Théorème fondamental

Auto-évaluation 11

Solutions

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. *a*) Expliquer pourquoi le théorème de Lagrange s'applique pour la fonction :

$$f(x)=\frac{4}{x-7}$$

dans l'intervalle [–1; 3].

b) Que prévoit le théorème de Lagrange dans ce cas?

c) Trouver la valeur prévue par le théorème de Lagrange.

2. Pour effectuer l'intégrale définie :

$$\int_1^3 (2x-1)e^{x^2-x}dx$$

il faut faire un changement de variable en posant $u = x^2 - x$.

a) Quelles sont alors les nouvelles bornes d'intégration pour la variable u?

b) Écrire l'intégrale en termes de u et effectuer en appliquant le théorème fondamental.

1. *a*) Le théorème de Lagrange s'applique car la fonction est continue et dérivable sur l'intervalle [–1; 3].

b) Le théorème prévoit que dans l'intervalle [–1; 3], il y a un point $(a; f(a))$ tel que la pente de la tangente en ce point est égale à la pente de la sécante passant par les points :
$(-1; f(-1)) = (-1; -1/2)$ et $(3; f(3)) = (3; -1)$.

c) La dérivée de f est $f'(x)=\dfrac{-4}{(x-7)^2}$.

La pente de la sécante est :
$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{-1-(-1/2)}{4}=\frac{-1}{8}.$$

On cherche donc le point d'abscisse a tel que :
$$f'(a)=\frac{-4}{(a-7)^2}=\frac{-1}{8}.$$

D'où l'on tire : $(a-7)^2 = 32$ et $a-7=\pm 4\sqrt{2}$.

On trouve donc $a_1=7-4\sqrt{2}$ et $a_2=7+4\sqrt{2}$.

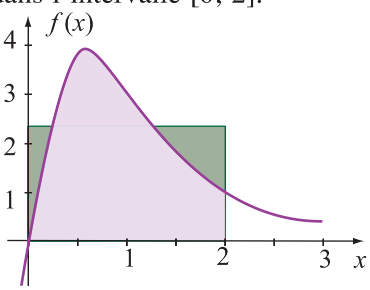
La première de ces valeurs est comprise dans l'intervalle [–1; 3], c'est la valeur prédite par le théorème de Lagrange.

2. *a*) Lorsque $x = 1$, on a $u = 1^2 - 1 = 0$.
Lorsque $x = 3$, on a $u = 3^2 - 3 = 6$.
Les nouvelles bornes d'intégration sont donc 0 et 6.

b) $\displaystyle\int_1^3 (2x-1)e^{x^2-x}dx=\int_0^6 e^u du = e^u \Big]_0^6 = e^6 - 1.$

3. *a)* Qu'est-ce que l'ordonnée moyenne d'une fonction positive sur un intervalle [*c*; *d*]? Comment l'obtient-on?

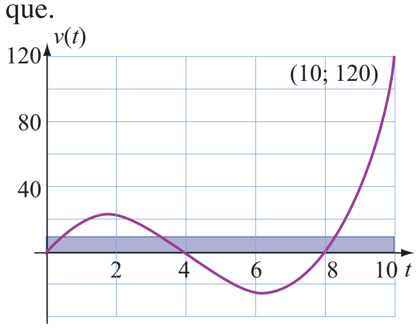
   b) Calculer l'ordonnée moyenne de la fonction :
$$f(x)=\frac{12x}{(x^2+1)^2}$$
   dans l'intervalle [0; 2].



4. On étudie, durant dix secondes, le comportement d'une particule qui subit une excitation électrique. La particule est initialement au repos et sa position initiale est le point de référence de cette étude. Sa vitesse durant l'intervalle de temps [0; 10] est décrite par :
   $v(t) = t^3 - 12t^2 + 32t$ m/s.

   a) Calculer la variation de position dans l'intervalle [0; 10].

   b) Représenter graphiquement la fonction vitesse durant cet intervalle de temps. Calculer la vitesse moyenne et représenter celle-ci sur le graphique.



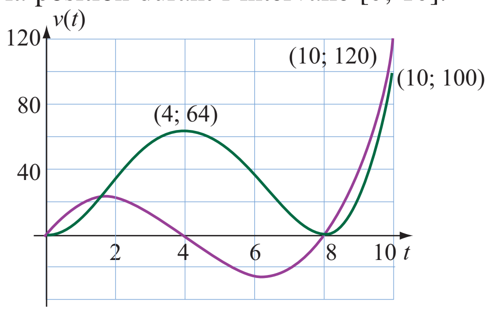
3. *a)* C'est la hauteur du rectangle de base $d - c$ dont l'aire est égale à celle sous la courbe de *f* dans l'intervalle [*c*; *d*]. Pour trouver l'ordonnée moyenne, on calcule l'aire sous la courbe en appliquant le théorème fondamental et on divise cette aire par la largeur de l'intervalle :
$$y_{moy}=\frac{1}{d-c}\int_c^d f(x)\,dx=\frac{F(d)-F(c)}{d-c}.$$

   b) L'aire sous la courbe est donnée par :
$$A=\int_0^2\frac{12x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$
   En posant $u = x^2 + 1$, on a $du = 2x\,dx$. De plus, lorsque $x = 0$, $u = 1$ et lorsque $x = 2$, $u = 5$. On a donc :
$$A=\int_0^2\frac{12x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int_1^5\frac{6}{u^2}\,du$$
$$=\left.\frac{-6}{u}\right]_1^5=\frac{-6}{5}-\left(\frac{-6}{1}\right)=\frac{24}{5}.$$
   L'aire sous la courbe est de 24/5 et la largeur de l'intervalle est $d - c = 2 - 0 = 2$. L'ordonnée moyenne est obtenue en divisant l'aire sous la courbe par la largeur de l'intervalle. On trouve donc $y_{moy} = 12/5$.

4. *a)* Pour calculer la variation de position durant l'intervalle [0; 10], il faut effectuer l'intégrale définie de la fonction vitesse sur cet intervalle. On obtient :
$$\Delta s=\int_0^{10}(t^3-8t^2+12t)\,dt=\left.\left(\frac{t^4}{4}-4t^3+16t^2\right)\right]_0^{10}$$
$$=\left(\frac{10^4}{4}-4\times10^3+16\times10^2\right)$$
$$=100\left(\frac{100}{4}-4\times10+16\right)$$
$$=100(25-40+16)=100.$$

   b) En factorisant $v(t)$, on obtient :
   $v(t) = t(t - 4)(t - 8)$.
   La vitesse est nulle à l'instant initial, $t = 0$ ainsi qu'à $t = 4$ et $t = 8$.
   L'accélération est $a(t) = 3t^2 - 24t + 32$.
   Elle s'annule à :
$$t=\frac{12-4\sqrt{3}}{3}\approx1{,}69 \text{ et } t=\frac{12+4\sqrt{3}}{3}\approx6{,}31.$$
   $a'(t) = 6t - 24$, elle s'annule à $t = 4$ s.
   Le test de la dérivée seconde permet de conclure

c) Représenter graphiquement la fonction décrivant la position durant l'intervalle [0; 10].



d) Calculer la distance totale parcourue par la particule durant cet intervalle de temps.

e) Calculer la vitesse moyenne réelle de la particule durant ces 10 secondes.

que la vitesse a un maximum relatif à $t \approx 1{,}69$ et un minimum relatif à $t \approx 6{,}31$ s. En calculant les images, on obtient (1,79; 24,63), (6,31; –24,63) et (0; 100).

La variation de position durant l'intervalle [0; 10] est de 100 m et l'intervalle est de 10 s. La vitesse moyenne est donc de 10 m/s. En réalité, cette vitesse est celle qui donnerait une variation de position de 100 m si la particule ne changeait pas de direction.

d) Puisque la fonction vitesse s'annule à $t = 4$ et à $t = 8$, elle change de direction en ces instants. Pour connaître la distance totale parcourue, il faut intégrer sur l'intervalle [0; 4], sur l'intervalle [4; 8] et sur l'intervalle [8; 10] pour déterminer la variation de position sur chacun de ces intervalle et en faire la somme. On obtient :

$$\Delta s = \int_0^4 (t^3 - 8t^2 + 12t)\,dt = \left(\frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2\right)\Bigg]_0^4$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - 4\times 4^3 + 16\times 4^2\right)$$

$$= 4^2\left(\frac{4^2}{4} - 4\times 4 + 16\right) = 64.$$

$$\Delta s = \int_4^8 (t^3 - 8t^2 + 12t)\,dt = \left(\frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2\right)\Bigg]_4^8$$

$$= \left(\frac{8^4}{4} - 4\times 8^3 + 16\times 8^2\right) - (64)$$

$$= 8^2\left(\frac{8^2}{4} - 4\times 8 + 16\right) - (64) = 0 - 64 = -64.$$

$$\Delta s = \int_8^{10} (t^3 - 8t^2 + 12t)\,dt = \left(\frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2\right)\Bigg]_8^{10}$$

$$= 100 - 0 = 100.$$

Durant l'intervalle [0; 4], la particule s'éloigne du point de référence et parcourt 64 m.

Durant l'intervalle [4; 8], la particule s'approche du point de référence et parcourt 64 m.

Durant l'intervalle [8; 10], la particule s'éloigne du point de référence et parcourt 100 m.

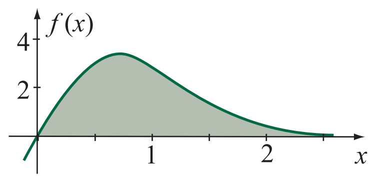
La distance totale parcourue par la particule est de 228 m.

e) La vitesse moyenne réelle est de 22,8 m/s.

5. *a*) Comment doit-on procéder pour calculer une intégrale impropre sur un intervalle $[c; \infty[$?

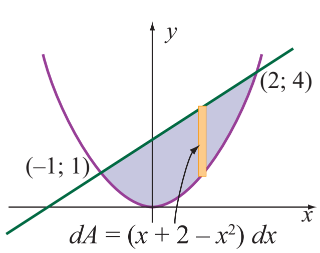
b) Qu'est-ce qu'un intégrale impropre convergente? Divergente?

c) Évaluer l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = 8xe^{-x^2}$ sur l'intervalle $[0; \infty[$.



d) Peut-on parler d'ordonnée moyenne dans la partie *c*?

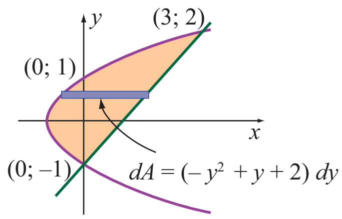
7. Calculer l'aire entre les deux courbes.
a) $y = x^2$ et $y = x + 2$.



5. *a*) On évalue d'abord l'intégrale sur un intervalle $[c\,;\,d]$, où d est un paramètre puis on évalue la limite de l'intégrale obtenue lorsque d tend vers l'infini.
b) Une intégrale impropre est convergente si la limite lorsque d tend vers l'infini est un nombre réel. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre est divergente.
c) Effectuons d'abord l'intégrale définie sur l'intervalle $[0; d]$.
En posant $u = -x^2$, d'où $du = -2x\,dx$, on a :
$$\int 8xe^{-x^2}\,dx = \int -4e^u\,du = -4e^u + k$$
$$= -4e^{-x^2} + k.$$
Par conséquent :
$$\int_0^\infty 8xe^{-x^2}\,dx = \lim_{d\to\infty}\int_0^\infty 8xe^{-x^2}\,dx = \lim_{d\to\infty}\left(-4e^{-x^2}\right)\Big]_0^d$$
$$= \lim_{d\to\infty}\left[\left(-4e^{-d^2}\right)-\left(-4e^0\right)\right]$$
$$= \lim_{d\to\infty}\left[4-\frac{4}{e^{d^2}}\right] = 4-0 = 4.$$
L'aire sous la courbe dans l'intervalle $[0; \infty[$ est donc égale à quatre unités carrées.
d) Dans ce cas, on ne peut parler d'ordonnée moyenne. La division de l'aire par la largeur de l'intervalle est une division par l'infini qui donne toujours 0.

7. *a*) Déterminons d'abord les points de rencontre par comparaison des ordonnées. Cela donne :
$x^2 = x + 2$, d'où $x^2 - x - 2 = 0$ et :
$(x + 1)(x - 2) = 0$ qui donne $x = -1$ et $x = 2$.
Les points de rencontre sont : $(-1; 1)$ et $(2; 4)$ et les bornes d'intégration sont -1 et 2.
La différentielle d'aire est :
$dA = (x + 2 - x^2)\,dx$ et :
$$A = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-1}^{2}$$
$$= \left(\frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2-\frac{-1}{3}\right) = \frac{9}{2}.$$
L'aire entre les courbes est de 9/2 unités carrées.

b) $x = y^2 - 1$ et $x = y + 1$.



b) Pour calculer cette aire, il faut intégrer selon y. Déterminons d'abord les points de rencontre par comparaison des abscisses. Cela donne :
$y^2 - 1 = y + 1$ et $y^2 - y - 2 = 0$ et :
$(y + 1)(y - 2) = 0$ qui donne $y = -1$ et $y = 2$.
En substituant dans $x = y + 1$, on trouve que les points de rencontre sont : (–0; 1) et (3; 2) et les bornes d'intégration sont –1 et 2.
La différentielle d'aire est :
$dA = [(y + 1) - (y^2 - 1)) \, dy = (-y^2 + y + 2) \, dy$ et :

$$A = \int_{-1}^{2} (-y^2 + y + 2) \, dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y \right) \Bigg]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{9}{2}.$$

L'aire entre les courbes est de 9/2 unités carrées.