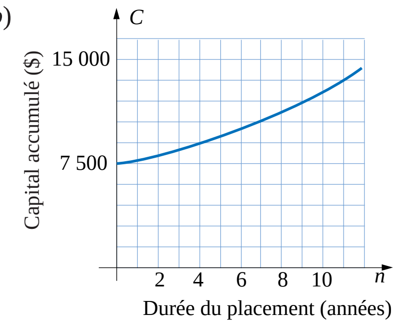
CHAPITRE 4

EXERCICES 4.2

1. *a*) Soit C, le capital accumulé, C_0, le capital initial et n, la durée du placement en années. Il y a un gain de 6,5 % par année, soit une augmentation de 6,5% par unité de la variable indépendante. On a donc un lien exponentiel entre les variables.
Après 1 an, on a : $C(1) = 7\,500(1{,}065)^1$
Après 2 ans, on a : $C(2) = 7\,500(1{,}065)^2$
....
Après n ans, on a : $C(n) = 7\,500(1{,}065)^n$
Le capital après 5 ans est :
$C(5) = 7500(1{,}065)^5 = 10\,275{,}65$ $

b)



2. *a*) Soit N, le nombre de bactéries, N_0, le nombre initial et n, le nombre de périodes de 6 heures.
Le nombre de bactéries double toutes les six heures, ce qui signifie une augmentation de 100 % toutes les six heures. On a donc un lien exponentiel entre les variables.
Après 1 période (6 h), on a : $N(1) = N_0 \times 2^1$
Après 2 périodes (12 h), on a : $N(2) = N_0 \times 2^2$
....
Après n périodes, on a : $N(n) = N_0 \times 2^n$
Si $N_0 = 1{,}7\times10^6$, on a $N(n) = 1{,}7\times10^6 \times 2^n$.
Après deux jours, il y aura 8 périodes de six heures d'écoulées, on aura alors :
$N(8) = 1{,}7\times10^6 \times 2^8 = 435{,}2\times10^6 = 4{,}352\times10^8$
On acceptera $4{,}4\times10^8$ bactéries.

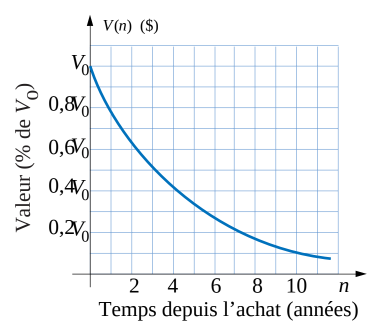
b) On veut déterminer combien de bactéries il faut ensemencer pour en avoir $2{,}5\times10^{15}$ en trois jours. On a donc $n = 12$, $N =$ et on cherche N_0. En substituant dans le modèle général $N(n) = N_0 \times 2^n$, on obtient :
$2{,}5\times10^{15} = N_0 \times 2^{12}$. En isolant N_0, on a :

$$N_0 = \frac{2{,}5\times10^{15}}{2^{12}} = 6{,}10351\times10^{11}.$$ On acceptera $6{,}1\times10^{11}$ bactéries.

3. *a*) Soit V, la valeur marchande, V_0, la valeur initiale et n, le nombre de mois depuis l'achat. Il y a perte de 1,7% par mois, soit une diminution de 1,7% par unité de la variable indépendante. On a donc un lien exponentiel entre les variables.
Après 1 mois, on a : $V(1) = V_0(0{,}983)^1$
Après 2 mois, on a : $V(2) = V_0(0{,}983)^2$
....
Après n mois, on a : $V(n) = V_0(0{,}983)^n$
Pour une valeur initiale $V_0 = 300\,000$, on a $V(n) = 300\,000(0{,}983)^n$.

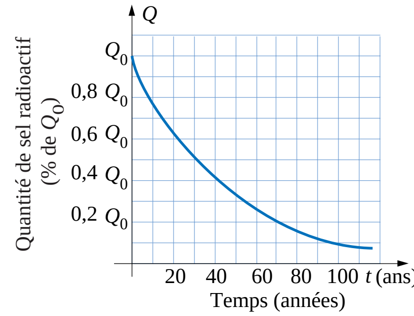
b) Deux ans après l'achat, il y aura 24 mois d'écoulés, d'où $n = 24$ et :
$V(24) = 300\,000\,(0{,}983)^{24} = 198\,795$ $;
$V(36) = 300\,000\,(0{,}983)^{36} = 161\,825$ $,
$V(60) = 107\,234$ $.

c)



4. *a*) Soit Q, la quantité de sel radioactif, Q_0, la quantité initiale et t, le nombre d'années. À la fin de chaque année, il reste les 49/50 ou 98% de la quantité de début d'année. Il y a perte de 2% par année, soit une diminution de 2 % par unité de la variable indépendante. On a donc un lien exponentiel entre les variables.
Après 1 an, on a : $Q(t) = Q_0(49/50)^1$
Après 2 ans, on a : $Q(t) = Q_0(49/50)^2$
....
Après n ans, on a : $Q(t) = Q_0(49/50)^t$

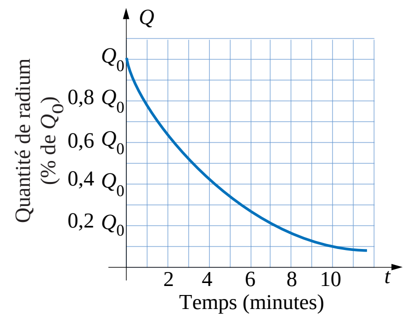
b)



c) $Q(5) = 90{,}39$ unités; $Q(10) = 81{,}71$ unités.

5. *a*) Soit Q, la quantité de radium A, Q_0, la quantité initiale et t, le nombre de minutes. À la fin de chaque minute, il reste les 8/10 ou 80% de la quantité du début de la minute. Il y a perte de 20% par minute, soit une diminution de 20 % par unité de la variable indépendante. On a donc un lien exponentiel entre les variables.
Après 1 minute, on a : $Q(t) = Q_0(0{,}8)^1$
Après 2 minutes, on a : $Q(t) = Q_0(0{,}8)^2$
....
Après n minutes, on a : $Q(t) = Q_0(0{,}8)^t$

b)



6. *a*) Soit d, la durée de la panne et t, la température intérieure. En calculant les rapports des valeurs de la variable dépendante, on obtient le tableau ci-contre. Les rapports des valeurs consécutives de la variable dépendante étant relativement constants, on peut conclure à une situation modélisable par une exponentielle. La moyenne des rapports donne 0,86, on peut donc décrire la situation par le modèle :

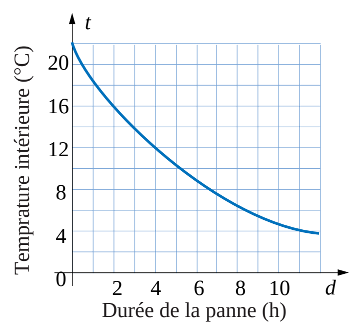
$$t(d) = 22 \times 0{,}86^d$$

d	$t(d)$	$\frac{t(d+1)}{t(d)}$
1	19	–
2	16	0,84
3	14	0,88
4	12	0,86
5	10	0,83
6	9	0,90

c) Après chaque heure, la température est 86% de ce qu'elle était au début de l'heure. Il y a donc une perte de 14 % par heure.

d) Après dix heures de panne, la température sera : $t(10) = 22 \times 0{,}86^{10} = 4{,}8686...$ On peut donc estimer la température dix heures après le début de la panne à environ 4,9 °C.

b)



7. *a*) Soit t, le nombre de périodes de 0,5 minute depuis l'arrêt, N, le nombre de tours par minute et N_0, le nombre de tours par minute avant la coupure de l'alimentation. En calculant les rapports des valeurs de la variable dépendante, on obtient le tableau ci-contre.
Les rapports des valeurs consécutives de la variable dépendante étant relativement constants, on peut conclure à une situation modélisable par une exponentielle.

t	$N(t)$	$\frac{N(t+0{,}5)}{N(t)}$
0,5	74	–
1,0	42	0,5676
1,5	23	0,5476
2,0	13	0,5652
2,5	7	0,5385
3,0	4	0,5714
	Valeur moyenne	0,5581

b) Le modèle est de la forme $N(n) = N_0\,0{,}558^n$, où n est le nombre d'intervalles de temps d'une demi-minute. En posant $N = 74$ et $n = 1$ dans ce modèle, on obtient : $74 = N_0\,0{,}558^1$, d'où : $N_0 = 74/0{,}558 = 132{,}61...$ t/min. Compte tenu de la précison des données, on peut retenir $N_0 = 130$ t/min. Le modèle est donc :

$$N(n) = 130 \times 0{,}558^n$$

En considérant que $n = 2t$, on a :

$N(t) = 130 \times 0{,}558^n$

$= 130 \times 0{,}558^{2t}$

$= 130 \times 0{,}31136^t$, où t est le temps en minutes.

En exprimant en fonction du temps t en minutes, on a donc : $N(t) = 130 \times 0{,}31136^t$.

8. *a*) Soit n le nombre de périodes de quatre ans depuis 1972 et P la population. Calculons les rapports des valeurs de la variable dépendante, ce qui donne le tableau ci-contre.

Année	n	$P(n)$	$\frac{P(n+1)}{P(n)}$
1972	0	27	–
1976	1	29	1,07407
1980	2	32	1,10345
1984	3	35	1,09375
		Valeur moyenne	1,09042

Les rapports des valeurs consécutives de la variable dépendante étant relativement constants, on peut conclure à une situation modélisable par une exponentielle.

Le modèle est $P(n) = 27 \times 1{,}09^n$ où n est le nombre de périodes de quatre années.

b) En exprimant en fonction du temps t en années, on a $1{,}09 = b^4$, d'où $b = 1{,}0218$ et le modèle est :

$P(t) = 27 \times 1{,}0218^t$

c) La comparaison des valeurs donne le tableau ci-contre.

Population en milliers d'individus

Année	Statistiques	Modèle
1972	27	27,00
1976	29	29,43
1980	32	32,08
1984	35	34,97

d) $P(28) = 27 \times 1{,}0218^{28} = 49{,}39$.

La population sera donc d'environ 49 390 habitants.

9. **Adaptation du modèle général**

a) Traduction de la question

On doit déterminer la valeur de A dans l'équation $k = Ae^{-E_a/RT}$, sachant que $k = 1{,}1$ L/mol·s, $E_a = 1{,}4 \times 10^5$ J/mol et que la température est de 550°C, d'où $T = 823$°K.

Calculs

En isolant A dans la forme générale de l'équation d'Arrhenius, on a : $A = \dfrac{k}{e^{-E_a/RT}}$

En substituant les données et en effectuant les calculs, on obtient : $A = \dfrac{1{,}1}{e^{-140000/8{,}315\times 823}} = 843\ 812\ 430 \approx 8{,}4 \times 10^8$

Rédaction de la réponse

La relation entre la constante de vitesse de cette réaction et la température en kelvin est : $k = 8{,}4 \times 10^8\ e^{-140000/8{,}315T}$

Utilisation du modèle particulier

b) Traduction de la question

On cherche la constante de vitesse k à une température $T = 973$ K.

Calculs

En substituant la valeur de T, on trouve : $k = 8{,}4 \times 10^8\ e^{-140000/8{,}315\times 973} = 25{,}8$

Rédaction de la réponse

À 273 K, la constante de vitesse est de 25,8 L/mol·s.

Utilisation du modèle particulier

c) Traduction de la question

On cherche la constante de vitesse k à une température de 400°C, soit $T = 673$ K.

Calculs

En substituant la valeur de T, on trouve : $k = 8{,}4 \times 10^8\ e^{-140000/8{,}315\times 673} = 0{,}1$

Rédaction de la réponse

À 673 K, la constante de vitesse est de 0,1 L/mol·s.

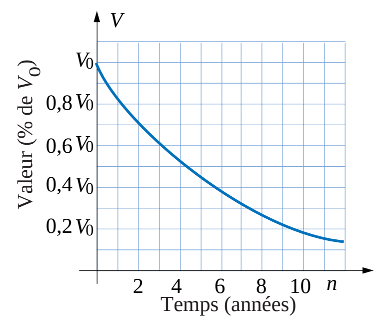
10. *a*) Soit n le nombre de variations d'altitude de 0,5 km depuis le niveau de la mer et p la pression. En calculant les rapports des valeurs de la variable dépendante, on obtient le tableau ci-contre.
Les rapports des valeurs consécutives de la variable dépendante étant relativement constants, on peut conclure à une situation modélisable par une exponentielle.
b) En exprimant le modèle en fonction de l'altitude en km, on a :

$$p(h) = 101{,}32 \times 0{,}884^h$$

Puisque $b^{0,5} \approx 0{,}94$.

h	$p(h)$	$\dfrac{p(h+0{,}5)}{p(h)}$
0,0	101,32	–
0,5	95.15	0,9391
1,0	89,36	0,9391
1,5	83,93	0,9392
2,0	78,82	0,9391
2,5	74,02	0,9391
3,0	69,52	0,9391
3,5	65,29	0,9391
4,0	61,32	0,9391
Valeur moyenne		0,9391

11. *a*) Soit V, la valeur marchande, V_0, la valeur initiale et n, le nombre d'années depuis l'achat. Il y a perte de 15 % par année, soit une diminution de 15 % par unité de la variable indépendante. On a donc un lien exponentiel entre les variables.
Après 1 an, on a : $V(1) = V_0(0{,}85)^1$
Après 2 ans, on a : $V(2) = V_0(0{,}85)^2$
....
Après n ans, on a : $V(n) = V_0(0{,}85)^n$
c) Si V_0, = 10 000, le modèle est $V(n) = 10\,000(0{,}85)^n$;
Huit ans après l'achat, la valeur est $V(8) = 2\,724{,}91$ $;
Dix ans après l'achat, la valeur est $V(10) = 1\,968{,}74$ $



12. Soit C, le capital accumulé, C_0, le capital initial et n, la durée du placement en années. Le modèle général des placements est : $C(n) = C_0(1 + i)^n$.
Dans la situation présente, on donne $C_0 = 5\,000$, $C(5) = 12\,000$ et $n = 15$. on cherche i, le taux auquel il faut placer le montant initial. En substituant les données dans le modèle général des placements, on obtient :
$C(15) = 5\,000(1 + i)^{15} = 12\,000$, d'où l'on tire :
$(1 + i)^{15} = 2{,}4$, en divisant les deux membres par 5 000;
$1 + i = 2{,}4^{1/15} = 1{,}0601...$, en extrayant la racine quinzième,
$i = 0{,}0601$, en soustrayant 1 aux deux membres.
Il faut donc placer le montant à un taux de 6% par année.

13. En calculant les rapports des valeurs de la variable dépendante, on obtient le tableau ci-contre.
Il semble bien que la valeur correspondante pour $y = 5$ est erronée puisque le rapport de cette valeur sur la précédente donne 1,7387. Alors que quotient suivant est plus petit que tous les autres. La valeur 19,3 est trop grande.

Si on prend la moyenne des quatre rapports qui sont d'un même ordre de grandeur, on trouve :

$$a = \frac{1{,}5000 + 1{,}4800 + 1{,}4800 + 1{,}4865}{4} = 1{,}486625$$

En posant c, la valeur correspondant à $x = 5$, on devrait avoir :

$$\frac{c}{11{,}1} = 1{,}486625,\ \text{d'où } c = 16{,}50153...$$

La valeur correcte peut donc être estimée à 16,5. En calculant à nouveau les rapports, on obtient le second tableau ci-contre. Le modèle est :

$$y = 4 \times 1{,}49^{0,5x}$$

x	$y = f(x)$	$\dfrac{f(x+0{,}5)}{f(x)}$
0,0	5,0	–
2,0	7,5	1,5000
4,0	11,1	1,4800
5,0	19,3	1,7387
8,0	25,0	1,2953
10,0	37,0	1,4800
12,0	55,0	1,4865

x	$y = f(x)$	$\dfrac{f(x+0{,}5)}{f(x)}$
0,0	5,0	–
2,0	7,5	1,5000
4,0	11,1	1,4800
5,0	16,5	1,4865
8,0	25,0	1,5152
10,0	37,0	1,4800
12,0	55,0	1,4865
Valeur moyenne		1,4914

14. **Adaptation du modèle général**

a) Traduction de la question

On doit déterminer la valeur de A dans l'équation $k = Ae^{-E_a/RT}$, sachant que $k = 2{,}49 \times 10^9$ L/mol·s, $E_a = 11{,}9 \times 10^3$ J/mol et $T = 220$°K.

Calculs

En isolant A dans la forme générale de l'équation d'Arrhenius, on a : $A = \dfrac{k}{e^{-E_a/RT}}$.

En substituant les données et en effectuant les calculs, on obtient : $A = \dfrac{2{,}49 \times 10^9}{e^{-11900/8{,}315 \times 220}} \approx 1{,}67 \times 10^{12}$.

Rédaction de la réponse

La relation entre la constante de vitesse de cette réaction et la température en kelvin est : $k = 1{,}67 \times 10^{12}\ e^{-11900/8{,}315T}$.

Utilisation du modèle particulier

b) Traduction de la question

On cherche la constante de vitesse k à une température $T = 210$ K.

Calculs

En substituant la valeur de T, on trouve : $k = 1{,}67 \times 10^{12}\ e^{-11900/8{,}315 \times 210} \approx 1{,}83 \times 10^9$

Rédaction de la réponse

À 273 K, la constante de vitesse est de $1{,}83 \times 10^9$ L/mol·s.

Utilisation du modèle particulier

c) Traduction de la question

On cherche la constante de vitesse k à une température de 230°K.

Calculs

En substituant la valeur de T, on trouve : $k = 1{,}67 \times 10^{12}\ e^{-11900/8{,}315 \times 230} \approx 3{,}30 \times 10^9$.

Rédaction de la réponse

À 673 K, la constante de vitesse est de $3{,}30 \times 10^9$ L/mol·s.

15. *a*) En calculant les rapports des valeurs de la variable dépendante, on obtient le tableau ci-contre.

Les données du tableau semblent indiquer que le modèle exponentiel est pertinent, puisque le rapport des valeurs de la variable dépendante est constant.

x	$y = f(x)$	$\dfrac{f(x+p)}{f(x)}$
0,00	35,00	–
0,25	35,18	1,0050
0,50	35,35	1,0050
0,75	35,53	1,0050
1,00	35,70	1,0049
1,25	35,88	1,0049
1,50	36,05	1,0049
1,75	36,23	1,0049
2,00	36,40	1,0048
	Valeur moyenne	1,0049

b) En prenant la valeur moyenne et 35,00 comme valeur initiale, on obtient le modèle :

$$y = 35{,}00 \times 1{,}0049^x$$

c) Si $x = 40$, on trouve $y = 35{,}00 \times 1{,}0049^{40} = 75{,}2$.

d) En calculant les différences des valeurs de la variable dépendante, on obtient le deuxième tableau ci-contre.

Les données du tableau semblent indiquer que le modèle affine est pertinent, puisque la différence des valeurs de la variable dépendante est constant.

x	$y = f(x)$	$f(x+p) - f(x)$
0,00	35,00	–
0,25	35,18	0,175
0,50	35,35	0,175
0,75	35,53	0,175
1,00	35,70	0,175
1,25	35,88	0,175
1,50	36,05	0,175
1,75	36,23	0,175
2,00	36,40	0,175
	Valeur moyenne	0,175

e) En divisant la valeur moyenne de la différence par le pas, on obtient :

$$0{,}175/0{,}25 = 0{,}7$$

Le modèle affine est :

$$y = 0{,}7x + 35$$

f) Si $x = 40$, on trouve $y = 0{,}7 \times 40 + 35 = 63$.

g) Il faut que les mesures obtenues en laboratoire couvrent un intervalle assez étendu pour que les prévisions soient le plus fiable possible. Les prévisions obtenues par interpolation sont plus fiables que celles obtenues par extrapolation. De plus, sur un petit intervalle, il se peut que la différence entre la droite et la courbe exponentielle soit petite, mais cela ne sera pas le cas sur un large intervalle.

h) Non, en n'utilisant pas le meilleur modèle, on obtient des erreurs qui peuvent être négligeables sur un petit intervalle mais qui ne le sont pas si on utilise le modèle pour faire des prévisions par extrapolation.

16. *i*) *a*) Exponentielle
b) Croissante et concave vers le haut puisque $A > 0$.
c) $y = 2{,}29 \times 10^5(1{,}18)^x$

ii) *a*) Logarithmique
b) Croissante et concave vers le bas puisque $A > 0$.
c) $y = 3{,}30 \log x + 4{,}80$

iii) *a*) Exponentielle
b) Décroissante, concave vers le haut, car $A < 0$.
c) $y = 8{,}91(0{,}83)^x$

iv) *a*) Puissance
b) Croissante et concave vers le haut, car $A > 0$.
c) $y = 2{,}5 \times 10^3x^3$

v) *a*) Puissance
b) Croissante et concave vers le bas, car $0 < A < 1$.
c) $y = 5x^{1/2}$

vi) *a*) Logarithmique
b) Décroissante et concave vers le haut, car $A < 0$.
c) $y = –2{,}09\log x + 25{,}8$

17. *i*) *a*) Exponentielle
b) Croissante et concave vers le haut, car $A > 0$.
c) $y = 3{,}60e^{0{,}150x}$

ii) *a*) Puissance
b) Croissante et concave vers le haut, car $A > 0$.
c) $y = 3{,}69$ ¥ $10^9x^{1{,}50}$

iii) *a*) Logarithmique
b) Croissante, concave vers le bas, car $A > 0$.
c) $y = 1{,}50 \ln x + 22{,}03$

iv) *a*) Puissance
b) Croissante, concave vers le bas, car $0 < A < 1$.
c) $y = 29{,}96\ x^{0{,}30}$

18. *a*) L'énergie d'activation est de $1{,}0 \times 10^5$ J/mol.
b) $A = e^{29{,}91} = 9{,}77 \times 10^{12}$
c) $k = Ae^{-E_a/RT} = 9{,}77\times10^{12}e^{-11934{,}503/T}$

19. *a*) Le temps de dédoublement est de 8,5 h.
b) Il faudrait ensemencer 8×10^5 cellules.

20. *a*) L'énergie d'activation est de $1{,}1 \times 10^4$ J/mol.
b) $A = e^{27{,}77} = 1{,}15 \times 10^{12}$.
c) $k = Ae^{-E_a/RT} = 1{,}15\times10^{12}e^{-1358{,}49/T}$

21. *a*) Le temps de dédoublement est de 4 h.
b) Il faudrait ensemencer $1{,}2 \times 10^4$ cellules.

22. *a*) L'énergie d'activation est de $1{,}4 \times 10^5$ J/mol.
b) $A = e^{21{,}18} = 1{,}58 \times 10^9$
c) $k = Ae^{-E_a/RT} = 1{,}59\times109e^{-17356{,}31/T}$

EXERCICES 4.4

1. *a*) On cherche x tel que $2^x = 64$, or $64 = 2^6$, on a donc $2^x = 2^6$ d'où $x = 6$.
   b) On cherche x tel que $0{,}5^x = 0{,}125$ or $0{,}125= 0{,}5^3$, on a donc $0{,}5^x = 0{,}5^3$ d'où $x = 3$.
   c) On cherche x tel que $3^x = 1/243$ or $1/243 = 3^{–5}$, on a donc $3^x = 3^{–5}$ d'où $x = –5$.
   d) On cherche x tel que $(1/3)^x = 81$ or $81= 3^4 = (1/3)^{–4}$, on a donc $(1/3)^x = (1/3)^{–4}$ d'où $x = –4$.
   e) $\log_b(1/x) = 1/4$ d'où $(1/x) = b^{1/4}$ et $x = b^{–1/4}$, d'où $\log_b x = – 1/4$.

2. En exprimant sous forme exponentielle, on obtient $a – x = b^c$ et, en isolant x, on a $x = a – b^c$.

3. *a*) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a $N = 2^3 = 8$.
   b) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a $N = 3^{–1} = 1/3$.
   c) En divisant les deux membres de l'équation par 2, on a $\log_5 N = –2$ et en écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a : $N = 5^{–2} = 1/25$.

4. *a*) Posons $\log_b \sqrt{b} = x$, on cherche donc x tel que $b^x = \sqrt{b}$. Par les propriétés des exposants, on a $b^x = \sqrt{b} = b^{1/2}$. Ce qui donne $x = 1/2$.
   b) On cherche x tel que $\log_{10}0{,}1 = x$. En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a : $0{,}1 = 10^x$. Et puisque $0{,}1 = 10^{–1}$, on a donc $10^x = 10^{–1}$ d'où $x = –1$.

5. *a*) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a: $N = 6^0 = 1$.
   b) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a: $N = 4^{1{,}5} = 4^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 8$.

c) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a: $N = 8^{-1/3} = (2^3)^{-1/3} = 2^{-1} = 1/2$.

6. *a*) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a $8 = b^{3/4}$. D'où $2^3 = b^{3/4}$ et, en élevant les deux membres de l'équation à l'exposant 1/3, on a alors $2 = b^{1/4}$ et, en élevant les deux membres de l'équation à l'exposant 4, on a $b = 2^4 = 16$.
b) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a $\sqrt{3} = b^{1/4}$. D'où $3^{1/2} = b^{1/4}$, en élevant les deux membres de l'équation à l'exposant 4, on a alors $b = 3^2 = 9$.
c) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a $81 = b^4$. D'où $3^4 = b^4$, en élevant les deux membres de l'équation à l'exposant 1/4, on a alors $b = 3$.
d) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a $0{,}125 = b^{-3}$. D'où $(0{,}5)^3 = b^{-3}$, en élevant les deux membres de l'équation à l'exposant –1/3, on a alors $b = (0{,}5)^{-1} = (1/2)^{-1} = 2^1 = 2$.

7. *a*) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on obtient $\log_3 (1/\log_3 N) = 1 \Leftrightarrow 1/\log_3 N = 3^1 = 3$.
On a donc $\log_3 N = 1/3$ et en écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a :
$$\log_3 N = 1/3 \Leftrightarrow N = 3^{1/3}$$
b) En écrivant l'équation sous forme exponentielle, on a :
$$\log_2 (\log_2 N) = 0 \Leftrightarrow \log_2 N = 2^0 = 1$$
On a donc $\log_2 N = 1$ et. en écrivant l'équation sous forme exponentielle, on obtient :
$$\log_2 N = 1 \Leftrightarrow N = 2^1 = 2$$

8. *a*) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$ *b*) $\log_3 (1/243) = \log_3 (1/3^5) = \log_3 (3^{-5}) = -5$

9. *a*) Puisque $\log 54{,}5 = 1{,}736$, on a $54{,}5 = 10^{1{,}736}$ *b*) Puisque $\log 1{,}2 = 0{,}079$, on a $1{,}2 = 10^{0{,}079}$

10. *a*) $10^{2x} = 0{,}7$, d'où $2x = \log 0{,}7 = -1549...$ et $x = -0{,}077$.
b) $2\log x - 5 = 0$, d'où $2 \log x = 5$ et $\log x = 2{,}5$. Cela donne $x = 10^{2{,}5} = 316{,}23$.
c) $10^{-x}(10^{-x} - 8) = 0$. Ce produit est nul si l'un des facteurs est nul. Or, $10^{-x} \neq 0$, on doit donc avoir $10^{-x} - 8 = 0$.
Cela donne $10^{-x} = 8$ et $-x = \log 8 = 0{,}903$. On a donc $x = -0{,}903$.
d) $10^{3x} = 25$, ce qui donne $3x = \log 25 = 1{,}3979...$, d'où $x = 0{,}466$.

11. *a*) Puisque $\ln 27{,}23 = 3{,}3043$, on a $27{,}23 = e^{3{,}3043}$.
b) Puisque $\ln 0{,}78 = -0{,}2485$, on a $0{,}78 = e^{-0{,}2485}$.

12. *a*) $e^x = 0{,}65$, ce qui donne $x = \ln 0{,}65 = -0{,}43078$.
b) $\ln x = -0{,}27$, ce qui donne $x = e^{-0{,}27} = 0{,}76338$.
c) $2 \ln x - 3 = 0$, d'où $2 \ln x = 3$ et $\ln x = 1{,}5$. On a donc $x = e^{1{,}5} = 4{,}48169$.
d) $e^x(e^x - 2) = 0$. Ce produit est nul si l'un des facteurs est nul. Or, $e^{-x} \neq 0$, on doit donc avoir $e^{-x} - 2 = 0$.
Cela donne $e^{-x} = 2$ et $-x = \ln 2 = 0{,}69315$, d'où $x = -0{,}69315$.

13. *a*) $4^x = 22$. En prenant le logarithme naturel des deux membres, on obtient $\ln 4^x = \ln 22$, d'où $x = \dfrac{\ln 22}{\ln 4} = 2{,}2297...$
b) $5^x = 34$. En prenant le logarithme naturel des deux membres, on obtient $\ln 5^x = \ln 34$, d'où $x = \dfrac{\ln 34}{\ln 5} = 2{,}1910...$
c) $2^x = 100$. En prenant le logarithme naturel des deux membres, on obtient $\ln 2^x = \ln 100$, d'où $x = \dfrac{\ln 100}{\ln 2} = 6{,}6438...$
d) $1{,}5^x = 42$. En prenant le logarithme naturel des deux membres, on obtient $\ln 1{,}5^x = \ln 42$, d'où $x = \dfrac{\ln 42}{\ln 1{,}5} = 9{,}2182...$

14. *a*) $6^{2-3x} = 4^{2x+1}$ d'où $(2 - 3x) \ln 6 = (2x + 1) \ln 4$ et, en distribuant, on a :

$$2 \ln 6 - 3x \ln 6 = 2x \ln 4 + \ln 4$$

En isolant x , on a alors : $x = \dfrac{2\ln 6 - \ln 4}{3\ln 6 + 2\ln 4} = 0{,}26966...$

b) $8^{3-x} = 5^{2x+3}$ d'où $(3 - x) \ln 8 = (2x + 3) \ln 5$ et en distribuant, on a :

$$3 \ln 8 - x \ln 8 = 2x \ln 5 + 3 \ln 5$$

En isolant x , on a alors : $x = \dfrac{2\ln 6 - \ln 4}{3\ln 6 + 2\ln 4} = 0{,}2661...$

15. *a*) $\log_b x = 6 \Leftrightarrow x = b^6$. En élevant au carré les deux membres de l'équation, on a : $x^2 = (b^6)^2 = b^{12}$, d'où :

$$\log_b x^2 = 2 \log_b x = 2 \times 6 = 12.$$

On peut également démontrer de la façon suivante : $\log_b x^2 = 2 \log_b x = 2 \times 6 = 12$.

b) $\log_b bx = 7 \Leftrightarrow bx = b^7$. En divisant par b les deux membres de l'équation, on a : $x = b^6$ et, en écrivant sous forme logarithmique, on a : $\log_b x = 6$.

On peut également démontrer de la façon suivante :

$$x = \log_b bx = \log_b b + \log_b x = 1 + 6 = 7, \text{ en effet } \log_b b = 1.$$

c) $\log_b bx = 5 \Leftrightarrow bx = b^5$. En divisant par b les deux membres de l'équation, on a : $x = b^4$. En élevant au carré les deux membres de l'équation, on a $x^2 = (b^4)^2 = b^8$ et, en écrivant sous forme logarithmique, on a : $\log_b x^2 = 8$.

On peut également démontrer de la façon suivante :

Puisque $\log_b bx = \log_b b + \log_b x = 5$, on a $\log_b x = 4$. Par conséquent $\log_b x^2 = 2 \log_b x = 2 \times 4 = 8$.

16. *a*) $\log_2(x - 5) = 3$, d'où $x - 5 = 2^3$, $x - 5 = 8$ et $x = 13$.

b) $\log_5(2x + 1) = 2$, d'où $2x + 1 = 5^2$ et $2x + 1 = 25$, $2x = 24$ et $x = 12$.

c) $\log_{1/2}(3x - 1) = -3$, d'où $3x - 1 = (1/2)^{-3}$ et $3x - 1 = 2^3$, $3x - 1 = 8$, $3x = 9$ et $x = 3$.

d) $\log_3\left(\dfrac{x^2+2}{x+4}\right) = 1$, d'où $\dfrac{x^2+2}{x+4} = 3^1$ et $x^2 + 2 = 3(x + 4)$, qui donne $x^2 + 2 = 3x + 12$.

On a donc $x^2 - 3x - 10 = 0$. En factorisant, $(x - 5)(x + 2) = 0$, d'où l'on tire $x = 5$ ou $x = -2$.

17. *a*) $\log_b \alpha^t \sqrt{T} = \log_b \alpha^t + \log_b \sqrt{T} = t \log_b \alpha + \log_b T^{1/2} = t \log_b \alpha + \dfrac{1}{2}\log_b T$

b) $\log\left(\dfrac{[\alpha]}{RT}\right) = \log[\alpha] - (\log R + \log_b T) = \log[\alpha] - \log R - \log_b T$

c) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{Vn^3}{T^{1/3}}}\right) = \ln\left(\dfrac{Vn^3}{T^{1/3}}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{Vn^3}{T^{1/3}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln V + \ln n^3 - \ln T^{1/3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln V + 3\ln n - \dfrac{1}{3}\ln T\right)$

18. *a*) En utilisant la formule de changement de base, on obtient :

$$y = 5\ln x + 2 = 5\frac{\log x}{\log e} + 2 = \frac{5}{\log e}\log x + 2 = 11{,}51\log x + 2$$

b) $N = 3\log_2 t + 4{,}8 = 3\dfrac{\log t}{\log 2} + 4{,}8 = \dfrac{3}{\log 2}\log t + 4{,}8 = 9{,}97\log t + 4{,}8$

c) L'expression est déjà en base 10, $T = 2{,}5 \log \beta + 1{,}34$

19. En substituant, on a $500 = 10(1/3)^x$, d'où $(1/3)^x = 50$ et $x = \log_{1/3} 50 = \dfrac{\ln 50}{\ln(1/3)} = -3{,}56$.

20. *a*) Le modèle général est de la forme $N = N_0\, 5^t$, où N_0 est la quantité initiale. En considérant $1{,}7 \times 10^6$ comme quantité initiale, on cherche le temps t pour que $N = 3{,}9 \times 10^9$. En substituant dans la forme générale, on obtient l'équation :

$1{,}7 \times 10^6 \times 5^t = 3{,}9 \times 10^9$ et $5^t = \dfrac{3{,}9\times10^9}{1{,}7\times10^6}$, d'où $t\ln 5 = \ln\left(\dfrac{3{,}9\times10^9}{1{,}7\times10^6}\right)$ et $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3{,}9\times10^9}{1{,}7\times10^6}\right)}{\ln 5} = 4{,}807...$

Il faudrait environ 4,8 périodes de 6 heures, soit environ 28h30 de culture.

b) On cherche t pour lequel $N_0\, 5^t = 2N_0$. Cela donne $5^t = 2$ et $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 5} = 0{,}430675$.

Le temps de dédoublement est d'environ 2h35, puisque $0{,}43 \times 6 = 2{,}58$ et $0{,}58 \times 60 = 34{,}8 \approx 35$.

21. Pour la relation *i*, $N(t) = 50\,000 \times 3^{t/5} = 50\,000 \times (3^{1/5})^t$.
a) Tripler toutes les cinq semaines.
b) $50\,000 \times (3^{1/5})^t = 50\,000 \times (10^{0,095})^t$, puisque $0{,}095 = \log(3^{1/5})$.
c) $50\,000 \times (3^{1/5})^t = 50\,000 \times (e^{0,220})^t$, puisque $0{,}220 = \ln(3^{1/5})$.
d) $50\,000 \times (3^{1/5})^t = 50\,000 \times (1 + 0{,}25)^t$, puisque $3^{1/5} = 1{,}2457$.
e) Tripler toutes les cinq semaines correspond à une augmentation de 25 % par semaine.
f) 14,2 semaines

Pour la relation *ii*, $N(t) = 100\,000 \times 0{,}5^{t/3} = 100\,000 \times (0{,}5^{1/3})^t$.
a) Diminuer de moitié tous les trois jours.
b) $100\,000 \times (0{,}5^{1/3})^t = 100\,000 \times (10^{-0,1})^t$, puisque $-0{,}100 = \log(30{,}5^{1/3})$.
c) $100\,000 \times (0{,}5^{1/3})^t = 100\,000 \times (e^{-0,231})^t$, puisque $-0{,}231 = \ln(0{,}5^{1/3})$.
d) $100\,000 \times (30{,}5^{1/3})^t = 100\,000 \times (1 - 0{,}21)^t$, puisque $0{,}5^{1/3} = 0{,}7937 = 1 - 0{,}2063$.
e) Diminuer de moitié tous les trois jours correspond à une diminution de 21 % par jour.
f) La question n'a pas de sens, il s'agit d'une décroissance.

22. *a*) $\log M = 2{,}51 \log(160 + 393) - 4{,}7523$
$\log M = 2{,}132$
$M = 10^{2,132} = 132{,}5$
b) $\log M = 2{,}51 \log(t + 393) - 4{,}7523$
$\log M + 4{,}7523 = 2{,}51 \log(t + 393)$

$$\frac{\log M}{2,51} + \frac{4,7523}{2,51} = \log(t+393)$$

$$10^{\frac{\log M}{2,51}+\frac{4,7523}{2,51}} = t+393$$

$$(10^{\log M})^{1/251} \times 10^{4,7523/2,51} - 393 = t$$

$$M^{0,398} \times 78,23 - 393 = t$$

$$t = 78,2M^{0,398} - 393$$

23. *a*) La quantité initiale aura diminué du quart lorsque la quantité restante sera les 3/4 de la quantité initiale. On a donc :

$Q_0\ (0{,}98)^t = 0{,}75\ Q_0$. Cela donne $(0{,}98)^t = 0{,}75$ et $t = \dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}98} = 14{,}239...$ La quantité initiale aura donc diminué du quart après 14 ans.

La quantité initiale aura diminué des trois quarts lorsque la quantité restante sera le 1/4 de la quantité initiale. On a donc :

$Q_0\ (0{,}98)^t = 0{,}25\ Q_0$. Cela donne $(0{,}98)^t = 0{,}25$ et $t = \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}98} = 68{,}619...$ La quantité initiale aura donc diminué des trois quarts après 69 ans.

b) La quantité initiale aura diminué de moitié lorsque la quantité restante sera les 1/2 de la quantité initiale. On a donc : $Q_0\ (0{,}98)^t = 0{,}5\ Q_0$. Cela donne $(0{,}98)^t$ = 0,-5 et $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}98} = 34{,}309...$ La quantité initiale aura donc diminué de moitié après 34 ans.

24. $Q(t) = Q_0\ (0{,}8)^t = 0{,}5\ Q_0$ d'où $(0{,}8)^t = 0{,}5$ et $t = 3{,}10$. La période est donc de 3 minutes 6 secondes.

25. Par les propriétés de logarithmes, on a :

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{(5/8) \times (7/10)}{2/7}\right) = \log_a \left(\frac{5}{8} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{2}\right) = \log_a \left(\frac{49}{32}\right)$$

d'où $x = 49/32$.

26. *a*) Par les propriétés des logarithmes, on a $\log_a x^3 - \log_a x = 3 \log_a x - \log_a x = 2 \log_a x$
b) Par les propriétés des logarithmes, on a :
$\log_a x^3 - \log_a 2x = 3 \log_a x - (\log_a 2 + \log_a x) = 3 \log_a x - \log_a 2 - \log_a x = 2 \log_a x - \log_a 2$
c) En factorisant, on a :
$\log_a(x^2 - 1) - \log_a(x + 1) = \log_a[(x - 1)(x + 1)] - \log_a(x + 1) = \log_a(x - 1) + \log_a(x + 1) - \log_a(x + 1) = \log_a(x - 1)$
On peut également procéder de la façon suivante :

$$\log_a (x^2 - 1) - \log_a (x + 1) = \log_a \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1}\right) = \log_a \left(\frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1}\right) = \log_a (x - 1)$$

d) Par les propriétés des logarithmes, on a :
$\log_a(a^2 \sqrt{x}) + \log_a x^2 = \log_a a^2 + \log_a x^{(1/2)} + \log_a x^2 = 2 \log_a a + 0{,}5 \log_a x + 2 \log_a x = 2 + 2{,}5 \log_a x$

27. *a*) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$, d'où $\log_2[x(x - 3)] = 2$. On a donc $x(x - 3) = 2^2$ et $x^2 - 3x = 4$. On doit donc résoudre l'équation quadratique $x^2 - 3x - 4 = 0$. En factorisant, on a $(x + 1)(x - 4) = 0$ et on obtient $x = -1$ ou $x = 4$.
La valeur –1 est à rejeter dans ce cas car, en subtituant –1 à x dans l'équation initiale, on obtient des expressions non définies dans **R**, soit le logarithme de nombres négatifs. La seule solution est $x = 4$

b) $\log_3(x + 2) - \log_3(x - 2) = 2$, d'où $\log_3\left(\dfrac{x + 2}{x - 2}\right) = 2$. En exprimant sous forme exponentielle, on obtient : $\left(\dfrac{x + 2}{x - 2}\right) = 3^2 = 9$ qui donne $x + 2 = 9(x - 2)$, en distribuant $x + 2 = 9x - 18$ qui donne $x = 5/2$.

c) $2 \log_5 x - \log_5 8x = 0, 8$, d'où $\log_5 x^2 - \log_5 8x = 0$ et $\log_5\left(\dfrac{x^2}{8x}\right) = 0{,}8$. En exprimant sous forme exponentielle, on obtient : $\left(\dfrac{x^2}{8x}\right) = 5^0 = 1$. On a donc $x^2 = 8x$ et $x^2 - 8x = 0$, $x(x - 8) = 0$. Cela donne $x = 0$ et $x = 8$. Cependant $x = 0$ est une valeur à rejeter car , le logarithme de 0 n'est pas défini, dans aucune base.

d) $2 \log_2 x - \log_2(x - 2) = 3$, d'où $\log_2 x^2 - \log_2(x - 2) = 3$ et $\log_2\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right) = 3$. En exprimant sous forme exponentielle, on obtient : $\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right) = 2^3 = 8$. Cela donne $x^2 = 8x - 16$ et $x^2 - 8x + 16 = 0$. En décomposant en facteurs, on obtient $(x - 4)^2 = 0$ d'où l'on tire $x = 4$.

28. La réponse n'est pas plausible parce que $2^6 = 64$ et on cherche x tel que $2^x = 12$. Il faut effectuer (log 12)/log 2, ce qui donne 3,58.

29. Il faut utiliser les propriétés des logarithmes pour simplifier, ce qui donne $\log x + \log 4x = \log 4x^2 = 2$ et $4x^2 = 10^2$ d'où

$x^2 = 25$ et $x = \pm 5$. La valeur –5 est à rejeter.

30. On ne peut simplifier les logarithmes, il ne s'agit pas d'un produit mais d'une fonction, on a

$$\log x = 3 \log 2$$
$$\log x = \log 2^3 = \log 8$$
$$x = 8$$

31. Il faut regrouper en utilisant les propriétés des logarithmes, ce qui donne :

$$\log x - \log 2 = 1$$
$$\log(x/2) = 1$$
$$\frac{x}{2} = 10^1$$
$$x = 20$$

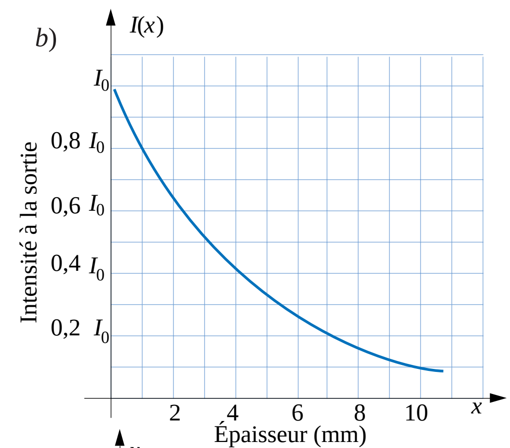
32. *a*) On cherche k tel que : $I_0 e^{-5k} = \dfrac{I_0}{3}$, en simplifiant, on a $e^{-5k} = \dfrac{1}{3}$.

En prenant le logarithme des deux membres, $-5k = \ln(1/3)$, d'où :

$$k = -\frac{1}{5}\ln(1/3) = 0,2197$$

La fonction est donc $I(x) = I_0\, e^{-0,2197\, x}$

b)



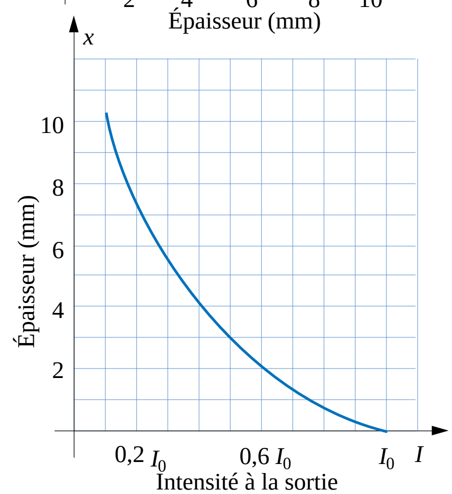
c) On a $I = I_0\, e^{-0,2197\, x}$ d'où ; $\dfrac{I}{I_0} = e^{-0,2197x}$

En prenant le logarithme des deux membres, on a :

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -0,2197x \text{ et : } x = -\frac{1}{0,2197}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -4,5512\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

d)

I	10	8	6	4	2
$x(I)$	0	1,02	2,32	4,17	7,32



33. *a*) $P(0) = 29,92\, e^0 = 29,92$ po
b) 1 po de mercure = 3,386 kPa
c) 2 640 pi = 0,5 mille, on a donc $P(0,5) = 29,92\, e^{-0,5/5} = 27,07$ po = 91,67 kPa
d) On cherche d tel que $29,92\, e^{-d/5} = 22,12$, ce qui donne $d = 1,51$ mille = 7 973 pieds.

34. *a*) $v(20) = 0,8\, e^{0,15 \times 20} = 0,8\, e^3 = 16,07$
b) 32,19 °C   *c*) 4,62 °C

35. *a*) $T = T_0(1 + r)^n$, d'où $48 = 60(1 + r)^1$, $1 + r = 0,8$ et $r = -20\ \%$
b) $T_0\, 0,8^n = 0,5\, T_0$ d'où $0,8^n = 0,5$ et $n \ln 0,8 = \ln 0,5$ ce qui donne $n = 3,1$ périodes de 10 minutes.
c) $60 \times 0,8^n = 10$ d'où $n = 8$ périodes de 10 minutes.
d) 3,1 périodes de 10 minutes
e) 9,3 périodes de 10 minutes

36. *a*) $pH = -\log(2,8 \times 10^{-3}) = -[\log 2,8 + \log 10^{-3}] = -[0,4471... - 3] = -(-2,5528...) = 2,5528...$
En ne retenant que deux décimales, on a $pH = 2,55$.
b) $pH = -\log(3,5 \times 10^{-4}) = -[\log 3,5 + \log 10^{-4}] = -[0,5440... - 4] = -(-3,4559...) = 3,4559...$

En ne retenant que deux décimales, on a $p\text{H} = 3{,}46$.

37. *a*) On a $p\text{H} = 7{,}41$, or $p\text{H} = -\log\,[H_3O^+] = 7{,}41$ d'où $\log\,[H_3O^+] = -7{,}41$ et $[H_3O^+] = 10^{-7{,}41} = 3{,}9 \times 10^{-8}$.
b) On a $p\text{H} = 5{,}82$, or $p\text{H} = -\log\,[H_3O^+] = 5{,}82$ d'où $\log\,[H_3O^+] = -5{,}82$ et $[H_3O^+] = 10^{-5{,}82} = 1{,}5 \times 10^{-6}$.

38. $$E = -0{,}03\log\left(\frac{1}{[H_3O^+]^2}\right) = -0{,}03\log\left([H_3O^+]^{-2}\right) = -0{,}06 \times \log\left([H_3O^+]\right) = -0{,}06\,p\text{H}$$

39. Le potentiel est décrit par :

$$E_x = K + S\log\left[c_s\left(\frac{V_s}{V_s+V_x}\right) + c_x\left(\frac{V_x}{V_s+V_x}\right)\right]$$

En soustrayant E_s aux deux membres, on obtient :

$$\Delta E = E_s - E_x = K + S\log\left[c_x\left(\frac{V_x}{V_s+V_x}\right) + c_s\left(\frac{V_s}{V_s+V_x}\right)\right] - K - S\log c_x$$

d'où : $$\Delta E = S\log\left[c_x\left(\frac{V_x}{V_s+V_x}\right) + c_s\left(\frac{V_s}{V_s+V_x}\right)\right] - S\log c_x$$

Par mise en évidence, $$\Delta E = S\left(\log\left[c_x\left(\frac{V_x}{V_s+V_x}\right) + c_s\left(\frac{V_s}{V_s+V_x}\right)\right] - \log c_x\right)$$

Les propriétés des logarithmes permettent alors d'écrire :

$$\Delta E = S\left(\log\left[\frac{c_x\left(\frac{V_x}{V_s+V_x}\right) + c_s\left(\frac{V_s}{V_s+V_x}\right)}{c_x}\right]\right)$$

D'où : $$\frac{\Delta E}{S} = \log\left[\left(\frac{c_xV_x + c_sV_s}{V_s+V_x}\right)\times\frac{1}{c_x}\right]$$

et : $$\frac{\Delta E}{S} = \log\left[\left(\frac{c_xV_x + c_sV_s}{c_xV_s + c_xV_x}\right)\right]$$

En exprimant sous forme exponentielle, on obtient :

$$10^{\Delta E/S} = \frac{c_xV_x + c_sV_s}{c_xV_s + c_xV_x}$$

Cela donne : $$10^{\Delta E/S}(c_xV_s + c_xV_x) = c_xV_x + c_sV_s$$

en distribuant, on a : $$10^{\Delta E/S}c_xV_s + 10^{\Delta E/S}c_xV_x - c_xV_x = c_sV_s$$

et : $$c_x = \frac{c_sV_s}{10^{\Delta E/S}V_s + 10^{\Delta E/S}V_x - V_x}$$