Auto-évaluation

Équations différentielles 12

Solutions

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

   b) $e^x dy = dx$

   c) $\dfrac{dy}{dx} = ay$

   d) $2ydy - 4xdx + 3dx = 0$

2. Un corps chauffé à 90° C est plongé dans un milieu à 30° C. La température T du corps, t minutes après avoir été plongé dans ce milieu satisfait l'équation différentielle :

   $$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{5}(T-30), \text{ où } T \geq 30°\text{C}.$$

   Déterminer la relation décrivant la température t minutes après avoir été plongé dans ce milieu.

1. *a*) En séparant les variables, on a $dy = \dfrac{dx}{x}$. Puis, en intégrant :

   $\int dy = \int \dfrac{dx}{x}$, d'où $y = \ln x + k$.

   b) En séparant les variables, on a $dy = \dfrac{dx}{e^x} = e^{-x}dx$. Puis, en intégrant :

   $\int dy = \int e^{-x}dx$, d'où $y = -e^{-x} + k$.

   c) En séparant les variables, on a $\dfrac{dy}{y} = adx$. Puis, en intégrant :

   $\int \dfrac{dy}{y} = \int a\, dx$, d'où $\ln|y| = ax + k$.

   On a donc :

   $|y| = e^{ax+k}$ et $y = \pm e^{ax+k} = \pm e^k e^{ax}$.

   d) En séparant les variables, on a $2ydy = (4x - 3)$. Puis, en intégrant :

   $\int 2y\,dy = \int (4x-3)\, dx$, d'où $y^2 = 2x^2 - 3x + k$.

2. En séparant les variables, on a $\dfrac{dT}{(T-30)} = -\dfrac{1}{5}dt$. Puis, en intégrant :

   $\int \dfrac{dT}{(T-30)} = -\dfrac{1}{5}\int dt$, d'où $\ln|T-30| = \dfrac{-t}{5} + k$.

   On a donc : $T - 30 = \pm e^k e^{-t/5} = T_0 e^{-t/5}$ et :
   $T(t) = T_0 e^{-t/5} + 30$. Puisqu'au temps $t = 0$, la température est de 90°C, on obtient en substituant :
   $T(0) = T_0 e^0 + 30 = 90$ qui donne $T = 60$°C.
   Le modèle cherché est donc :
   $T(t) = 60e^{-t/5} + 30$.

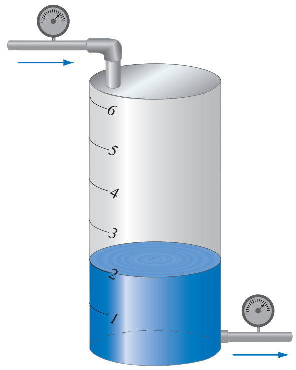
3. Un moteur dont la vitesse de rotation normale est de 500 tours par minute est muni d'un dispositif d'urgence pour arrêter le moteur en cas d'urgence. Lorsque le dispositif se déclenche, le taux de variation de la vitesse de rotation du moteur est proportionnel au carré de cette vitesse, la constante de proportionnalité est –0,04 et le temps est mesuré en minutes. Déterminer le modèle décrivant la vitesse de rotation du moteur en fonction du temps écoulé à partir du déclenchement du dispositif d'urgence.

4. Le Conseil de la municipalité qui vous emploie a décidé d'arrêter la fluoration de l'eau potable. Le réservoir contient actuellement 2 400 000 m^3 d'eau fluorée, la quantité de fluor est de 1 200 kg. La consommation journalière est de 60 000 m^3. Cette quantité est remplacée à chaque jour par un même volume d'eau non fluorée et la distribution du fluor dans l'eau est uniforme en tout temps.
   a) Déterminer le modèle décrivant la quantité de fluor dans l'eau en fonction du temps à partir de l'arrêt de la fluoration.
   b) Combien de temps après l'arrêt de la fluoration la quantité de fluor dans le réservoir aura-t-elle diminué de moitié?

3. Puisque le taux de variation de la vitesse est directement proportionnel au carré de cette vitesse, on a :
$$\frac{d\omega}{dt} = -0{,}04\omega^2.$$
En séparant les variables, on obtient :
$$\frac{d\omega}{\omega^2} = -0{,}04\,dt.$$
En appliquant l'opérateur d'intégration :
$$\int\frac{d\omega}{\omega^2} = -0{,}04\int dt,\text{ d'où } \frac{-1}{\omega} = -0{,}04t + k.$$
À $t = 0$, on a $\omega = 500$ t/min et, en substituant, on obtient :
$$\frac{-1}{500} = -0{,}04\times 0 + k,\text{ d'où } k = \frac{-1}{500}.$$
On a donc :
$$\frac{-1}{\omega} = -0{,}04t - \frac{1}{500}\text{ et } \frac{1}{\omega} = \frac{20t+1}{500}.$$
En isolant la variable dépendante, on obtient le modèle :
$$\omega(t) = \frac{600}{20t+1}\ \text{t/min}.$$

4. *a*) La concentration de fluor et $\dfrac{Q}{2\ 400\ 000}\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
et le débit d'eau fluorée est –40 000 m^3/jour. Le taux de variation journalier de la quantité de fluor est :
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{2\ 400\ 000}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times -60000\frac{\text{m}^3}{\text{jour}}$$
$$= -0{,}025Q\ \text{kg/jour}.$$
L'équation différentielle est donc :
$$\frac{dQ}{dt} = -0{,}025Q\ \text{kg/jour}.$$
En séparant les variables et en intégrant, on a :
$$\int\frac{dQ}{Q} = -0{,}025\int dt,\text{ d'où } \ln|Q| = -0{,}025t + k.$$
Cela donne $Q = \pm e^k e^{-0{,}025t} = b_0 e^{-0{,}025t}$.
Puisque la quantité initiale est de 1 200 kg, on a $b_0 = 1\ 200$ et la fonction cherchée est :
$Q(t) = 1\ 200e^{-0{,}025t}$ kg.
b) La quantité aura diminué de moitié lorsque :
$Q(t) = 1\ 200e^{-0{,}025t} = 600$, d'où $e^{-0{,}025t} = 0{,}5$.
$$t = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}025} \approx 27{,}73.$$
Il faudra 28 jours avant que la quantité de fluor dans le réservoir ait diminué de moitié.

5. Un réservoir d'eau contient 200 litres et on modifie la directive du système de contrôle pour que le volume d'eau atteigne 500 litres. Le système de contrôle est conçu pour que le taux de variation du volume de liquide soit toujours la moitié de la différence entre le volume demandé et le volume mesuré. Déterminer le modèle décrivant le volume de liquide en fonction du temps à partir de la modification de la directive.



5. L'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}(500 - V), \text{ ou } \frac{dV}{500 - V} = 0{,}5dt.$$

En posant $u = 500 - V$, on a $du = -dV$ et :

$$\frac{du}{u} = -0{,}5dt, \text{ et } \int \frac{du}{u} = -0{,}5\int dt.$$

Cela donne :

$$\ln|u| = -0{,}5t + k \text{ et } u = \pm e^{k}e^{-0{,}5t} = b_0 e^{-0{,}5t}.$$

D'où :

$500 - V = b_0e^{-0{,}5t}$ et $V = 500 - b_0e^{-0{,}5t}$.

La solution particulière est obtenue à partir de la valeur initiale de 200 L au temps 0, soit :

$500 - b_0 = 200$, d'où $b_0 = 300$.

Le modèle cherché est :

$V(t) = 500 - 300e^{-0{,}5t}$ L.