

CHAPITRE 13

EXERCICE 13.1

a) $f'(x) = 3x^2 + 2$

c) $q'(t) = -72 e^{-2t}$

e) $p'(t) = \frac{250(1-2t)}{e^{2t}}$

g) $f'(x) = 2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x)$

b) $f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 4)^2}$

d) $f'(x) = \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$

f) $v'(t) = 24\pi \cos(2\pi t + \pi/2)$

h) $s'(t) = e^{-0,5t} [-0,5 \sin(2\pi t) + 2\pi \cos(2\pi t)]$

EXERCICE 13.2

a) $F(x) = -\frac{(1-2x)^3}{6} + k$

c) $F(t) = -\frac{\cos(120\pi t + \pi/2)}{120\pi} + k$

e) $F(t) = -\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} + k$

b) $F(t) = -2e^{-0,5t} + k$

d) $F(t) = -\frac{\ln|1-2t|}{2} + k$

f) $F(x) = x + \frac{1}{x} + k = \frac{x^2 + 1}{x} + k$

EXERCICE 13.3

a) $y = x^2 - 3x + k$

c) $y = \pm e^k e^{0,5x^2} = b_0 e^{0,5x^2}$

e) $y = -\frac{e^{-2t}}{2} + k$

b) $y = \ln|2x + 3| + k$

d) $y = \pm e^k e^{-3/x} = b_0 e^{-3/x}$

f) $y = \pm e^k e^{-\cos x} = b_0 e^{-\cos x}$

EXERCICE 13.4

a) $\frac{e^2 - 1}{2}$

b) $\sqrt{2}/4$

EXERCICE 13.5

a) $\frac{1 - e^{-2}}{0,5} = 1,729\dots$

b) 1

EXERCICES 13.6

a) $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$

c) $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{6}{x^2 \cos\theta} \frac{dx}{dt}$

b) $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{3\pi h^2} \frac{dV}{dt}$

d) $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4 \sin\theta} \frac{dx}{dt}$

EXERCICE 13.7

a) $s(0) = 20 \text{ m}$

b) La dérivée première est $s'(t) = 6t^2 - 36t + 48 \text{ m/s}$.
C'est la fonction décrivant la vitesse du mobile au temps t .

c) La dérivée seconde est $s''(t) = 12t - 36 \text{ m/s}^2$.
C'est la fonction décrivant l'accélération du mobile au temps t .

d) $s'(0) = 48 \text{ m/s}$, $s''(0) = -36 \text{ m/s}^2$

Donc au temps $t = 0$, la vitesse du mobile est de 48 m/s et son accélération est de -36 m/s^2 .

e) La dérivée première s'annule lorsque :

$$6t^2 - 36t + 48 = 0$$

$$6(t^2 - 6t + 8) = 0$$

$$6(t - 2)(t - 4) = 0$$

Les zéros sont 2 et 4, le mobile est donc arrêté à 2 s et à 4 s.

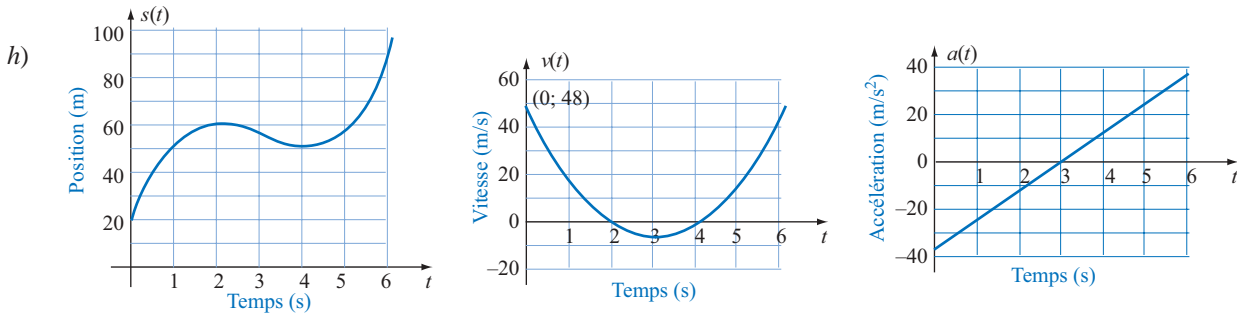
On a alors $s(2) = 60 \text{ m}$ et $s(4) = 52 \text{ m}$. De plus, $s''(2) = -12 \text{ m/s}^2$ et $s''(4) = 12 \text{ m/s}^2$

f) Même s'il est arrêté à 2 s et 4 s, le mobile change de position entre ces instants parce que son accélération n'est pas nulle à 2 s, il va donc se remettre en mouvement pour s'approcher du point fixe durant l'intervalle]2; 4[.

g) L'accélération est nulle lorsque

$$12t - 36 \text{ m/s}^2 = 0, \text{ ce qui donne } t = 3 \text{ s.}$$

L'accélération est donc nulle à 3 s. On a alors $s(3) = 56 \text{ m}$ et $s'(3) = -6 \text{ m/s}$.



i) À 0 s, le mobile est à 20 m du point fixe. Il a une vitesse de 48 m/s et une accélération de -36 m/s^2 . Le mobile est donc en décélération mais se déplace vers la droite.

À 2 s, la vitesse du mobile est nulle. Il est momentanément arrêté à 60 m. Cependant, son accélération est de -12 m/s^2 . Donc le mobile se remet en mouvement, mais cette fois vers la gauche.

À 3 s, l'accélération du mobile est nulle. Il est alors à 56 m et sa vitesse est de -6 m/s . Donc il continue de se déplacer vers la gauche.

À 4 s, la vitesse est de nouveau nulle; il est momentanément arrêté à 52 m du point fixe. Cependant, son accélération est alors de 12 m/s^2 . Donc il va se remettre en mouvement vers la droite.

Après quoi, la vitesse redevient positive et le mobile continue de se déplacer vers la droite.

EXERCICE 13.8

a) La vitesse de la roue est $\omega(t) = 500(1 - e^{-0,4t}) \text{ t/min}$. La valeur stable est la limite à l'infini, soit :

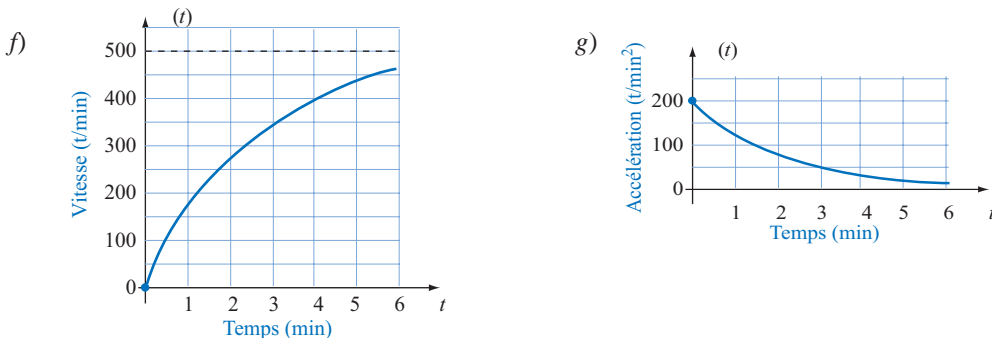
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (500(1 - e^{-0,4t})) = 500 \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-0,4t}) = 500 [\lim_{t \rightarrow \infty} (1) - \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-0,4t})] = 500 [1 - 0] = 500 \text{ t/min}$$

b) La fonction dérivée est $\alpha(t) = \omega'(t) = 200e^{-0,4t} \text{ t/min}^2$. L'accélération à 0 s est alors $\alpha(0) = 200 \text{ t/min}^2$. Ce qui signifie qu'à l'instant initial, la vitesse tend à augmenter de 200 t/min par minute.

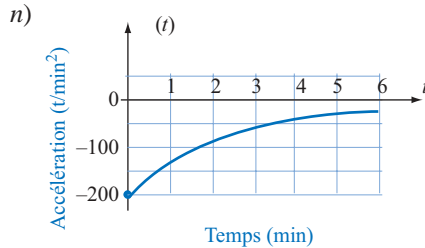
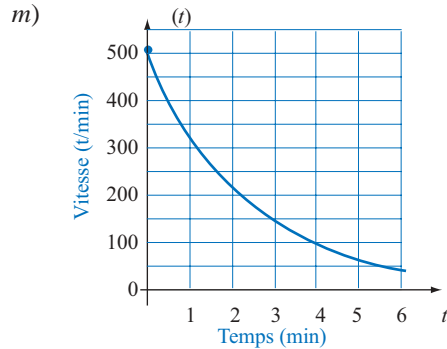
c) Si le taux de variation initial demeurerait constant, la vitesse serait directement proportionnelle au temps et on aurait $\omega(t) = 200t \text{ t/min}$. Le temps requis pour atteindre la valeur stable serait alors donnée par $200t = 500$ d'où $t = 2,5 \text{ min}$.

d) $\alpha(2) = 89,9 \text{ t/min}^2$.

e) L'accélération est décroissante comme l'indiquent les valeurs calculées en b et d.

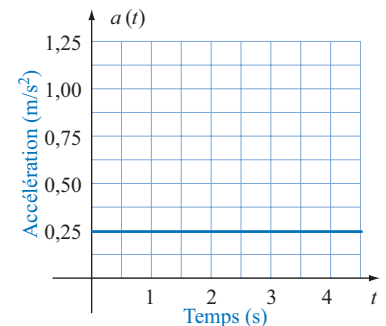


- h) La valeur stable est $\lim_{t \rightarrow \infty} (500e^{-0,4t}) = 500 \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-0,4t}) = 0$ t/min.
- i) La fonction dérivée est $\alpha(t) = \omega'(t) = -200e^{-0,4t}$ t/min².
L'accélération à 0 s est alors $\alpha(0) = -200$ t/min².
Cela signifie qu'à l'instant initial, la vitesse tend à diminuer de 200 t/min par minute.
- j) Si le taux de variation initial demeurerait constant, la vitesse serait $\omega(t) = 500 - 200t$ t/min.
Le temps requis pour atteindre la valeur stable serait alors donnée par $500 - 200t = 0$, d'où $t = 2,5$ min.
- k) $\alpha(2) = -89,9$ t/min².
- l) L'accélération est croissante comme l'indiquent les valeurs calculées en i et k.



EXERCICE 13.9

- a) L'accélération étant constante, elle est représentée par une droite horizontale.

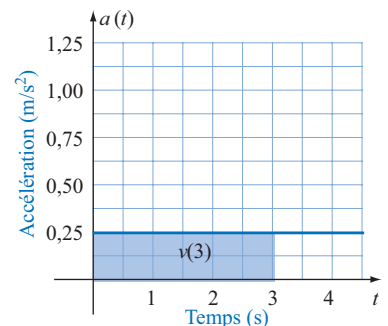


- b) Graphiquement, la vitesse après trois secondes est l'aire sous la courbe de l'accélération dans l'intervalle [0; 3]. On obtient ce résultat par l'intégrale définie de l'accélération dans l'intervalle [0; 3], ce qui donne :

$$\int_0^3 0,25 dt = 0,25t \Big|_0^3 = 0,25 \times 3 - 0,25 \times 0 = 0,75 \text{ m/s}$$

La figure formée étant un rectangle, on obtient également ce résultat en effectuant le produit de la base par la hauteur. La hauteur est l'accélération de $0,25 \text{ m/s}^2$ et la base est l'intervalle de temps, $\Delta t = 3 \text{ s}$. La vitesse à trois secondes est donc :

$$v(3) = 0,25 \text{ m/s}^2 \times 3 \text{ s} = 0,75 \text{ m/s}$$



- c) Graphiquement, la vitesse après t secondes est l'aire sous la courbe de l'accélération dans l'intervalle [0; t]. La fonction décrivant la vitesse à t secondes est obtenue par l'intégrale indéfinie de l'accélération, ce qui donne :

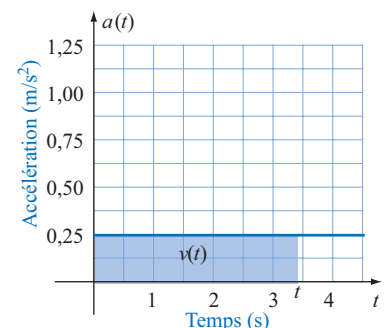
$$\int 0,25 dt = 0,25t + k \text{ m/s}$$

Le mobile étant initialement au repos, la constante d'intégration est nulle et la vitesse est décrite par :

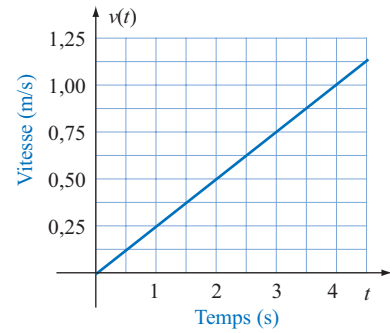
$$v(t) = 0,25t \text{ m/s}$$

La figure formée étant un rectangle, on obtient également ce résultat en effectuant le produit de la base par la hauteur. La hauteur est l'accélération de $0,25 \text{ m/s}^2$ et la base est l'intervalle de temps, $\Delta t = t - 0 = t \text{ s}$. La vitesse à t secondes est donc :

$$v(t) = 0,25 \text{ m/s}^2 \times t \text{ s} = 0,25t \text{ m/s}$$



d) La vitesse est décrite par un modèle affine et sa représentation graphique est une droite de pente $0,25 \text{ m/s}^2$. Cette droite passe à l'origine puisque le mobile était initialement au repos.



e) Graphiquement, la distance parcourue (ou position) après 3 secondes est l'aire sous la courbe de la vitesse dans l'intervalle $[0; 3]$. Cette aire est obtenue par l'intégrale définie dans l'intervalle $[0; 3]$, ce qui donne :

$$\int_0^3 0,25t \, dt = \left. \frac{0,25t^2}{2} \right|_0^3 = 0,125t^2 \Big|_0^3 = 0,125 \times 3^2 - 0,125 \times 0^2 = 1,125 \text{ m}$$

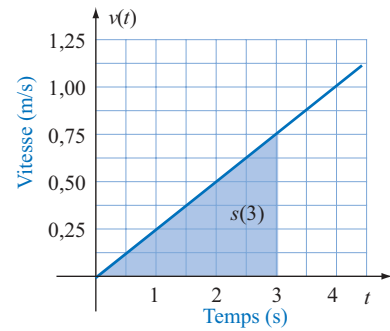
La figure formée étant un triangle, il suffit de faire le demi produit de la base par la hauteur. La hauteur est la vitesse à trois secondes, soit :

$$v(3) = 0,25 \text{ m/s}^2 \times 3 \text{ s} = 0,75 \text{ m/s}$$

La base est l'intervalle de temps, $\Delta t = 3 - 0 = 3 \text{ s}$.

La position après trois secondes est donc :

$$s(3) = \frac{0,75 \text{ m/s} \times 3 \text{ s}}{2} = 1,125 \text{ m}$$



f) Graphiquement, la position après t secondes est l'aire sous la courbe de la vitesse dans l'intervalle $[0; t]$. On obtient donc la position au temps t par l'intégrale indéfinie, ce qui donne

$$\int 0,25t \, dt = \frac{0,25t^2}{2} + k = 0,125t^2 + k \text{ m}$$

Le mobile étant initialement au repos, la constante d'intégration est nulle et on a :

$$s(t) = 0,125t^2 \text{ m}$$

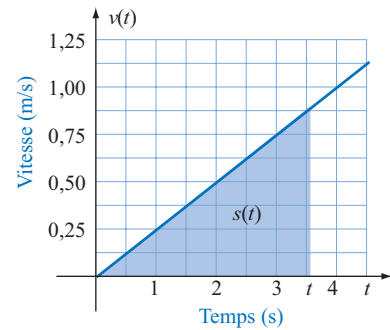
La figure formée étant un triangle, on obtient également ce résultat en effectuant le demi produit de la base par la hauteur. La hauteur est la vitesse à t secondes, soit :

$$v(t) = 0,25t \text{ m/s}$$

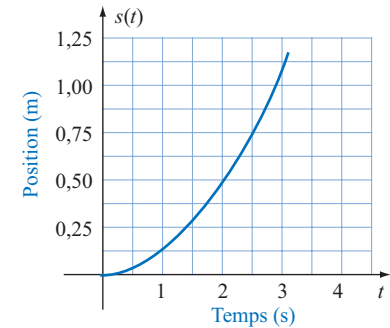
La base est l'intervalle de temps $\Delta t = t - 0 = t \text{ s}$.

La position après t secondes est donc :

$$s(t) = \frac{0,25t \text{ m/s} \times t \text{ s}}{2} = 0,125t^2 \text{ m}$$



g) La représentation graphique de la position en fonction du temps est :



EXERCICE 13.10

a) La vitesse du projectile est donnée par l'intégrale indéfinie de l'accélération qui est de $-9,8 \text{ m/s}^2$, soit :

$$v(t) = \int -9,8 \, dt = -9,8t + k \text{ m/s}$$

La vitesse initiale étant de 49 m/s , on a :

$$v(0) = -9,8 \times 0 + k = 49$$

d'où $k = 49$ m/s et la vitesse est décrite par :

$$v(t) = 49 - 9,8t \text{ m/s}$$

b) La vitesse à trois secondes est :

$$v(3) = 49 - (9,8 \times 3) \text{ m/s} = 19,6 \text{ m/s}$$

c) La hauteur au temps t est donnée par l'intégrale indéfinie de la vitesse, ce qui donne :

$$h(t) = \int (49 - 9,8t) dt = 49t - 4,9t^2 + k \text{ m/s}$$

Le projectile étant lancé à partir du sol, la hauteur initiale est 0 et on a :

$$h(0) = 49 \times 0 - 4,9 \times 0 + k = 0$$

d'où l'on tire $k = 0$ et la hauteur en fonction du temps est donnée par :

$$h(t) = 49t - 4,9t^2 \text{ m}$$

d) La hauteur à trois secondes sera :

$$h(3) = (49 \times 3) - (4,9 \times 3^2) \text{ m} = 102,9 \text{ m}$$

e) La hauteur étant décrite par une fonction quadratique, la hauteur maximale correspond au point sommet de la courbe. Le temps nécessaire pour atteindre cette hauteur est :

$$t = -b/2a = -49/-9,8 = 5 \text{ s}$$

et la hauteur maximale sera :

$$h(5) = (49 \times 5) - (4,9 \times 5^2) \text{ m} = 122,5 \text{ m}$$

f) Le projectile retombera au sol lorsque sa hauteur sera égale à 0, ce qui donne :

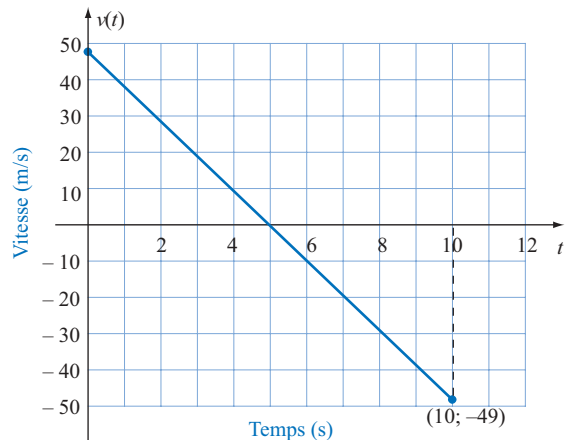
$$h(t) = 49t - 4,9t^2 = 0$$

d'où :

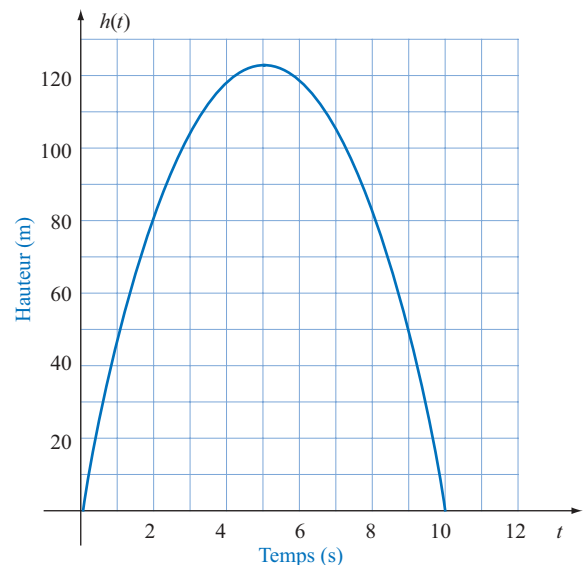
$$t(49 - 4,9t) = 0$$

On trouve donc $t = 0$ et $t = 49/4,9 = 10$ s et on peut conclure que le projectile retombera au sol après 10 s.

g) Le domaine de validité des modèles est $[0; 10]$. La fonction vitesse $v(t) = 49 - 9,8t$ m/s est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est 49 m/s et la pente est $-9,8$ m/s². Cette fonction a un zéro à 5 s, c'est l'instant où la vitesse est nulle. La représentation graphique de la fonction est :



La fonction position $h(t) = 49t - 4,9t^2$ m est une fonction quadratique dont le sommet est atteint à 5 s pour une hauteur de 122,5 m. La vitesse est nulle à cet instant. La fonction a des zéros à 0 s et à 10 s qui correspondent à l'instant de départ et à l'instant d'arrivée. La représentation graphique de la fonction est :

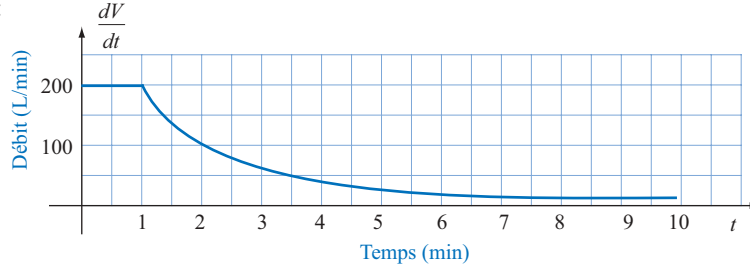


EXERCICE 13.11

- a) Le débit est décrit par une fonction constante durant la première minute et par une variation inversement proportionnelle durant les neuf minutes suivantes. Algébriquement, le débit est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} 200 \text{ L/min} & \text{si } t \in [0; 1[\\ 200/t \text{ L/min} & \text{si } t \in [1; 10] \end{cases}$$

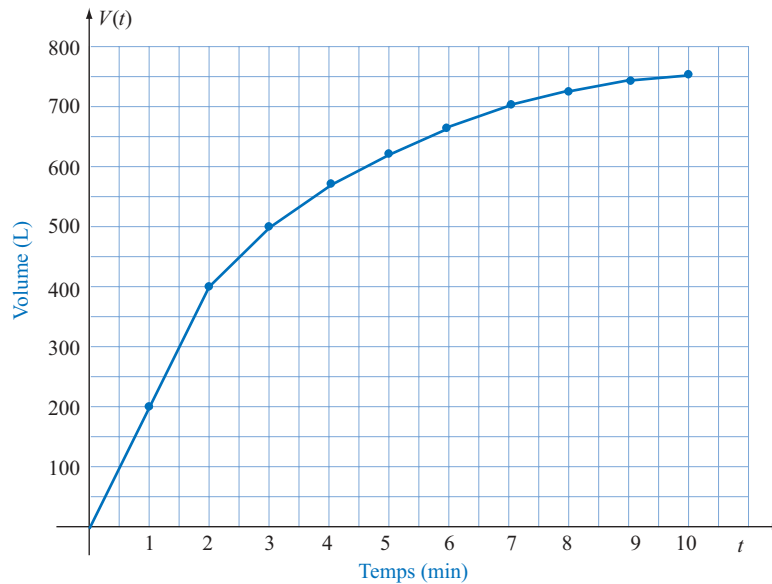
Graphiquement, on a :



- b) En prenant un pas unitaire, on peut estimer les accroissements de volume à chaque minute et approximer la variation de volume durant l'intervalle $[0; 10]$. On a alors :

Intervalle Δt (min)	[0; 1[[1; 2[[2; 3[[3; 4[[4; 5[[5; 6[[6; 7[[7; 8[[8; 9[[9; 10]
Taux de variation dV/dt (L/min)	200	200	100	66,7	50	40	33,3	28,6	25,0	22,2
Différentielle dV (L)	200	200	100	66,7	50	40	33,3	28,6	25,0	22,2
Accroissement $V + dV$ (L)	200	400	500	566,7	616,7	656,7	690,0	718,6	743,6	765,8

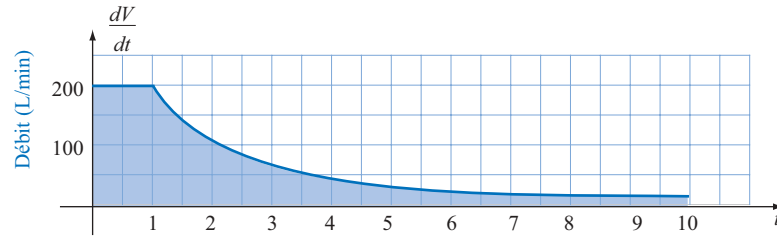
La représentation graphique de l'accroissement de volume d'eau en litres est alors :



- c) La variation exacte du volume durant l'intervalle $[0; 10]$ est représentée par l'aire sous la courbe décrivant le débit dans l'intervalle $[0; 10]$. Dans l'intervalle $[0; 1]$, l'aire est 200 et dans l'intervalle $[1; 10]$, on a :

$$\int_1^{10} \left(\frac{200}{t} \right) dt = 200 \ln t \Big|_1^{10} = 200(\ln 10 - \ln 1) = 460,52$$

L'aire totale est donc de 660,52 et l'accroissement de volume est de 660,52 litres.



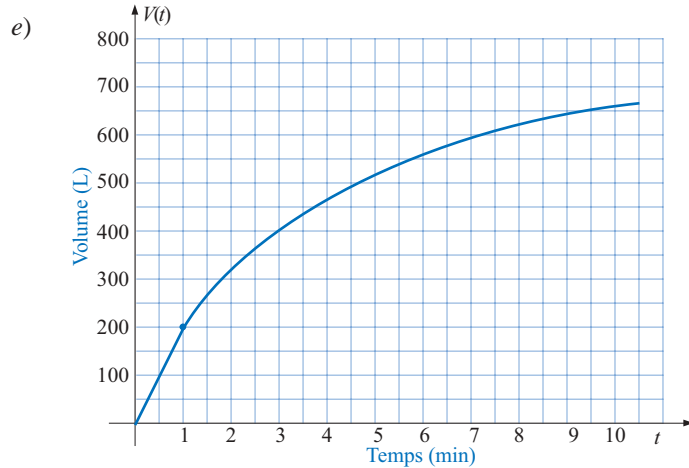
- d) La fonction décrivant la variation du volume de liquide est la solution de l'équation différentielle décrivant le taux de variation. Puisque :

$$V(t) = \int 200 dt = 200t + k, \text{ si } t \in [0; 1[\text{ et } k = 0 \text{ puisque } V(0) = 0 \text{ L}$$

et $V(t) = \int \left(\frac{200}{t}\right) dt = 200 \ln t + k, \text{ si } t \in [0; 1[\text{ et } k = 200 \text{ puisque } V(1) = 200 \text{ L}$

l'accroissement de volume est décrit algébriquement par la fonction par parties :

$$V(t) = \begin{cases} 200t \text{ L} & \text{si } t \in [0; 1[\\ 200 + 200 \ln t \text{ L} & \text{si } t \in [1; 10] \end{cases}$$



EXERCICE 13.12

- a) L'équation différentielle permettant de modéliser mathématiquement cette situation est de la forme :

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, $k = -0,1$ et $T_0 = 22$ °C, la température ambiante. On a donc :

$$\frac{dT}{dt} = -0,1(T - 22)$$

- b) Par intégration, on peut trouver la solution de cette équation différentielle. En séparant les variables, on obtient :

$$\frac{dT}{T - 22} = -0,1 dt$$

En posant $u = T - 22$, on a alors $du = dT$ et par changement de variables,

$$\frac{du}{u} = -0,1 dt$$

Par intégration, on obtient :

$$\int \frac{du}{u} = - \int 0,1 dt$$

$$\ln |u| = -0,1t + k$$

En isolant u ,

$$u = \pm e^{-0,1t+k} = \pm e^{-0,1t} e^k = b_0 e^{-0,1t}$$

et par substitution :

$$\begin{aligned} T - 22 &= b_0 e^{-0,1t} \\ T &= 22 + b_0 e^{-0,1t} \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de la constante b_0 , on peut avoir recours aux conditions initiales. Dans ce cas, au temps $t = 0$, la température est celle de l'eau en ébullition, soit 100°C . On a donc :

$$T(0) = 22 + b_0 e^{-0,1 \times 0} = 22 + b_0 = 100$$

d'où l'on tire $b_0 = 78$. Le modèle mathématique décrivant la température de l'eau au temps t est alors :

$$T(t) = 22 + 78e^{-0,1t} \text{ } ^\circ\text{C}$$

- c) Pour esquisser le graphique de cette fonction, on peut, dans un premier temps, déterminer les renseignements fournis par les dérivées première et seconde. La dérivée première est :

$$T'(t) = -7,8e^{-0,1t}$$

Cette dérivée ne s'annule jamais et elle est toujours négative dans l'intervalle $[0; \infty[$. La fonction est donc toujours décroissante. La dérivée seconde est :

$$T''(t) = 0,78e^{-0,1t}$$

Elle ne s'annule jamais et elle est toujours positive dans l'intervalle $[0; \infty[$. La fonction est donc toujours concave vers le haut. La valeur initiale est :

$$T(0) = 22 + 78e^{-0,1 \times 0} = 100^\circ\text{C}$$

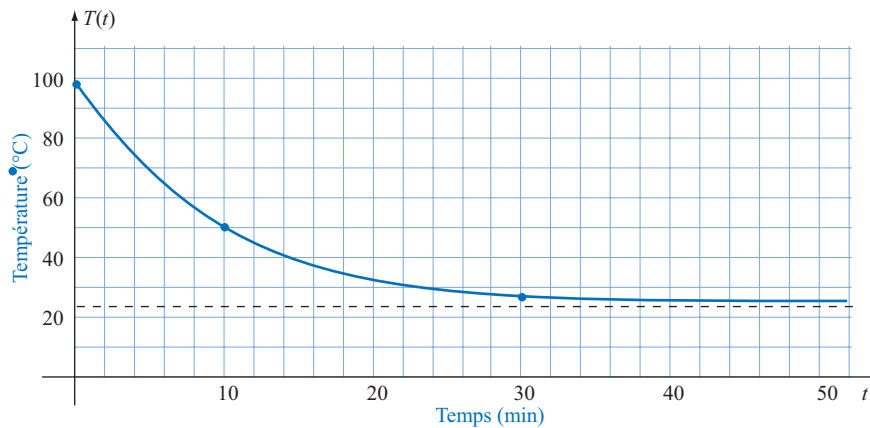
La valeur stable est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (22 + 78e^{-0,1t}) = 22 \text{ } ^\circ\text{C}$$

On peut calculer des valeurs correspondantes pour garantir une meilleure précision à l'esquisse graphique, ce qui donne :

t	0	10	20	30	40
$T(t)$	100	50,69	32,56	25,88	23,43

La représentation graphique de la fonction est alors :



- d) En prenant un récipient plus grand ou plus petit, la masse d'eau à refroidir serait différente et la constante de proportionnalité serait changée.

EXERCICE 13.13

- a) Le taux de variation du niveau d'eau est proportionnel à la différence entre le niveau d'eau du réservoir plein, soit 30 cm, et le niveau h au temps t . On a donc :

$$\frac{dh}{dt} = k(30 - h)$$

Le volume de liquide qui s'est ajouté dans le réservoir au temps t est $V = 20 \times 40h = 800h \text{ cm}^3$ ou encore $V = 0,8h$ litres. On a donc à tout instant :

$$\frac{dV}{dt} = 0,8 \frac{dh}{dt} \text{ et } \frac{dh}{dt} = \frac{1}{0,8} \frac{dV}{dt} = 1,25 \frac{dV}{dt}$$

Puisque le débit est de 1 litre par seconde initialement, le taux de variation du niveau est à ce moment de $1,25 \text{ cm/s}$, de plus le niveau est $h = 5 \text{ cm}$. Par conséquent on a :

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_0 = k(30 - 5) = 1,25 \text{ cm/s}$$

Ce qui donne $25k = 1,25$ et $k = 0,05$. L'équation différentielle est alors :

$$\frac{dh}{dt} = 0,05(30 - h) \text{ cm/s}$$

- b) La fonction décrivant le niveau d'eau dans le réservoir au temps t est obtenue par l'intégrale indéfinie du taux de variation du niveau. En séparant les variables, on a :

$$\frac{dh}{30 - h} = 0,05 dt$$

Par changement de variable, $u = 30 - h$ d'où $du = -dh$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -0,05 dt \\ \int \frac{du}{u} &= -\int 0,05 dt \\ \ln |u| &= -0,05t + k \\ u &= b_0 e^{-0,05t} \end{aligned}$$

En exprimant sous forme exponentielle, on a :

$$\begin{aligned} 30 - h &= b_0 e^{-0,05t} \\ h &= 30 - b_0 e^{-0,05t} \end{aligned}$$

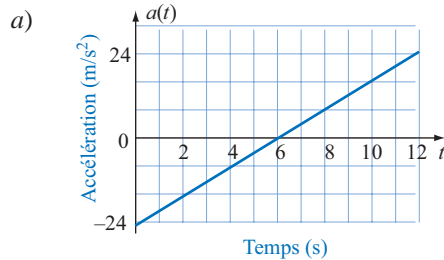
Au temps 0, la hauteur est de 5 cm, on a donc :

$$h(0) = 30 - b_0 e^{-0,05 \times 0} = 30 - b_0 = 5$$

d'où l'on tire $b_0 = 25$. La fonction décrivant le niveau d'eau est alors :

$$h(t) = 30 - 25e^{-0,05t} \text{ cm}$$

EXERCICE 13.14



- b) La fonction décrivant la vitesse est donnée par :

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (4t - 24) dt = 2t^2 - 24t + k \text{ m/s}$$

- c) La vitesse initiale est de 64 m/s, on a donc $v(0) = 64$, ce qui donne $k = 64$. Le modèle est donc :

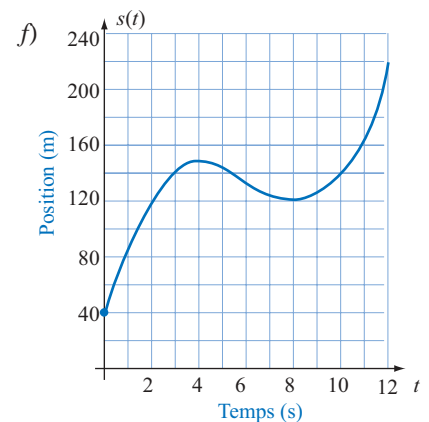
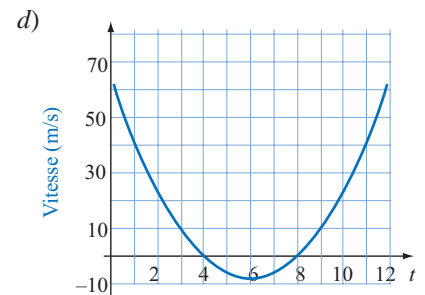
$$v(t) = 2t^2 - 24t + 64 \text{ m/s}$$

- e) La position du mobile est donnée par :

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (2t^2 - 24t + 64) dt = \frac{2t^3}{3} - 12t^2 + 64t + k \text{ m}$$

La constante d'intégration est 40 puisque la position initiale est de 40 m. Le modèle est donc :

$$s(t) = \frac{2t^3}{3} - 12t^2 + 64t + 40 \text{ m}$$



EXERCICE 13.15

- a) En intégrant la fonction décrivant l'accélération, on a $v(t) = \int (12 - t) dt = 12t - \frac{t^2}{2} + k$. Puisque la vitesse initiale est nulle, on trouve $k = 0$ et la vitesse est :

$$v(t) = 12t - \frac{t^2}{2} \text{ m/s}$$

L'énergie cinétique est décrite par $E_C = \frac{1}{2}mv^2$. Puisque la masse est de 1 kg, on a :

$$E_C = \frac{1}{2} \left(12t - \frac{t^2}{2} \right)^2 \text{ J}$$

Les unités sont des joules (1 J = 1 kg·m²/s²).

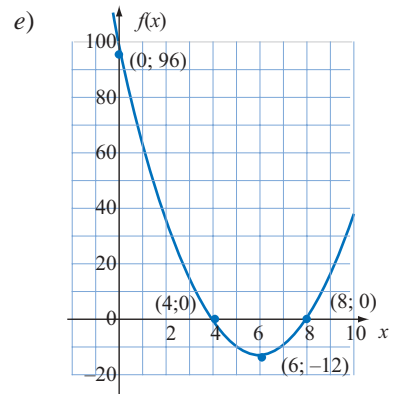
- b) $E_C(0) = 0 \text{ J}$, $E_C(2) = 242 \text{ J}$, $E_C(8) = 2\,048 \text{ J}$
 c) Le taux de variation de l'énergie cinétique est donné par la dérivée, soit :

$$\frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2} \times 2 \left(12t - \frac{t^2}{2} \right) \left(12 - \frac{2t}{2} \right) = \left(12t - \frac{t^2}{2} \right) (12 - t) \text{ J/s}$$

- d) $\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_0 = 0 \text{ J/s}$, $\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_2 = 220 \text{ J/s}$, $\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_8 = 256 \text{ J/s}$

EXERCICE 13.16

- a) $f'(x) = 6x - 36$
 b) $f'(0) = -36$, $f'(2) = -24$, $f'(8) = 12$
 c) La dérivée s'annule lorsque $6x - 36 = 0$, ce qui donne $x = 6$. La tangente est horizontale à $x = 6$.
 Puisque $f(6) = -12$, on a le point $(6; -12)$.
 d) Lorsque $x < 6$ la pente de la tangente est négative. La fonction est donc décroissante dans l'intervalle $]-\infty; 6[$.
 Lorsque $x > 6$ la pente de la tangente est positive. La fonction est donc croissante dans l'intervalle $]6; \infty[$.

**EXERCICE 13.17**

- a) Puisque $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$, le point d'abscisse 2 est le point $(2; 1)$. De la même façon, le point d'abscisse 3 est $(3; 2)$.
 La pente de la droite passant par les points $(2; 1)$ et $(3; 2)$ est :

$$a = \frac{2-1}{3-2} = 1$$

L'équation est de la forme $y = ax + b$ et en posant $a = 1$, on a $y = 1x + b$. En substituant les coordonnées du point $(2; 1)$, on a : $1 = 2 + b$ d'où $b = -1$ et l'équation est :

$$y = x - 1$$

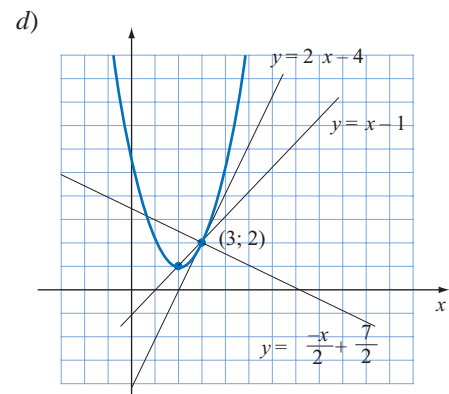
- b) Le point d'abscisse 3 est le point $(3; 2)$. La dérivée de la fonction est :

$$f'(x) = 2x - 4$$

La pente de la tangente au point d'abscisse 3 est donc $f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$.
 L'équation de la tangente est donc :

$$y = 2x - 4.$$

- c) La pente de la normale est $-1/2$ et son équation est $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$.

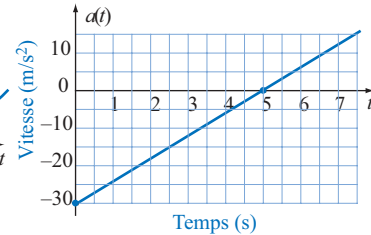
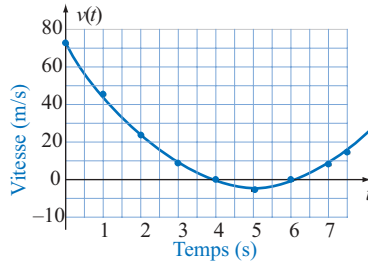
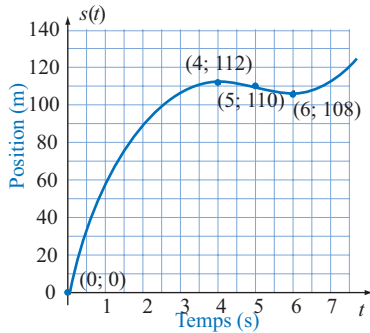


EXERCICE 13.18

- a) La dérivée première est $s'(t) = 3t^2 - 30t + 72$ m/s.
C'est la fonction décrivant la vitesse de la particule.
- b) $s'(0) = 72$ m/s, $s'(1) = 45$ m/s, $s'(5) = -3$ m/s.
- c) La dérivée seconde est $s''(t) = 6t - 30$ m/s².
C'est la fonction décrivant l'accélération.
- d) $s''(0) = -30$ m/s², $s''(1) = -24$ m/s², $s''(5) = 0$ m/s².
- e) La dérivée première est $s'(t) = 3t^2 - 30t + 72$ m/s.
Elle s'annule à $t = 4$ s et $t = 6$ s.
La dérivée seconde est $s''(t) = 6t - 30$ m/s²
Elle s'annule à $t = 5$ s.
À 0 s, la particule est au point fixe, elle a une vitesse de 72 m/s. Elle se déplace donc vers la droite mais elle a une accélération de -30 m/s². Elle va donc éventuellement s'arrêter.
À 4 s, la particule est momentanément arrêtée. Elle est à 112 m à droite du point fixe et son accélération est de -6 m/s². Elle va donc se mettre en mouvement vers la gauche.
À 5 s, l'accélération s'annule. La particule est alors à 110 m du point fixe et elle continue à se déplacer vers la gauche. Sa vitesse est alors de -3 m/s mais l'accélération change de sens à 5 s. La particule va donc diminuer de vitesse et éventuellement s'arrêter.
À 6 s, la vitesse est nulle, la particule est momentanément arrêtée à 108 m du point fixe. Son accélération est alors de 6 m/s². Elle va se mettre en mouvement vers la droite.

t	s	0	6	5	4
$s(t)$	m	0	108	110	112
$s'(t)$	m/s	72	0	-3	0
$s''(t)$	m/s ²	-30	6	0	-6

La graduation de l'axe indique la position de la particule.



EXERCICE 13.19

- a) $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$
- b) Le point d'abscisse $\pi/2$ est $(\pi/2; 0)$ et la pente de la tangente est :
 $f'(\pi/2) = e^{\pi/2} = -4,81$. L'équation de la tangente est $y = -e^{\pi/2}(x - \pi/2) = -4,81x + 7,56$.
- c) La tangente est horizontale lorsque $\cos x - \sin x = 0$. Ce qui donne $\cos x = \sin x$ et $\tan x = 1$.
On trouve alors $x \in \{ \pm \pi/4, \pm 5\pi/4; \dots \}$
- d) La fonction est croissante dans l'intervalle $]0; \pi/4[$, décroissante dans l'intervalle $]\pi/4; 5\pi/4[$, croissante dans l'intervalle $]\pi/4; 2\pi[$.

EXERCICE 13.20

- a) L'équation différentielle est :

$$\frac{dL}{dT} = \alpha L$$

En isolant les variables et en intégrant, on obtient :

$$\ln |L| = \alpha T + k$$

$$L = b_0 e^{\alpha T}$$

À 0°C, la tige mesure 240 cm, on a donc :

$$240 = b_0 e^0$$

d'où $b_0 = 240$ et puisqu'il s'agit d'une tige de cuivre, $\alpha = 0,000\ 017$ on obtient :

$$L(T) = 240e^{0,000\ 017T}$$

b) La longueur de cette tige à 50°C est

$$L(50) = 240e^{0,000\ 022 \times 50} = 240,204 \text{ cm.}$$

c) L'équation différentielle est :

$$\frac{dL}{dt} = \alpha L$$

et la différentielle est :

$$dL = \alpha L dT$$

La longueur de la tige de cuivre est $L = 3,8$ m. La variation de température est $\Delta T = 30^\circ\text{C}$.

$$dL|_{30} = 0,000\ 017 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \times 3,8 \text{ m} \times 30^\circ\text{C} = 0,00194 \text{ m} = 1,94 \times 10^{-3} \text{ m}$$

EXERCICE 13.21

a) $P'(t) = \frac{900t(2-t)}{e^t}$

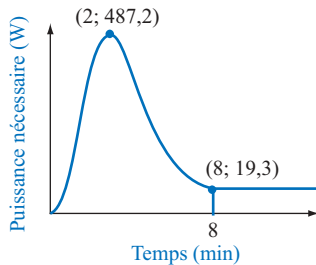
b) La dérivée s'annule à 2. Elle est positive dans l'intervalle $[0; 2[$, la fonction est donc croissante dans cet intervalle. Dans l'intervalle $]2; 8[$, la dérivée est négative et la fonction est décroissante.

c) La dérivée seconde est $P''(t) = \frac{900(t^2 - 4t + 2)}{e^t}$. Elle s'annule à $2 \pm \sqrt{2}$. La fonction a des points d'inflexion à $2 \pm \sqrt{2}$.

Dans l'intervalle $]0; 2 - \sqrt{2}[$, la fonction est concave vers le haut, $P''(t) > 0$. Dans l'intervalle $]2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}[$, la fonction est concave vers le bas, $P''(t) < 0$. Dans l'intervalle $]2 + \sqrt{2}; \infty[$, la fonction est concave vers le haut.

d) Le domaine de la fonction est \mathbf{R} mais le domaine de validité du modèle est l'intervalle $[0; 8]$.

e) La fonction a une asymptote horizontale à 0 W, mais cela se produit en dehors du domaine de validité du modèle. Après 8 minutes, la puissance requise est constante et égale à 19,3 W.



EXERCICE 13.22

a) D'après la loi de Hooke, la force requise pour maintenir un ressort étiré est directement proportionnelle à l'étirement, soit $f(x) = kx$. La force requise pour le maintenir étiré de 5 cm, ou 0,05 m, est de 60 N, on a donc :

$$0,05k = 60 \text{ et } k = 60/0,05 = 1\ 200 \text{ N/m}$$

La force est donc $f(x) = 1\ 200x$ et le travail effectué pour étirer le ressort de 5 cm est :

$$W = \int_0^{0,05} 1\ 200x \, dx = 1\ 200 \times \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0,05} = 600[0,05^2 - 0^2] = 1,5 \text{ J}$$

b) Le travail nécessaire pour étirer le ressort de 3 cm supplémentaires est alors :

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 1\ 200x \, dx = 600x^2 \Big|_{0,05}^{0,08} = 600[0,08^2 - 0,05^2] = 2,34 \text{ J}$$

c) Pour étirer le ressort de 0 à 10 cm, le travail est :

$$W = \int_0^{0,1} 1\ 200x \, dx = 600x^2 \Big|_0^{0,1} = 600[0,1^2 - 0^2] = 6 \text{ J}$$

d) Pour comprimer le ressort de 8 cm, le travail est :

$$W = \int_{-0,08}^0 1\,200x \, dx = 600x^2 \Big|_{-0,08}^0 = 600[0^2 - (-0,08)^2] = -3,84 \text{ J}$$

EXERCICE 13.23

a) L'équation différentielle est de la forme

$$\frac{dQ/dt}{Q} = a$$

La solution de cette équation est $\ln|Q| = at + k$. D'où $|Q| = Q_0 e^{at}$ et puisque la masse initiale est de 400 mg, on a $Q(t) = 400e^{at}$ où t est le temps en jours. La demi-vie est de 140 jours, on a donc :

$$Q(140) = 400e^{a \times 140} = 200$$

On a donc :

$$e^{a \times 140} = 0,5$$

et :

$$140a = \ln 0,5$$

d'où :

$$a = \frac{\ln 0,5}{140} = -0,00495$$

Le modèle est donc $Q(t) = 400e^{-0,00495t}$ mg.

b) 90 jours après la production de l'échantillon, la masse restante est :

$$Q(90) = 400e^{-0,00495 \times 90} = 256 \text{ mg.}$$

c) On a $Q(t) = 400 e^{-0,00495t}$ mg. On cherche t tel que $40 = 400 e^{-0,00495t}$. On a alors $0,1 = e^{-0,00495t}$ et $\ln(0,1) = -0,00495t$, d'où :

$$t = \frac{\ln 0,1}{-0,00495} = 465,2 \text{ jours}$$

On peut donc dire que dans 465 jours, la masse restante sera de 40 mg.

d) Le modèle pour une masse quelconque est $Q(t) = Q_0 e^{-0,00495t}$. En dérivant, on obtient :

$$\frac{dQ}{dt} = -0,00495Q_0 e^{-0,00495t}$$

et puisque $Q = Q_0 e^{-0,00495t}$, on a :

$$\frac{dQ}{dt} = -0,00495Q$$

La différentielle est alors :

$$dQ = -0,00495Q \, dt$$

La masse actuelle du premier échantillon est $Q = 120$ mg, $dt = 30$ jours et :

$$dQ = -0,00495 \times 120 \times 30 = -17,82 \text{ mg}$$

On peut donc estimer que la diminution de la masse du premier échantillon sera de 18 mg durant ces 30 jours.

La masse actuelle du deuxième échantillon est $Q = 450$ mg, $dt = 30$ jours et

$$dQ = -0,00495 \times 450 \times 30 = -66,825 \text{ mg}$$

On peut donc estimer que la diminution de la masse sera de 67 mg durant ces 30 jours.

EXERCICE 13.24

a) L'équation différentielle est :

$$\frac{d[\text{N}_2\text{O}_5]}{[\text{N}_2\text{O}_5]} = -0,0005 \, dt$$

On a donc :

$$\ln |[\text{N}_2\text{O}_5]| = -0,0005t + k$$

et $[\text{N}_2\text{O}_5] = b_0 e^{-0,0005t}$. En notant $[\text{N}_2\text{O}_5]_0$, la concentration initiale, le modèle est :

$$[\text{N}_2\text{O}_5] = [\text{N}_2\text{O}_5]_0 e^{-0,0005t} \text{ mol/L}$$

b) La concentration sera les 3/5 de la concentration initiale, lorsque

$$[\text{N}_2\text{O}_5]_0 e^{-0,0005t} = 0,6 [\text{N}_2\text{O}_5]_0$$

Ce qui donne :

$$e^{-0,0005t} = 0,6$$

et :

$$-0,0005t = \ln 0,6$$

d'où :

$$t = \frac{\ln 0,6}{-0,0005} = 1\,021,7 \text{ s}$$

On peut donc estimer le temps à 1 022 s ou environ 17 minutes.

EXERCICE 13.25

a) L'équation différentielle est : $\frac{dT}{dt} = a(T - 100)$ et $\frac{dT}{T - 100} = a dt$

On a donc :

$$\ln |T - 100| = at + k$$

et $T - 100 = \pm e^k e^{at} = b_0 e^{at}$. La différence initiale est $100 - 20 = -80^\circ\text{C}$, on a donc :

$$T - 100 = -80e^{at}$$

$$T(t) = 100 - 80e^{at} = 20(5 - 4e^{at}) \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) Après deux minutes, le thermomètre indique 54°C , on a donc :

$$100 - 80e^{2a} = 54$$

Ce qui donne :

$$-80e^{2a} = -46$$

et :

$$2a = \ln 0,575$$

d'où :

$$a = \frac{\ln 0,575}{2} = -0,277$$

Le modèle est donc :

$$T(t) = 100 - 80e^{-0,277t} \text{ } ^\circ\text{C}$$

c) On cherche le temps t pour lequel :

$$T(t) = 100 - 80e^{-0,277t} = 80^\circ\text{C}$$

ce qui donne :

$$-80e^{-0,277t} = -20$$

et :

$$e^{-0,277t} = 0,25$$

on a donc :

$$-0,277t = \ln 0,25$$

et :

$$t = \frac{\ln 0,25}{-0,277} = 5,005$$

Il faudra donc 5 minutes pour que le thermomètre indique 80°C .

d) L'équation différentielle est $\frac{dT}{dt} = -0,277(T - 0)$ et $\frac{dT}{T - 0} = -0,277t$

On a donc :

$$\ln |T| = -0,277t + k$$

et $T = \pm e^k e^{-0,277t} = b_0 e^{-0,277t}$. La différence initiale est 80°C , on a donc :

$$T(t) = 80e^{-0,277t} \text{ } ^\circ\text{C}$$

e) On cherche le temps t pour lequel

$$T(t) = 80e^{-0,277t} = 20^\circ\text{C}$$

ce qui donne :

$$e^{-0,277t} = 0,25$$

on a donc :

$$-0,277t = \ln 0,25$$

et :

$$t = \frac{\ln 0,25}{-0,277} = 5,005$$

Il faudra donc 5 minutes pour que le thermomètre indique 20°C .

EXERCICE 13.26

a) L'équation différentielle est : $\frac{dP/dt}{P} = -0,008 dt$ et $\frac{dP}{P} = -0,008 dt$

On a donc :

$$\ln |P| = -0,008t + k$$

et $P = \pm e^k e^{-0,008t} = b_0 e^{-0,008t}$. La pression initiale est de 8 MPa , on a donc :

$$P(t) = 8e^{-0,008t} \text{ MPa}$$

b) Le modèle donne :

$$P(24) = 8e^{-0,008 \times 24} = 6,6 \text{ MPa}$$

L'hypothèse est erronée puisque la lecture est de $7,2 \text{ MPa}$. On doit avoir :

$$P(24) = 8e^{24a} = 7,2 \text{ MPa}$$

d'où :

$$e^{24a} = 0,9$$

$$24a = \ln 0,9$$

et :

$$a = \frac{\ln 0,9}{24} = -0,00439$$

$$P(t) = 8e^{-0,00439t} \text{ MPa}$$

c) On cherche le temps t pour lequel :

$$P(t) = 8e^{-0,00439t} = 4 \text{ MPa}$$

ce qui donne :

$$e^{-0,00439t} = 0,5$$

on a donc :

$$-0,00439t = \ln 0,5$$

et :

$$t = \frac{\ln 0,5}{-0,00439} = 157,89$$

Il faudra donc 158 minutes pour que la pression soit de 4 MPa.

- d) On cherche le temps t pour lequel : $P(t) = 8e^{-0,00439t} = 1 \text{ MPa}$
 ce qui donne : $e^{-0,00439t} = 0,125$
 on a donc : $-0,00439t = \ln 0,125$
- et : $t = \frac{\ln 0,125}{-0,00439} = 473,68$

Il faudra donc 474 minutes pour que la pression soit de 1 MPa et que le système se mette en marche.

EXERCICE 13.27

- a) L'équation différentielle d'une réaction d'ordre 0 est de la forme $\frac{d[A]/dt}{[A]^0} = -a$. En intégrant, on obtient :

$[A] = -at + [A]_0$, où $[A]_0$ est la concentration initiale. La concentration aura diminué de moitié lorsque :

$$\frac{[A]_0}{2} = -at + [A]_0, \text{ et en isolant } t, \text{ on trouve } -\frac{[A]_0}{2} = -at \text{ et } t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2a}.$$

- b) L'équation différentielle d'une réaction d'ordre 1 est de la forme $\frac{d[A]/dt}{[A]^1} = -a$. En intégrant, on obtient :

$[A] = [A]_0 e^{-at}$, où $[A]_0$ est la concentration initiale. La concentration aura diminué de moitié lorsque :

$$[A]_0 e^{-at} = \frac{[A]_0}{2}, \text{ et en isolant } t, \text{ on trouve } e^{-at} = \frac{1}{2} \text{ et } t_{1/2} = \frac{\ln 0,5}{-a} = \frac{0,693}{a}.$$

- c) L'équation différentielle d'une réaction d'ordre 2 est de la forme $\frac{d[A]/dt}{[A]^2} = -a$. En intégrant, on obtient :

$\frac{1}{[A]} = at + \frac{1}{[A]_0}$, où $[A]_0$ est la concentration initiale. La concentration aura diminué de moitié lorsque :

$$[A] = \frac{1}{2}[A]_0. \text{ En substituant, on a } \frac{1}{\frac{1}{2}[A]_0} = at + \frac{1}{[A]_0}, \text{ d'où } \frac{2}{[A]_0} = at + \frac{1}{[A]_0} \text{ et, en isolant } t, \text{ on trouve } at = \frac{1}{[A]_0}$$

$$\text{et } t_{1/2} = \frac{1}{a[A]_0}.$$

EXERCICE 13.28

- a) L'équation différentielle est $\frac{dT}{dt} = a(T - 20)$ et $\frac{dT}{T - 20} = a dt$.

On a donc :

$$\ln |T - 20| = at + k$$

et $T - 20 = \pm e^k e^{at} = b_0 e^{at}$. La température initiale est 350°C , on a donc $350 - 20 = 330 = b_0$, et :

$$T(t) = 20 + 330e^{at}$$

Après quinze minutes, la température est de 270°C , on a donc :

$$20 + 330e^{a \times 15} = 270$$

Ce qui donne :

$$e^{15a} = \frac{250}{330}$$

et

$$a = \frac{\ln 0,758...}{15} = -0,0185088$$

Le modèle est donc :

$$T(t) = 20 + 330e^{-0,0185088t} \text{ } ^\circ\text{C} \text{ où } t \text{ est en minutes.}$$

- b) On cherche le temps t pour lequel :

$$T(t) = 20 + 330e^{-0,0185088t} = 35^\circ\text{C}$$

ce qui donne :

$$330e^{-0,0185088t} = 15^\circ\text{C}$$

et :

$$-0,0185088t = \ln 0,04545...$$

et :

$$t = \frac{\ln 0,04545...}{-0,0185088} = 167 \text{ min}$$

La durée du refroidissement doit être de 167 minutes ou 2 heures et 47 minutes.

EXERCICE 13.29

- a) Les courbes se rencontrent en $(-6; 11/5)$, $(0; 1)$ et en $(6; -1/5)$. Il est préférable d'intégrer selon la variable x sur les intervalles $[-6; 0]$ et $[0; 6]$.

Dans l'intervalle $[-6; 0]$, la différentielle est

$$dy = \left(\frac{x^2 - 8x + 4}{x^2 + 4} - \frac{5 - x}{5} \right) dx = \left(\frac{x}{5} - \frac{8x}{x^2 + 4} \right) dx \text{ et en intégrant :}$$

$$\begin{aligned} \int_{-6}^0 \left(\frac{x}{5} - \frac{8x}{x^2 + 4} \right) dx &= \left(\frac{x^2}{10} - 4 \ln|x^2 + 4| \right) \Big|_{-6}^0 \\ &= (0 - 4 \ln 4) - \left(\frac{36}{10} - 4 \ln 40 \right) = -4 \ln(4) - 3,6 + 4 \ln(40) \\ &= -4 \ln(4) - 3,6 + 4 \ln(4) + 4 \ln(10) \approx 5,61 \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[0; 6]$, la différentielle est $dy = \left(\frac{5 - x}{5} - \frac{x^2 - 8x + 4}{x^2 + 4} \right) dx = \left(\frac{8x}{x^2 + 4} - \frac{x}{5} \right) dx$ et en intégrant :

$$\begin{aligned} \int_0^6 \left(\frac{8x}{x^2 + 4} - \frac{x}{5} \right) dx &= \left(4 \ln|x^2 + 4| - \frac{x^2}{10} \right) \Big|_0^6 \\ &= \left(4 \ln 40 - \frac{36}{10} \right) - (4 \ln 4 - 0) = 4 \ln(40) - 3,6 - 4 \ln(4) \\ &= 4 \ln(4) + 4 \ln(10) - 3,6 - 4 \ln(4) \approx 5,61 \end{aligned}$$

On trouve donc 11,22 unités d'aire.

- b) Les courbes se rencontrent en $(-2; -1)$, $(0; 0)$ et en $(2; 1)$. Il est préférable d'intégrer selon la variable x sur les intervalles $[-2; 0]$ et $[0; 2]$.

Dans l'intervalle $[-2; 0]$, la différentielle est

$$dy = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{4x}{x^2 + 4} \right) dx \text{ et en intégrant :}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{8} - \frac{4x}{x^2 + 4} \right) dx &= \left(\frac{x^4}{32} - 2 \ln|x^2 + 4| \right) \Big|_{-2}^0 \\ &= \left(\frac{0}{32} - 2 \ln 4 \right) - \left(\frac{16}{32} - 2 \ln 8 \right) = -2 \ln(4) - 0,5 + 2 \ln(4) + 2 \ln(2) \\ &= 2 \ln(2) - 0,5 \approx 0,89 \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[0; 2]$, la différentielle est $dy = \left(\frac{4x}{x^2 + 4} - \frac{x^3}{8} \right) dx$ et en intégrant :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{4x}{x^2 + 4} - \frac{x^3}{8} \right) dx &= \left(2 \ln|x^2 + 4| - \frac{x^4}{32} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(2 \ln 8 - \frac{16}{32} \right) - \left(2 \ln 4 - \frac{0}{32} \right) = 2 \ln(4) + 2 \ln(2) - 0,5 - 2 \ln(4) \\ &= 2 \ln(2) - 0,5 \approx 0,89 \end{aligned}$$

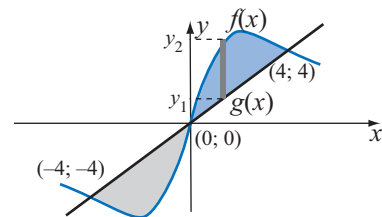
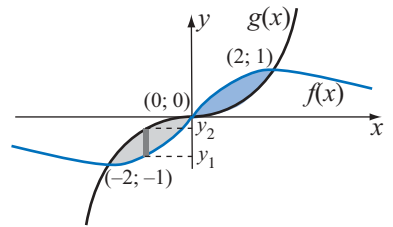
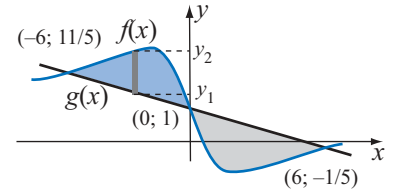
On trouve donc 1,78 unité d'aire.

- c) Les courbes se rencontrent en $(-4; -4)$, $(0; 0)$ et en $(4; 4)$. Il est préférable d'intégrer selon la variable x sur les intervalles $[-4; 0]$ et $[0; 4]$.

Dans l'intervalle $[-4; 0]$, la différentielle est

$$dy = \left(x - \frac{20x}{x^2 + 4} \right) dx \text{ et en intégrant :}$$

$$\begin{aligned} \int_{-4}^0 \left(x - \frac{20x}{x^2 + 4} \right) dx &= \left(\frac{x^2}{2} - 10 \ln|x^2 + 4| \right) \Big|_{-4}^0 \\ &= \left(\frac{0}{2} - 10 \ln 4 \right) - \left(\frac{16}{2} - 10 \ln 20 \right) = -10 \ln(4) - 8 + 10 \ln(4) + 10 \ln(5) \\ &= 10 \ln(5) - 8 \approx 8,09 \end{aligned}$$



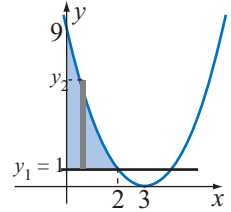
Dans l'intervalle $[0; 2]$, la différentielle est $dy = \left(\frac{20x}{x^2+4} - x\right)dx$ et en intégrant :

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\frac{20x}{x^2+4} - x\right) dx &= \left(10 \ln|x^2+4| - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^4 \\ &= \left(10 \ln|20| - \frac{16}{2}\right) - \left(10 \ln|4| - \frac{0}{2}\right) = 10 \ln(4) + 10 \ln(5) - 8 - 10 \ln(4) \\ &= 10 \ln(5) - 8 \approx 8,09 \end{aligned}$$

On trouve donc 16,18 unités d'aire.

EXERCICE 13.30

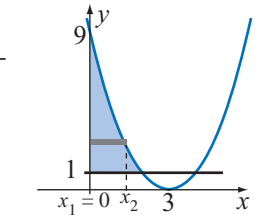
- a) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. En posant : $(x-3)^2 = 1$, on trouve $x^2 - 6x + 8 = 0$ et $(x-2)(x-4) = 0$. Les points de rencontre sont $(2; 1)$ et $(4; 1)$. On doit intégrer sur l'intervalle $[0; 2]$ et on a $y_2 = (x-3)^2$ et $y_1 = 1$. La différentielle d'aire est $dy = ((x-3)^2 - 1) dx = (x^2 - 6x + 8) dx$. En intégrant, on trouve :



$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 3 \times 4 + 8 \times 2\right) - (0) = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

On trouve donc 20/3 unités d'aire.

- b) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. En intégrant selon y , l'intervalle est $[1; 9]$. De plus, en isolant la variable x dans $y = (x-3)^2$, on obtient $\sqrt{y} = |x-3|$.

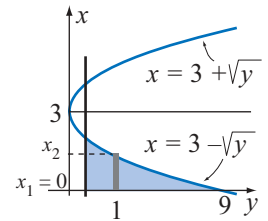


On doit retenir seulement la valeur négative et on a $\sqrt{y} = -(x-3)$ d'où :

$$x_2 = 3 - \sqrt{y} \text{ et } x_1 = 0.$$

La différentielle d'aire est $dx = (3 - \sqrt{y})dy$. En intégrant, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_1^9 (3 - \sqrt{y}) dy &= \left(3y - \frac{2y^{3/2}}{3}\right) \Big|_1^9 = \left(3y - \frac{2y\sqrt{y}}{3}\right) \Big|_1^9 \\ &= \left(3 \times 9 - \frac{2 \times 9 \times 3}{3}\right) - \left(3 \times 1 - \frac{2 \times 1 \times 1}{3}\right) = \frac{20}{3} \end{aligned}$$



On trouve donc 20/3 unités d'aire.

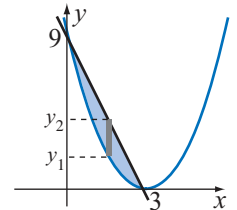
- c) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer sur l'intervalle $[0; 3]$ et on a $y_2 = 9 - 3x$ et $y_1 = (x-3)^2$.

La différentielle d'aire est $dy = ((9 - 3x) - (x-3)^2) dx = (3x - x^2) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^3 = \left(\frac{3 \times 3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - (0) = \frac{9}{2}$$

On trouve donc 9/2 unités d'aire.

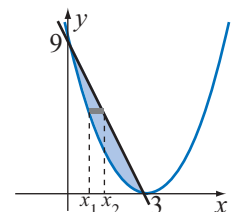
- d) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. En intégrant selon y , l'intervalle est $[0; 9]$. De plus, en isolant la variable x dans $y = (x-3)^2$, on obtient $\sqrt{y} = |x-3|$.



On doit retenir seulement la valeur négative et on a $\sqrt{y} = -(x-3)$ d'où :

$$x_2 = (9 - y)/3 \text{ et } x_1 = 3 - \sqrt{y}.$$

La différentielle d'aire est $dx = \left(\left(3 - \frac{y}{3}\right) - (3 - \sqrt{y})\right) dy = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3}\right) dy$. En intégrant, on trouve :



$$\int_0^9 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3} \right) dy = \left(\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{6} \right) \Big|_0^9 = \left(\frac{2y\sqrt{y}}{3} - \frac{y^2}{6} \right) \Big|_0^9$$

$$= \left(\frac{2 \times 9 \times 3}{3} - \frac{9^2}{6} \right) - (0) = 18 - \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$$

On trouve donc 9/2 unités d'aire.

- e) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On constate que l'on doit intégrer sur les sous-intervalles [0; 3] et [3; 6].

Dans l'intervalle [0; 3], on a $y_2 = 9$ et $y_1 = 9 - 3x$.

La différentielle d'aire est $dy = (9 - (9 - 3x)) dx = (3x) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_0^3 (3x) dx = \left(\frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \left(\frac{3 \times 3^2}{2} \right) - (0) = \frac{27}{2}$$

Dans l'intervalle [3; 6], on trouve 27/2 unités d'aire.

Dans l'intervalle [3; 6], on a $y_2 = 9$ et $y_1 = (x - 3)^2$.

La différentielle d'aire est $dy = (9 - (x - 3)^2) dx = (6x - x^2) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_3^6 (6x - x^2) dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_3^6 = \left(3 \times 6^2 - \frac{6^3}{3} \right) - \left(3 \times 3^2 - \frac{3^3}{3} \right) = 18$$

Dans l'intervalle [3; 6], on trouve 18 unités d'aire et au total, on a 63/2 unités d'aire.

- f) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. En intégrant selon y, l'intervalle est [0; 9]. De plus, en isolant la variable x dans $y = (x - 3)^2$, on obtient $\sqrt{y} = |x - 3|$.

On doit retenir seulement la valeur positive et on a $\sqrt{y} = (x - 3)$ d'où :

$$x_2 = 3 + \sqrt{y} \text{ et } x_1 = (9 - y)/3.$$

La différentielle d'aire est $dx = \left((3 + \sqrt{y}) - \left(3 - \frac{y}{3} \right) \right) dy = \left(\sqrt{y} + \frac{y}{3} \right) dy$. En intégrant, on trouve :

$$\int_0^9 \left(\sqrt{y} + \frac{y}{3} \right) dy = \left(\frac{2y^{3/2}}{3} + \frac{y^2}{6} \right) \Big|_0^9 = \left(\frac{2y\sqrt{y}}{3} + \frac{y^2}{6} \right) \Big|_0^9$$

$$= \left(\frac{2 \times 9 \times 3}{3} + \frac{9^2}{6} \right) - (0) = 18 + \frac{27}{2} = \frac{63}{2}$$

On trouve 63/2 unités d'aire.

- g) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On constate que l'on doit intégrer sur l'intervalle [-3; 3].

La différentielle d'aire est $dy = ((9 - x^2) - (3 - x^2/3)) dx = (6 - 2x^2/3) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_{-3}^3 \left(6 - \frac{2x^2}{3} \right) dx = \left(6x - \frac{2x^3}{9} \right) \Big|_{-3}^3 = \left(6 \times 3 - \frac{2 \times 3^3}{9} \right) - \left(6 \times (-3) - \frac{2 \times (-3)^3}{9} \right) = 24$$

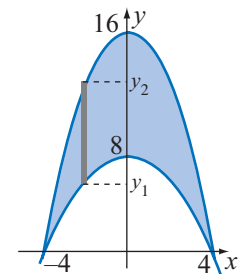
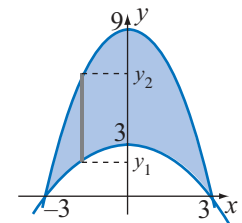
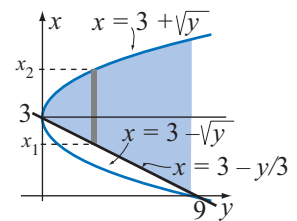
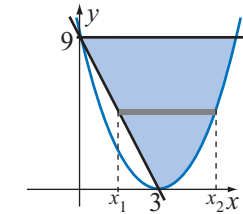
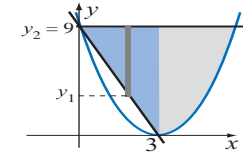
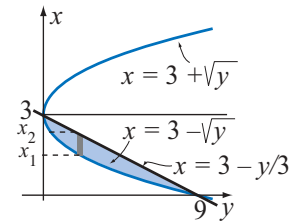
On trouve 24 unités d'aire.

- h) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On constate que l'on doit intégrer sur l'intervalle [-4; 4].

La différentielle d'aire est $dy = ((16 - x^2) - (8 - x^2/2)) dx = (8 - x^2/2) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_{-4}^4 \left(8 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(8x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-4}^4 = \left(8 \times 4 - \frac{4^3}{6} \right) - \left(8 \times (-4) - \frac{(-4)^3}{6} \right) = \frac{128}{3}$$

On trouve 128/3 unités d'aire.

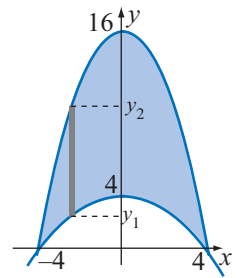


- i) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On constate que l'on doit intégrer sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La différentielle d'aire est $dy = ((16 - x^2) - (4 - x^2/4)) dx = (12 - 3x^2/4) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_{-4}^4 \left(12 - \frac{3x^2}{4}\right) dx = \left(12x - \frac{x^3}{4}\right) \Big|_{-4}^4 = \left(12 \times 4 - \frac{4^3}{4}\right) - \left(12 \times (-4) - \frac{(-4)^3}{4}\right) = 64$$

On trouve 64 unités d'aire.

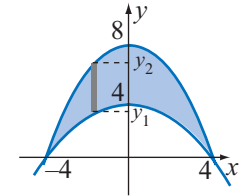


- j) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On constate que l'on doit intégrer sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La différentielle d'aire est $dy = ((8 - x^2/2) - (4 - x^2/4)) dx = (4 - x^2/4) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_{-4}^4 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_{-4}^4 = \left(4 \times 4 - \frac{4^3}{12}\right) - \left(4 \times (-4) - \frac{(-4)^3}{12}\right) = \frac{64}{3}$$

On trouve $64/3$ unités d'aire.

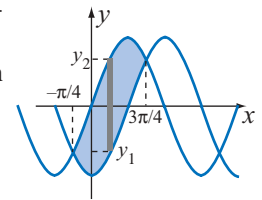


- k) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer sur l'intervalle $[-\pi/4; 3\pi/4]$.

La différentielle d'aire est $dy = ((\sin x) - (-\cos x)) dx = (\sin x + \cos x) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin x + \cos x) dx &= (-\cos x + \sin x) \Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= (-\cos(3\pi/4) + \sin(3\pi/4)) - (-\cos(-\pi/4) + \sin(-\pi/4)) \\ &= \left(-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

On trouve $2\sqrt{2}$ unités d'aire.

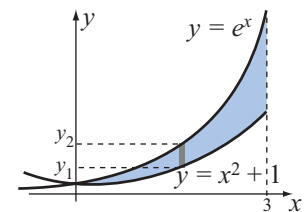


- l) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer sur l'intervalle $[0; 3]$.

La différentielle d'aire est $dy = (e^x - (x^2 + 1)) dx = (e^x - x^2 - 1) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^3 (e^x - x^2 - 1) dx &= \left(e^x - \frac{x^3}{3} - x\right) \Big|_0^3 \\ &= \left(e^3 - \frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(e^0 - \frac{0^3}{3} - 0\right) \\ &= e^3 - 13 \approx 7,086 \end{aligned}$$

On trouve $\approx 7,086$ unités d'aire.

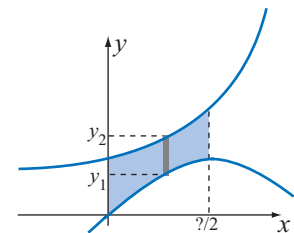


- m) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer sur l'intervalle $[0; \pi/2]$.

La différentielle d'aire est $dy = (e^x - \sin x) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (e^x - \sin x) dx &= (e^x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= (e^{\pi/2} + \cos(\pi/2)) - (e^0 + \cos 0) \\ &= e^{\pi/2} - 2 \approx 2,81 \end{aligned}$$

On trouve $\approx 2,81$ unités d'aire.

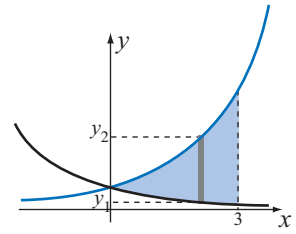


- n) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer sur l'intervalle $[0; 2]$.

La différentielle d'aire est $dy = (e^x - e^{-x}) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^0) = \frac{(e^2 - 1)^2}{e^2} \approx 5,52$$

On trouve $\approx 5,52$ unités d'aire.



- o) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer sur les intervalles $[0; 1]$ et $[1; 2]$.

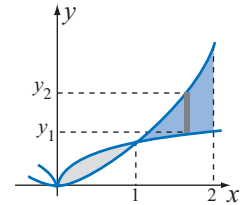
Dans l'intervalle $[1; 2]$, la différentielle d'aire est $dy = (\sqrt[3]{x^2} - x^2) dx = (x^{2/3} - x^2) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_0^1 (x^{2/3} - x^2) dx = \left(\frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{3 \times 1^{5/3}}{5} - \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{4}{15}$$

Dans l'intervalle $[1; 2]$, la différentielle d'aire est $dy = (x^2 - \sqrt[3]{x^2}) dx = (x^2 - x^{2/3}) dx$. En intégrant, on trouve :

$$\int_1^2 (x^2 - x^{2/3}) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^{5/3}}{5} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{3 \times 2^{5/3}}{5} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3 \times 1^{5/3}}{5} \right) = \frac{8}{3} - \frac{6\sqrt[3]{4}}{5} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{44 - 18\sqrt[3]{4}}{15} \approx 1,03$$

On trouve $\approx 1,30$ unités d'aire.



EXERCICE 13.31

- a) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer selon y sur les intervalles $[-6; -1]$ et $[-1; 6]$.

Dans l'intervalle $[-6; -1]$, on a $x_2 = \frac{y}{6} + 3$ et $x_1 = -4 - y$.

La différentielle est $dx = \left(\frac{7y}{6} + 7 \right) dy$ et l'intégrale donne :

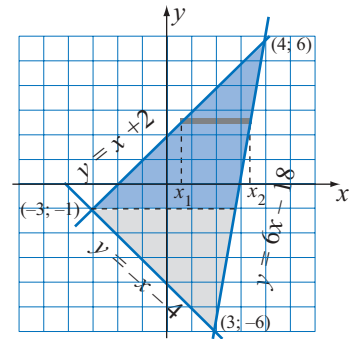
$$\int_{-6}^{-1} \left(\frac{7y}{6} + 7 \right) dy = \left(\frac{7y^2}{12} + 7y \right) \Big|_{-6}^{-1} = \left(\frac{7 \times (-1)^2}{12} + 7 \times (-1) \right) - \left(\frac{7 \times (-6)^2}{12} + 7 \times (-6) \right) = \frac{7}{12} - 7 - \frac{252}{12} + 42 = \frac{175}{12}$$

Dans l'intervalle $[-1; 6]$, on a $x_2 = \frac{y}{6} + 3$ et $x_1 = y - 2$.

La différentielle est $dx = \left(5 - \frac{5y}{6} \right) dy$ et l'intégrale donne :

$$\int_{-1}^6 \left(5 - \frac{5y}{6} \right) dy = \left(5y - \frac{5y^2}{12} \right) \Big|_{-1}^6 = \left(5 \times 6 - \frac{5 \times 6^2}{12} \right) - \left(5 \times (-1) - \frac{5 \times (-1)^2}{12} \right) = 30 - \frac{180}{12} + 5 + \frac{5}{12} = \frac{245}{12}$$

On trouve 35 unités d'aire.



- b) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer selon x sur les intervalles $[-5; -1]$ et $[-1; 4]$.

Dans l'intervalle $[-5; -1]$, on a $y_2 = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$ et $y_1 = \frac{-5x}{4} - \frac{21}{4}$.

La différentielle est $dy = \frac{19}{12}(x+5)dx$ et l'intégrale donne :

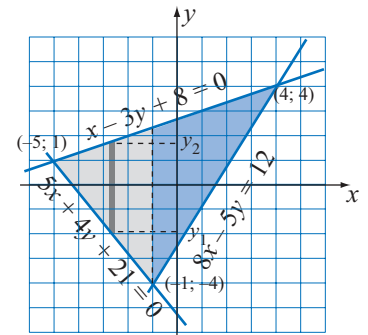
$$\begin{aligned} \frac{19}{12} \int_{-5}^{-1} (x+5) dx &= \frac{19}{12} \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-5}^{-1} = \frac{19}{12} \left[\left(\frac{1}{2} - 5 \right) - \left(\frac{25}{2} - 25 \right) \right] \\ &= \frac{19}{12} \left[\frac{1}{2} - 5 - \frac{25}{2} + 25 \right] = \frac{152}{12} \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[-1; 4]$, on a $y_2 = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$ et $y_1 = \frac{8x}{5} - \frac{12}{5}$.

La différentielle est $dy = \frac{19}{15}(4-x)dx$ et l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} \frac{19}{15} \int_{-1}^4 (4-x) dx &= \frac{19}{15} \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^4 = \frac{19}{15} \left[\left(16 - \frac{16}{2} \right) - \left(-4 - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{19}{15} \left[16 - 8 + 4 + \frac{1}{2} \right] = \frac{19}{15} \times \frac{25}{2} = \frac{95}{6} \end{aligned}$$

On trouve $57/2$ unités d'aire.



EXERCICE 13.32

- a) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer selon x sur les intervalles $[-4; 3]$ et $[3; 6]$.

Dans l'intervalle $[-4; 3]$, on a $y_2 = \frac{3x}{7} + \frac{26}{7}$ et $y_1 = -\frac{2x}{5} + \frac{2}{5}$.

La différentielle est $dy = \frac{29}{35}(x+4)dx$ et l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} \frac{29}{35} \int_{-4}^3 (x+4) dx &= \frac{29}{35} \left(\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-4}^3 = \frac{29}{35} \left[\left(\frac{9}{2} + 12 \right) - \left(\frac{16}{2} - 16 \right) \right] \\ &= \frac{29}{35} \left[\frac{9}{2} + 12 - \frac{16}{2} + 16 \right] = \frac{29}{35} \times \frac{49}{2} = \frac{1421}{70} = \frac{203}{10} \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[3; 6]$, on a $y_2 = -\frac{7x}{3} + 12$ et $y_1 = -\frac{2x}{5} + \frac{2}{5}$.

La différentielle est $dy = \frac{29}{15}(6-x)dx$ et l'intégrale donne :

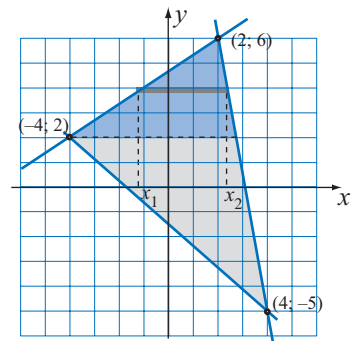
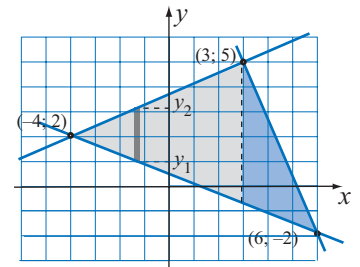
$$\begin{aligned} \frac{29}{15} \int_3^6 (6-x) dx &= \frac{29}{15} \left(6x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_3^6 = \frac{29}{15} \left[\left(36 - \frac{36}{2} \right) - \left(18 - \frac{9}{2} \right) \right] \\ &= \frac{29}{15} \left[36 - 18 - 18 + \frac{9}{2} \right] = \frac{29}{15} \times \frac{9}{2} = \frac{261}{30} = \frac{87}{10} \end{aligned}$$

On trouve 29 unités d'aire.

- b) L'aire cherchée est celle de la surface ombrée de la figure ci-contre. On doit intégrer selon y sur les intervalles $[-5; 2]$ et $[2; 6]$.

Dans l'intervalle $[-5; 2]$, on a $x_2 = \frac{-2y+34}{11}$ et $x_1 = \frac{-8y-12}{7}$.

La différentielle est $dx = \frac{74}{77}(y+5)dy$ et l'intégrale donne :



$$\begin{aligned}\frac{74}{77} \int_{-5}^2 (y+5) dy &= \frac{74}{77} \left(\frac{y^2}{2} + 5y \right) \Big|_{-5}^2 = \frac{74}{77} \left[\left(\frac{4}{2} + 10 \right) - \left(\frac{25}{2} - 25 \right) \right] \\ &= \frac{74}{77} \left[2 + 10 - \frac{25}{2} + 25 \right] = \frac{74}{77} \times \frac{49}{2} = \frac{259}{11}\end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[2; 6]$, on a $x_2 = \frac{-2y+34}{11}$ et $x_1 = \frac{3y-14}{2}$.

La différentielle est $dx = \frac{37}{22}(6-y)dy$ et l'intégrale donne :

$$\begin{aligned}\frac{37}{22} \int_2^6 (6-y) dy &= \frac{37}{22} \left(6y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_2^6 = \frac{37}{22} \left[\left(36 - \frac{36}{2} \right) - \left(12 - \frac{4}{2} \right) \right] \\ &= \frac{37}{22} [36 - 18 - 12 + 2] = \frac{37}{22} \times 8 = \frac{148}{11}\end{aligned}$$

On trouve 37 unités d'aire.