14}$ Hz et $6{,}879 \times 10^{14}$ Hz.

b) L'énergie d'un photon est alors :

$$\Delta E_1 = h\nu_1 = (6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J·s})\ (7{,}353 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1}) = 4{,}899 \times 10^{-19}\ \text{J/photon}$$
$$\Delta E_2 = h\nu_2 = (6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J·s})\ (6{,}879 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1}) = 4{,}558 \times 10^{-19}\ \text{J/photon}$$

Dans une mole de photons, l'énergie de lumière est :

$$6{,}022 \times 10^{23}\ \Delta E_1 = 6{,}022 \times 10^{23} \times 4{,}899 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}950 \times 10^5\ \text{J/mol}$$
$$6{,}022 \times 10^{23}\ \Delta E_2 = 6{,}022 \times 10^{23} \times 4{,}558 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}745 \times 10^5\ \text{J/mol}$$

12. *a*) $\sin(e^{2x+1}) = 0{,}30$, d'où $e^{2x+1} = \arcsin(0{,}30)$ et $2x + 1 = \ln(\arcsin(0{,}30))$.

En isolant x, on trouve : $2x = \ln(\arcsin(0{,}30)) - 1$ et $x = 0{,}5\,[\ln(\arcsin(0{,}30)) - 1] = -1{,}09422$

Cette valeur n'est pas dans l'intervalle donné, cependant tous les angles α de la forme $\alpha = (2n + 1) - \theta$, où n est un entier, ont la même valeur de sinus que θ. On peut donc considérer ces angles. On a alors :

$x = 0{,}5\,[\ln(\pi + \arcsin(0{,}30)) - 1] = 0{,}1186$

$x = 0{,}5\,[\ln(2\pi + \arcsin(0{,}30)) - 1] = 0{,}4426$

$x = 0{,}5\,[\ln(3\pi + \arcsin(0{,}30)) - 1] = 0{,}6376$

L'ensemble solution est donc {0,1186; 0,4426; 0,4426}

b) Par les propriétés des logarithmes, on a : $\log\left(\frac{\tan\ x}{\sin\ x}\right) = 0{,}380$. Or, $\tan\ x = \frac{\sin\ x}{\cos\ x}$. En substituant, on obtient : $\log\left(\frac{\sin\ x}{\cos\ x} \times \frac{1}{\sin\ x}\right) = \log\left(\frac{1}{\cos\ x}\right) = 0{,}380$. Cela donne $\log 1 - \log \cos x = 0{,}380$ or, $\log 1 = 0$. On a donc :

$\log \cos x = -0{,}380$, d'où $\cos x = 10^{-0{,}380}$ et $x = \arccos(10^{-0{,}380}) = 1{,}14079...$

L'ensemble solution est {1,14}.

c) $e^{\sin(3t+1)} = 0{,}47$, d'où $\sin(3t + 1) = \ln 0{,}47$ et $3t + 1 = \arcsin(\ln 0{,}47)$. Cela donne :

$t = \frac{1}{3}\,[\arcsin(\ln\ 0{,}47) - 1] = -0{,}6185...$ Cette valeur n'est pas dans l'intervalle donné, cependant tous les angles α de la forme $\alpha = (2n + 1) - \theta$, où n est un entier, ont la même valeur de sinus que θ. On peut donc considérer ces angles. On a alors :

$t = \frac{1}{3}\,[\pi + \arcsin(\ln\ 0{,}47) - 1] = 0{,}4286...$ et $t = \frac{1}{3}\,[2\pi + \arcsin(\ln\ 0{,}47) - 1] = 1{,}4758...$

L'ensemble solution est {0,4286; 1,4758}.

d) $\tan 0{,}150\alpha\,(10^{\sec 2{,}50\alpha} - 1{,}75) = 0$. Cela donne $0{,}150\alpha\,(10^{\sec 2{,}50\alpha} - 1{,}75) = \arctan 0 = 0$. On a un produit nul de deux expressions algébriques. On doit donc considérer $0{,}150\alpha = 0$, mais cela donne $\alpha = 0$ qui est à rejeter. L'autre expression est $(10^{\sec 2{,}50\alpha} - 1{,}75) = 0$ qui donne $10^{\sec 2{,}50\alpha} = 1{,}75$, d'où $\sec 2{,}50\alpha = \log 1{,}75$ et $\cos 2{,}5\alpha = \frac{1}{\log 1{,}75}$.

On obtient alors : $\alpha = \frac{1}{2{,}5}\arccos\left(\frac{1}{\log 175}\right) = 0{,}4\ \arccos\left(\frac{1}{\log 175}\right) = 0{,}4434$ et

$\alpha = 0{,}4\left(2\pi + \arccos\left(\frac{1}{\log 175}\right)\right) = 2{,}956...$

et $\alpha = 0{,}4\left(4\pi + \arccos\left(\frac{1}{\log 175}\right)\right) = 6{,}7266...$

L'ensemble solution est { 2,96; 6,73}

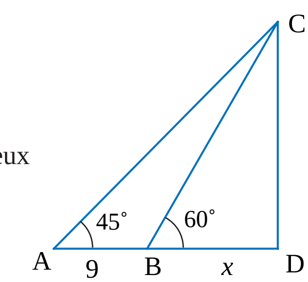
e) $\tan(\log 3\theta + \log \theta) = 1{,}53$, d'où $\tan(\log 3\theta^2) = 1{,}53$ et $\log 3\theta^2 = \arctan 1{,}53$. Cela donne $3\theta^2 = 10^{\arctan 1{,}53}$.

$\theta = \sqrt{\frac{1}{3}(10^{\arctan 1{,}53})} = 1{,}8087...$ De plus, $\theta = \sqrt{\frac{1}{3}(10^{\pi + \arctan 1{,}53})} = 67{,}322...$

L'ensemble solution est {1,81; 67,33}

EXERCICES 6.6

1. *a*) En utilisant les rapports trigonométriques, on obtient :



$\tan 45° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, d'où $\overline{AD} = \frac{\overline{CD}}{\tan 45°} = 9 + x$ et : $\tan 60° = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$, d'où $\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{\tan 60°} = x$

En soustrayant ces deux résultats, ou en résolvant le système de deux équations à deux inconues, on obtient :

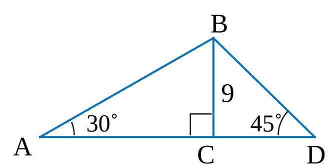
$\frac{\overline{CD}}{\tan 45°} - \frac{\overline{CD}}{\tan 60°} = 9$ par mise en évidence, on obtient : $\overline{CD}\left(\frac{1}{\tan 45°} - \frac{1}{\tan 60°}\right) = 9$

$$\overline{CD} = \frac{9}{\left(\frac{1}{\tan 45°} - \frac{1}{\tan 60°}\right)} = 21{,}2942...$$

En utilisant ce résultat avec les rapports trigonométriques, on trouve :

$\overline{BD} = 12{,}29$, $\overline{CB} = 24{,}59$, $\overline{AC} = 30{,}11$

b) En utilisant les rapports trigonométriques, on obtient:



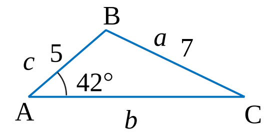
$\tan 30° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, d'où $\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\tan 30°} = 9\sqrt{3} = 15{,}59$

$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = 15{,}59 + 9 = 24{,}59$

Comme hypoténuse d'un triangle rectangle ayant un angle de 30°, $\overline{AB}$ est le double du côté opposé à l'angle de 30°, on a donc $\overline{AB}$ = 18 et :

$\cos 45° = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$, d'où $\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{\cos 45°} = 9\sqrt{2} = 12{,}73$

c) On connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un des côtés. Puisque l'angle donné est opposé au plus grand des deux côtés, il n'y a pas d'ambiguïté possible et il existe une seule solution qu'il faut trouver par la loi des sinus, on a :

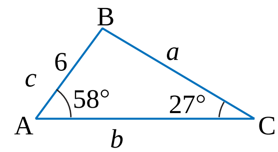


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}\text{, d'où } \sin C = \frac{c}{a}\sin A = \frac{5}{7}\sin 42° = 0{,}478$$

d'où ∠C = arcsin(0,478) = 28,55° et ∠B = 109,45° De plus :

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{7\ \sin 58°}{\sin 27°} = 9{,}86$$

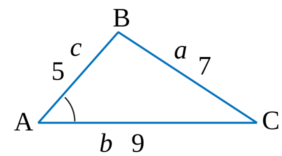
d) On donne deux angles et le côté opposé à l'un des deux. Il n'y a pas d'ambiguïté possible car le troisième angle est uniquement déterminé.



$$\angle B = 180° - (58° + 27°) = 95° \text{ et : } a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{6\ \sin 58°}{\sin 27°} = 11{,}2$$

$$\text{De plus : } b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{6\ \sin 95°}{\sin 27°} = 13{,}2$$

e) On connaît trois côtés, la solution est donc unique et en utilisant la loi des cosinus, on a :



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{81 + 25 - 49}{90}$$

$$\text{d'où : } \angle A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \arccos\left(\frac{81 + 25 - 49}{90}\right) = 50{,}70°.$$

$$\text{De plus : } \sin B = \frac{b}{a}\ \sin A = \frac{9}{7}\ \sin\ 50{,}70° \text{ et } \angle B = \arcsin\left(\frac{b}{a}\ \sin A\right) = \arcsin\left(\frac{9}{7}\ \sin\ 50{,}70°\right) = 84{,}23°$$

Puisque le sinus est positif entre 0° et 180°, on doit envisager les deux possibilités ∠B = arcsin(0,998) = 84,23° ou 95,77°. La somme des angles étant de 180°, on trouvera pour le troisième angle les valeurs ∠C = 43,07° ou 33,53°. On sait que la solution est unique, mais laquelle est la bonne ? La loi des sinus va nous permettre de trancher, en effet la solution acceptable doit vérifier la loi des sinus. On constate que :

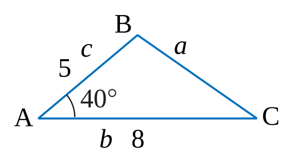
$\frac{7}{\sin\ 50{,}70°} \neq \frac{5}{\sin\ 45{,}07} \neq \frac{9}{\sin\ 84{,}23°}$, en effet ces rapports donnent respectivement 9,046, 7,062 et 9,046. Par ailleurs, on a : $\frac{7}{\sin\ 50{,}70°} = \frac{5}{\sin\ 33{,}56} = \frac{9}{\sin\ 95{,}74°}$.

Ces rapports donnent respectivement 9,046, 9,052 et 9,035.

Ces rapports sont à peu près égaux. Les arrondis successifs expliquent ces légères différences. En appliquant la loi des cosinus pour chaque angle, on trouve ∠A = 50,70°, ∠B = 84,26° ou 95,74 et ∠C = 45,04° ou 33,56°.

f) On connaît deux côtés et l'angle compris, la solution est donc unique. Par la loi des cosinus, on a :

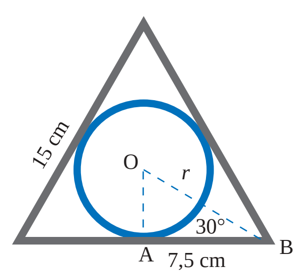
a^2 = 25 + 64 – 80 cos 40° = 27,72 et a = 5,26 . Par la loi des sinus :



$$\sin C = \frac{c\ \sin A}{a} = \frac{5\sin 40°}{5{,}25} = 0{,}611$$

Puisque le sinus est positif entre 0° et 180°, on doit envisager les deux possibilités : ∠C = arcsin(0,611) = 37,66° ou 180° – 37,66° = 142,34°. Cette deuxième valeur est à éliminer car la loi des sinus ne serait pas respectée. On acceptera donc 37,66° et ∠B = 102,34°.

2. Pour trouver le diamètre, on peut d'abord calculer le rayon, c'est le côté AO du triangle rectangle AOB.
Dans ce triangle, on connaît le côté adjacent à l'angle de 30° et on cherche le côté opposé.
On utilise donc le rapport de la tangente, ce qui donne :

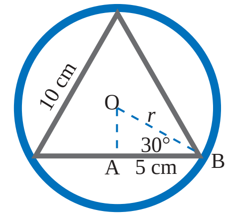


$$\tan\ 30° = \frac{r}{7{,}5}\text{, d'où } r = 7{,}5 \tan 30° = 4{,}33 \text{ cm.}$$

On peut donc estimer le diamètre à 8,66 cm.

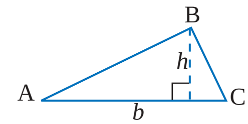
3. Dans le triangle AOB, on connaît le côté adjacent à l'angle de 30° et on cherche l'hypoténuse. On utilise donc le rapport du cosinus, ce qui donne :

$$co\ \ 30° = \frac{5}{r}, \text{ d'où } r = \frac{5}{\cos\ 30°} = 5{,}77 \text{ cm}$$



4. Dans le triangle BCH, on a : $\tan \mathrm{C} = \frac{h}{x}$ d'où $x = \frac{h}{\tan \mathrm{C}}$.

Dans le triangle ABH, on a : $\tan \mathrm{A} = \frac{h}{b-x}$ d'où $b - x = \frac{h}{\tan \mathrm{A}}$.



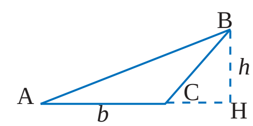
En additionnant l'un à l'autre, on obtient : $b = \frac{h}{\tan \mathrm{A}} + \frac{h}{\tan \mathrm{C}}$ et $b = h\left(\frac{1}{\tan \mathrm{A}} + \frac{1}{\tan \mathrm{C}}\right)$

d'où : $h = \dfrac{b}{\left(\frac{1}{\tan \mathrm{A}} + \frac{1}{\tan \mathrm{C}}\right)}$.

En mettant au même dénominateur et en simplifiant, on a alors : $h = \frac{b \tan \mathrm{A} \tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{C} + \tan \mathrm{A}}$.

5. Dans le triangle BCH, on a : $\tan \mathrm{C} = \frac{h}{x}$ d'où $x = \frac{h}{\tan \mathrm{C}}$.

Dans le triangle ABH, on a : $\tan \mathrm{A} = \frac{h}{b+x}$ d'où $b + x = \frac{h}{\tan \mathrm{A}}$

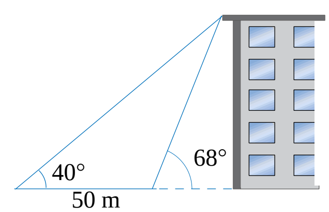


En soustrayant l'un de l'autre, on obtient : $b = \frac{h}{\tan \mathrm{A}} - \frac{h}{\tan \mathrm{C}}$ et $b = h\left(\frac{1}{\tan \mathrm{A}} - \frac{1}{\tan \mathrm{C}}\right)$

d'où : $h = \dfrac{b}{\left(\frac{1}{\tan \mathrm{A}} - \frac{1}{\tan \mathrm{C}}\right)}$.

En mettant au même dénominateur et en simplifiant, on a alors : $h = \frac{b \tan \mathrm{A} \tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{C} - \tan \mathrm{A}}$.

6. Dans le triangle CBD, on a $\tan 68° = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$ d'où $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}} \tan 68°$.



Dans le triangle ABD, on a $\tan 40° = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}$ et puisque $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CD}}$.

$$\tan 40° = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CD}}} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{50 + \overline{\mathrm{CD}}} \quad \text{d'où } \overline{\mathrm{BD}} = (50 + \overline{\mathrm{CD}}) \tan 40°.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{CD}} \tan 68° &= (50 + \overline{\mathrm{CD}}) \tan 40° \\
\overline{\mathrm{CD}} \tan 68° &= 50 \tan 40° + \overline{\mathrm{CD}} \tan 40° \\
\overline{\mathrm{CD}} \tan 68° - \overline{\mathrm{CD}} \tan 40° &= 50 \tan 40° \\
\overline{\mathrm{CD}}(\tan 68° - \tan 40°) &= 50 \tan 40° \\
\overline{\mathrm{CD}} &= \frac{50 \tan 40°}{(\tan 68° - \tan 40°)}
\end{aligned}$$

Et puisque $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}} \times \tan 68°$, on a par substitution : $\overline{\mathrm{BD}} = \frac{50 \tan 40°}{\tan 68° - \tan 40°} \tan 68° = 63{,}4737...$ m

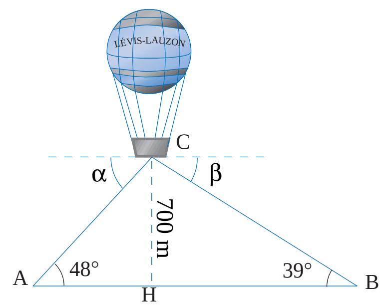
On peut estimer à 64 m.

7. Dans le triangle ACH, $\tan 48° = \dfrac{700}{\overline{HB}}$, d'où $\overline{AH} = \dfrac{700}{\tan 48°}$.

Dans le triangle BCH, $\tan 39° = \dfrac{700}{\overline{HB}}$, d'où: $\overline{HB} = \dfrac{700}{\tan 39°}$

On a donc $\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} = \dfrac{700}{\tan 48°} + \dfrac{700}{\tan 39°} = 1\ 494{,}7$ m

On peut estimer la distance à 1 490 m.



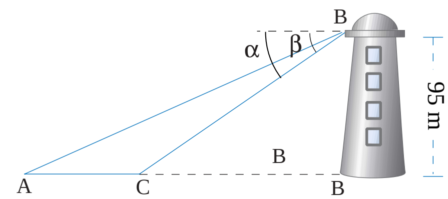
8. On cherche $\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD}$.

Dans le triangle CBD, on a $\tan 58° = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$, d'où $\overline{CD} = \dfrac{\overline{BD}}{\tan 58°} = \dfrac{95}{\tan 58°}$.

Dans le triangle ABD, on a $\tan 35° = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, d'où $\overline{AD} = \dfrac{\overline{BD}}{\tan 35°} = \dfrac{95}{\tan 35°}$.

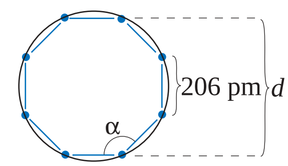
Et $\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} = \dfrac{95}{\tan 35°} - \dfrac{95}{\tan 58°} = 76{,}3...$

On peut estimer la hauteur 76 m.



9. En isncrivant l'octogone dans un cercle, on constate que l'angle α intercepte les 6/8 de la circonférence. Puisqu'il s'agit d'un angle inscrit, sa mesure est la moitié de la mesure de l'arc itercepté. On a donc :

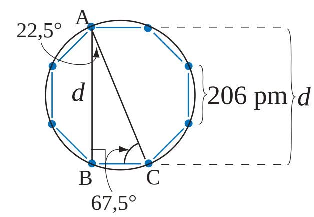
$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{8} \times 360°\right) = 135°$$



En procédant de la même façon, on trouve que l'angle C de la deuxième figure est de 67,5°. On a alors :

$$\tan 67{,}5° = \frac{d}{206},\ \text{d'où } d = 206 \tan 67{,}5° = 497{,}3279...$$

On retiendra 497 pm.



10. En joignant les centres, on forme le triangle ABC dont les coté de l'angle droit sont égaux à r^- et dont l'hypoténuse est égale à $r^+ + r^-$.
Par le théorème de Pythagore, on a alors :

$$(r^+ + r^-)^2 = 2(r^-)^2$$

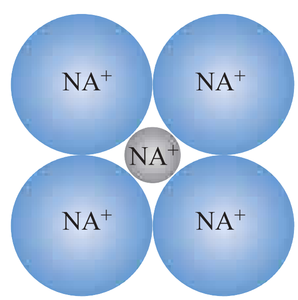
En extrayant la racine des deux membres, on obtient :

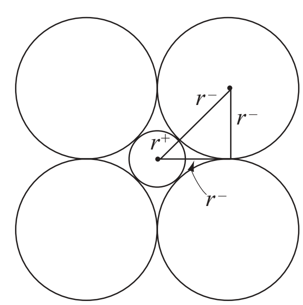
$$r^+ + r^- = r^-\sqrt{2}$$

Cela donne : $r^+ = r^-\sqrt{2} - r^- = r^-(\sqrt{2} - 1)$

En divisant les deux membres par r^-, on obtient le rapport :

$$\frac{r^+}{r^-} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}1442...$$



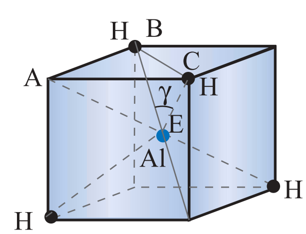


11. *a*) Les deux atomes d'hydrogène de la face supérieure sont aux extrémités de l'hypoténuse d du triangle ABC, rectangle en A et dont les côtés de l'angle droit sont de longueur 1. On a donc :

$$d^2 = 2 \text{ et } d = \sqrt{2}$$

b) L'atome d'aluminium est au milieu de l'hypoténuse BD du triangle BCD dont les côtés de l'angle droit sont $\overline{BC} = \sqrt{2}$ et $\overline{CD} = 1$. On a donc :

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2 + 1 = 3,\ \text{d'où } \overline{BD} = \sqrt{3} \text{ et } \overline{BE} = \sqrt{3}/2$$

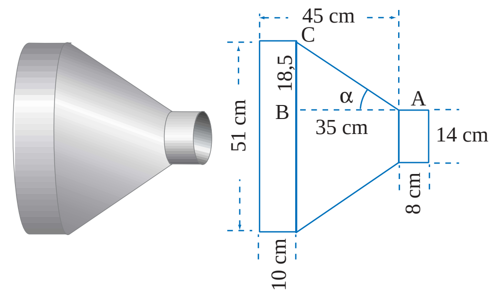


Le triangle BEC est un triangle isocèle dont les côtés sont de longueur $\overline{BE} = \overline{EC} = \sqrt{3}/2$ et $\overline{BE} = \sqrt{2}$.
Par la loi des cosinus, on a alors :

$$\cos\gamma = \frac{\overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{BE} \times \overline{EC}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

et $\gamma = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70{,}5287...$

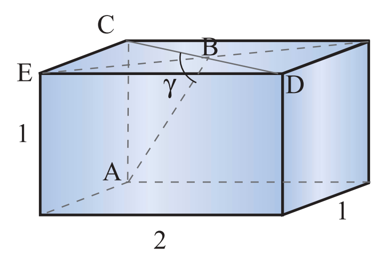
L'angle γ est donc de 70,53°.



12. Dans le triangle ABC, on a :

$\tan\alpha = \frac{18{,}5}{35}$, d'où $\alpha = \arctan\left(\frac{18{,}5}{35}\right) = 27{,}8596...°$

On a alors$\theta = 2\alpha = 55{,}7193...°$. On peut donc estimer que l'angle mesure 55,72°.



13. Le segment AB est l'hypoténuse du triangle ABC, rectangle en C. La mesure du côté AC est 1. On peut trouver la longueur du segment CB, puisque le point B est le milieu du segment CD et que CD est l'hypoténuse du triangle CED rectangle en E. On a donc :

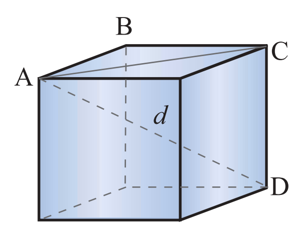
$$\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 = 1 + 4 = 5, \text{ d'où } \overline{CD} = \sqrt{5} \text{ et } \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

On trouve alors $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$, d'où $\overline{AB} = \frac{3}{2}$.

Le triangle BEC est un triangle isocèle dont les côtés sont de longueur $\overline{BE} = \overline{BC} = \sqrt{5}/2$ et $\overline{EC} = 1$.
Par la loi des cosinus, on a alors :

$$\cos\gamma = \frac{\overline{BE}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{BE} \times \overline{AB}} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{9}{4} - 1}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{2}} = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{et} \quad \gamma = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 41{,}810...$$

L'angle γ est donc de 41,8°.



14. Le segment AD est l'hypoténuse du triangle ACD, rectangle en C. La mesure du côté AC est a, l'arête du cube. On peut trouver la longueur du segment AC qui est l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en B. On a donc :

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 \\ &= \left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2\right) + \overline{CD}^2 \\ &= a^2 + a^2 + a^2 \end{aligned}$$

Cela donne $d^2 = 3a^2$ et $d = a\sqrt{3}$.

15. *a*) Dans le triangle ABC, on connaît les trois côtés et on peut trouver un angle en ayant recours à la loi des cosinus. On peut trouver l'angle en A dont le côté opposé est de 26 cm, ce qui donne :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{45^2 + 23^2 - 26^2}{2 \times 45 \times 23} = 0{,}907246...$$

D'ou: $\angle A$ = arccos (0,907246...) = 24,9°.

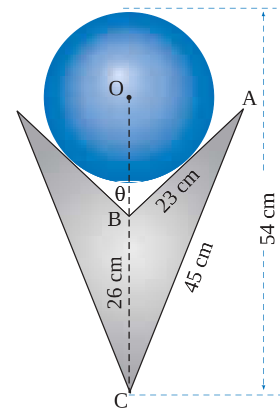
Par la loi des sinus, on peut trouver l'angle C, ce qui donne :

$$\frac{\sin C}{23} = \frac{\sin A}{26}, \text{ d'où } \sin C = \frac{23 \ \sin 24{,}9°}{26} = 0{,}372454...$$

D'où : $\angle C = \arcsin(0{,}372454) = 21{,}9°$ ou $180° - 21{,}9°$, mais la figure permet de rejeter cette solution.

L'angle ABD est donné par :

$\angle ABD = 2\angle ABO = 2(\angle A + \angle C) = 2(24{,}9° + 21{,}9°) = 93{,}6°$



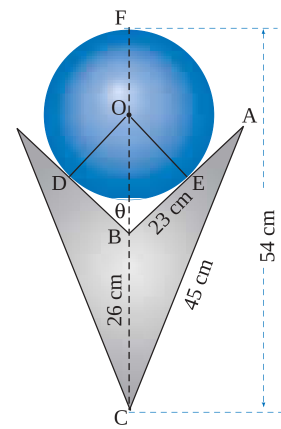
b) On a : $\overline{CF} = \overline{CB} + \overline{BO} + \overline{OF} = 26 + \overline{BO} + \overline{OF} = 54$, d'où : $\overline{BO} + \overline{OF} = 28$.

Dans le triangle OBE, on a :

$$\sin 46{,}8° = \frac{\overline{OE}}{\overline{BO}}, \text{ d'où } \overline{BO} = \frac{\overline{OE}}{\sin 46{,}8°} = \frac{r}{\sin 46{,}8°}.$$

On a donc $\dfrac{r}{\sin 46{,}8°} + r = 28$ et $r = \dfrac{28}{\dfrac{1}{\sin 46{,}8°} + 1} = 11{,}8...$

On peut estimer r à 11,8 cm.



16. L'angle CAB mesure 36° et en appliquant la loi des cosinus dans le triangle ABC, on peut trouer la longueur du deuxième câble, ce qui donne :

$$\overline{CB} = \sqrt{60^2 + 20^2 - 2 \times 20 \times 60 \ \ \cos 36°} = 45{,}369...$$

On estimera donc $\overline{CB} = 45{,}4$ m.

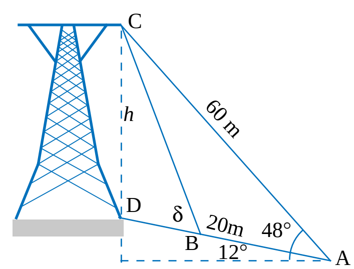
La hauteur du pylône est la longueur $\overline{CD}$, or $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$.

Dans le triangle ACE, on trouve $\overline{CE} = 60 \ \ \sin 48° = 44{,}5886... = 44{,}6$ m

$\overline{AE} = 60 \ \ \cos 48° = 40{,}1478... = 40{,}1$ m

Dans le triangle ADE, on trouve $\overline{DE} = 40{,}1 \ \ \tan 12° = 8{,}5336... = 8{,}5$ m

Par conséquent, $\overline{CD} = 44{,}6 - 8{,}5 = 36{,}1$ m.



On aurait également pu procéder de la façon suivante :

Dans le triangle ACE, on trouve $\overline{AE} = 60 \ \cos 48° = 40{,}1478... = 40{,}1$ m.

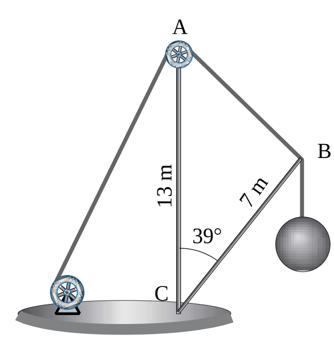
Dans le triangle ADE, on trouve $\overline{AD} = \dfrac{\overline{AE}}{\cos 12°} = \dfrac{40{,}1478...}{\cos 12°} = 40{,}0447... = 40{,}1$ m.

Par la loi des cosinus dans le triangle ACD, on trouve $\overline{CB} = \sqrt{60^2 + 41^2 - 2 \times 41 \times 60 \cos 36°} = 36{,}0643... = 36{,}1$ m.

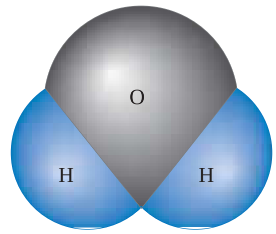
17. Par la loi des cosinus, on a

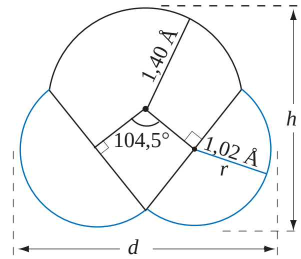
$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 13^2 + 7^2 - 2 \times 13 \times 7 \cos 39° \\ &= 169 + 49 - 182 \cos 39° \\ &= 76{,}5594... \end{aligned}$$

d'où $\overline{AB} = \sqrt{76{,}5594...} = 8{,}7498... \approx 8{,}75$ m.



18. Les rayons et la droite joignant les centres des atomes forment le triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit sont connus. On trouve alors :



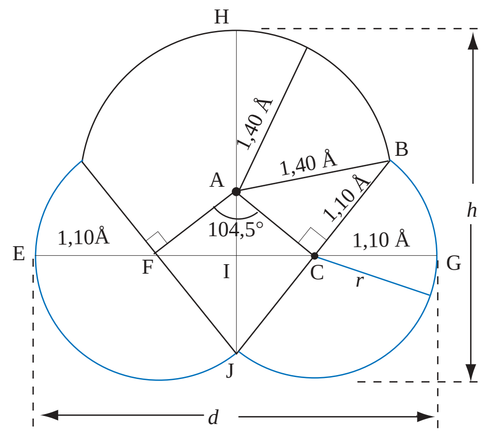


$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{1,40^2-1,10^2}=0,866...$$

Puisque $d=\overline{EF}+\overline{FC}+\overline{CG}=1,10+\overline{FC}+1,10$, on doit déterminer $\overline{FC}$.

Dans le triangle isocèle AFC, on a $\overline{AC}=\overline{AF}=0,866...$ et l'angle entre ces deux côtés est connu. Par la loi des cosinus, on a alors :

$$\begin{aligned}\overline{FC}^2&=\overline{AC}^2+\overline{AF}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AF}\cos 104,5°\\&=2\overline{AC}^2-2\overline{AC}^2\cos 104,5°,\ \text{puisque } \overline{AC}=\overline{AF};\\&=2\overline{AC}^2(1-\cos 104,5°)\\&=1,87545...\end{aligned}$$



D'où : $\overline{FC}=1,36947...$ et

$d=\overline{EF}+\overline{FC}+\overline{CG}=1,10+1,37+1,10=3,57$ Å.

Trouvons maintenant la valeur de h. On a :

$h=\overline{HA}+\overline{AI}+\overline{IJ}=1,40+\overline{AI}+1,10$

Il faut donc déterminer la longueur $\overline{AI}$. Dans le triangle rectangle AIC, l'angle en A est de 52,25° et on veut déterminer le côté adjacent à cet angle. On a donc :

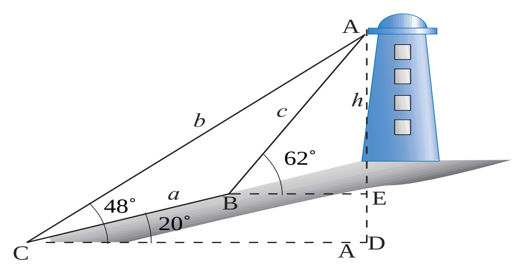
$$\cos\ 52,25°=\frac{\overline{AI}}{\overline{AC}},\ \text{d'où } \overline{AI}=\overline{AC}\cos 52,25°=0,866\cos 52,25°=0,5301...$$

On trouve alors $h=\overline{HA}+\overline{AI}+\overline{IJ}=1,40+0,53+1,10=3,03$ Å.

19 $\angle A=62°-48°=14°$, $\angle B=180°-(28°+14°)=138°$ et $\overline{CB}=60$ m.

La loi des sinus donne :

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A},\ \text{d'où } \frac{b}{\sin 138°}=\frac{60}{\sin 14°}\ \text{et } b=\frac{60\sin 138°}{\sin 14°}.$$

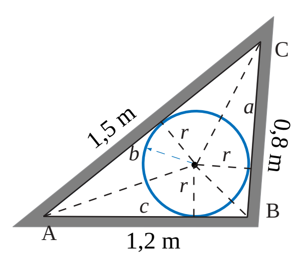


De plus $\sin 48°=\frac{h}{b}$, d'où $h=b\sin 48°$ et, en substituant, on obtient :

$$h=\frac{60\sin 138°\sin 48°}{\sin 14°}=123,3276...\approx 123\text{ m.}$$

20. Dans le triangle ABC, on a :

$$\cos\ A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1,5^2+0,8^2-1,2^2}{2\times 1,5\times 0,8}=0,60416...$$



d'où $\angle A$ = arccos(0,60416...) = 52,83° ≈ 52°50' et

$\angle A/2$ = 26,42° ≈ 26°25'.

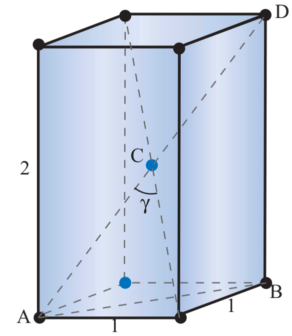
De plus $\cos\ B=\frac{1,2^2+0,8^2-1,5^2}{2\times 0,8\times 1,2}=-0,08854...$

et $\angle B$ = arccos(0,08854...) = 95,0797...° = 95°05',

d'où $\angle B/2$ = 47,54° = 47°32'.

Dans le triangle AOB, on a $r=\frac{c}{\cot A/2+\cot B/2}=\frac{0,8}{\cot 26,42°+\cot 47,55°}\approx 0,27$ m

21. Le segment AD est l'hypoténuse du triangle ABD, rectangle en B. La mesure du côté BD est 2. On peut trouver la longueur du segment AB qui est l'hypoténuse du triangle AEB rectangle en E. On a alors :



$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6} = 2{,}4498...$

Le triangle ACE est un triangle isocèle dont les côtés sont de longueur $\overline{AC} = \overline{CE} = \sqrt{6}$ et $\overline{AE} = 1$.

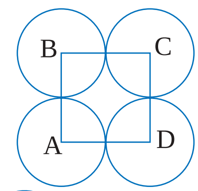
Par la loi des cosinus, on a alors :

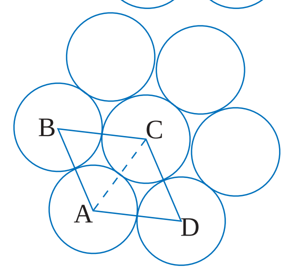
$$\cos\gamma = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{AE}^2}{2 \times AC \times \overline{CE}} = \frac{\frac{6}{4} + \frac{6}{4} - 1}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\frac{8}{4}}{\frac{6}{2}} = \frac{2}{3} \text{ et } \gamma = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}1896...$$

L'angle γ est donc de 48,19°.

22. *a*) L'aire du carré est $A_1 = (2r)^2 = 4r^2$

b) L'aire occupé par les quatre quarts de cercle est $A_2 = \pi r^2$. L'aire qui n'est pas occupée par les cercles est alors $A_3 = 4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$, soit environ $0{,}8584r^2$.



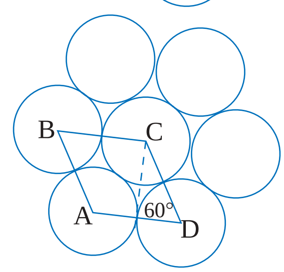


23. *a*) En joignant les sommets C et A, on divise le prarallélogramme en deux triangles équilatéraux de côtés $2r$. Les angles intérieurs de ces triangles sont alors de 60° et l'angle en C mesure 120°.

b) L'aire du parallélogramme est le produit de la base par la hauteur. La base est égale à $2r$ et la hauteur est $h = 2r\sin 60° = 2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

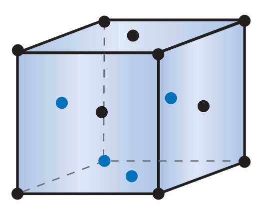
On obtient donc : $A_2 = 2r \times r\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$

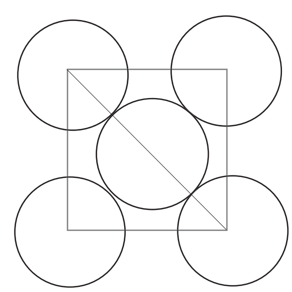
c) L'aire occupé par les quatre portions de cercle est $A_2 = \pi r^2$. L'aire qui n'est pas occupée par les cercles est alors $A_3 = 2r^2\sqrt{3} - \pi r^2 \approx 0{,}3225r^2$.



24. *a*) Si on considère une face du cube, il y a un atome centré en chaque sommet et un au centre de la face. La diagonale de la face est alors $4 \times 0{,}128 = 0{,}0{,}512$ nm.

Pour calculer le volume du cube, il faut en déterminer le côté et on trouve :





$$a = \frac{0{,}512}{\sqrt{2}} = 0{,}36203... \text{ nm}$$

Le volume du cube est *:*

$a^3 = (0{,}36203...)^3 = 0{,}04745...\ \text{nm}^3 = 4{,}75 \times 10^{-2}...\ \text{nm}^3$

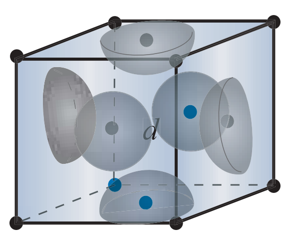
En exprimant ce volume en litres, on obtient $4{,}75 \times 10^{-26}$ L.

b) Lorsqu'un atome est centré sur une des faces du cube, seulement la moitié de cet atome est à l'intérieur du cube. Puisqu'il y a six faces, cela donne l`équivalent de $6 \times (1/2) =$ 3 atomes.

Lorsqu'un atome est centré en un sommet du cube, seulement le huitième de cet atome est à l'intérieur du cube. Puisqu'il y a 8 sommets, cela donne l`équivalent de :

$$8 \times (1/8) = 1 \text{ atome.}$$

Au total, le cube contient l'équivalent de 4 atomes.



c) Le volume occupé par un atome est $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0{,}128)^3$. Le volume occupé par cet équivalent de 4 atomes est alors :

$$4V = \frac{16}{3}\pi(0{,}128)^3 = 0{,}035138... = 3{,}51\times10^{-2}\ \text{nm}^3$$

Le pourcentage du volume du cube occupé par les atomes est alors :

$$\frac{3{,}51\times10^{-2}}{4{,}75\times10^{-2}} = 0{,}73894...,\ \text{soit } 74\%.$$

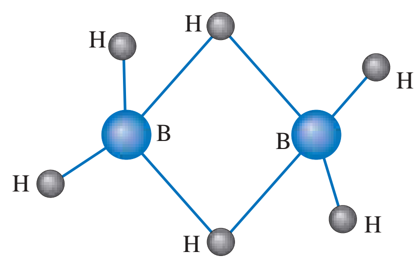
d) Déterminons d'abord le nombre d'atomes par litre :

$$\frac{1}{4{,}75\times10^{-26}\ \text{L}}\times 4\ \text{atomes} = 8{,}429\times10^{25}\ \ \text{atomes/L}$$

$$8{,}429\times10^{25}\ \frac{\text{atomes}}{\text{litre}}\times 63{,}55\ \frac{\text{g}}{\text{mole}}\times\frac{1}{6{,}022\times10^{23}}\ \frac{\text{mole}}{\text{atomes}} = 8{,}896\times10^3\ \frac{\text{g}}{\text{litre}}$$

La masse volumique du cuivre est donc de $8{,}896\times10^3$ g/L.

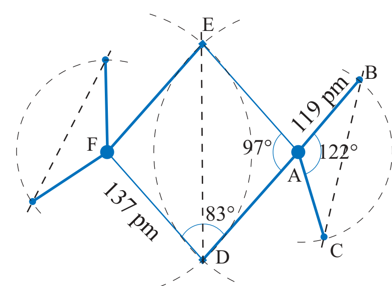
23. La distance entre les atomes terminaux est la longueur du côté BC du triangle isocèle ABC dont l'angle au sommet est de 122° et les côtés égaux mesurent 119 pm. Par la loi des cosinus, on trouve :



$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\cos 122°}\\ &= \sqrt{2\overline{AB}^2 - 2\overline{AB}^2\cos 122°},\ \text{puisque } \overline{AB} = \overline{AC};\\ &= \overline{AB}\sqrt{2(1-\cos 122°)}\\ &= 208{,}159...\end{aligned}$$

La distance est donc de 208 pm.

La distance entre les atomes en pont est la longueur du côté ED du triangle isocèle AED dont l'angle au sommet est de 97° et les côtés égaux mesurent 137 pm. Par la loi des cosinus, on trouve :



$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2\times\overline{AE}\times\overline{AD}\cos 97°}\\ &= \sqrt{2\overline{AE}^2 - 2\overline{AE}^2\cos 97°},\ \text{puisque } \overline{AE} = \overline{AD};\\ &= \overline{AE}\sqrt{2(1-\cos 97°)}\\ &= 205{,}2138...\end{aligned}$$

La distance est donc de 205 pm.

La distance entre les atomes de bore est la longueur du côté AF du triangle isocèle ADF dont l'angle au sommet est de 83° et les côtés égaux mesurent 137 pm. Par la loi des cosinus, on trouve :

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= \sqrt{\overline{DA}^2 + \overline{DF}^2 - 2\times\overline{DA}\times\overline{DF}\cos 83°}\\ &= \sqrt{2\overline{DA}^2 - 2\overline{DA}^2\cos 83°},\ \text{puisque } \overline{DA} = \overline{DF};\\ &= \overline{DA}\sqrt{2(1-\cos 83°)}\\ &= 181{,}557...\end{aligned}$$

La distance est donc de 182 pm.