Auto-évaluation

10 Intégrale indéfinie

Solutions

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. Indiquer en cochant dans la case appropriée si la fonction est intégrable ou non par un changement de variable. Indiquer, le cas échéant, le changement à effectuer dans la case $u(x)$.

		NON	OUI	$u(x)$
$a)\int \frac{x^2}{x^3-2}\,dx$	$A)\ u=3+x^2$	☐	✓	*G*
$b)\int \frac{dx}{x(4+\ln x)}$	$B)\ u=x^3+3x$	☐	✓	*I*
$c)\int x\sqrt{3+x^2}\,dx$	$C)\ u=-x^2$	☐	✓	*A*
$d)\int x\cos(x^2-5)\,dx$	$D)\ u=\ln x$	☐	✓	*L*
$e)\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx$	$E)\ u=\sin x$	☐	✓	*B*
$f)\int xe^{-x^2}\,dx$	$F)\ u=\ln(\tan x)$	☐	✓	*C*
$g)\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$	$G)\ u=x^3-2$	☐	✓	*D*
$h)\int \sin x\cos^2 x\,dx$	$H)\ u=\tan x$	☐	✓	*N*
$i)\int (x^3-2x)\sqrt{x}\,dx$	$I)\ u=4+\ln x$	✓	☐	☐
$j\int e^{\sin x}\cos x\,dx$	$J)\ u=1+\sqrt{x}$	☐	✓	*E*
$k)\int \frac{\sec^2 x\ln(\tan x)}{\tan x}\,dx$	$K)\ u=\sqrt{x}$	☐	✓	*F*
$l)\int \cot^2 x\,dx$	$L)\ u=x^2-5$	✓	☐	☐
$m)\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$	$M)\ u=e^{\sin x}$	☐	✓	*J*
$n)\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$	$N)\ u=\cos x$	✓	☐	☐
$o)\int \frac{\ln x^3}{x}\,dx$	$O)\ u=\sin x$	☐	✓	*D*

2. Intégrer les fonctions suivantes en indiquant la procédure appropriée et en l'appliquant.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}dx$

Pour effectuer l'intégrale, il faut transformer algébriquement l'intégrande par division des polynômes.

b) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-2\sqrt{x})dx$

Pour effectuer l'intégrale, il faut transformer algébriquement l'intégrande par multiplication des facteurs et en appliquant les propriétés des exposants.

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sec x}\ dx$

Pour effectuer l'intégrale, il faut simplifier l'intégrande en utilisant l'identité trigonométrique : $\sec x = 1/\cos x$.

Pour compléter l'intégration, il faut effectuer un changement de variable en posant $u = \cos x$. On a alors $du = \sin x\, dx$. On obtient alors un intégrande de la forme u^n.

d) $\displaystyle\int (x+2)e^{x^2+4x}\ dx$

Pour effectuer l'intégrale, il faut effectuer un changement de variable en posant $u = x^2 + 4x$. On a alors $du = (2x + 4)\ dx$. On obtient alors un intégrande de la forme e^u.

e) $\displaystyle\int \frac{\ln x^2}{x}\ dx$

En appliquant une propriété des logarithmes, on a $\ln x^2 = 2 \ln x$. On procède ensuit à un changement de variable en posant $u = \ln x$. On a alors :

$du = \dfrac{1}{x}dx.$

2. a)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}dx &= \int \frac{1}{x}-2\frac{1}{x^2}+3\frac{1}{x^3}dx\\ &= \int x^{-1}-2x^{-2}+3x^{-3}dx\\ &= \ln|x|-2\frac{x^{-1}}{-1}+3\frac{x^{-2}}{-2}+k\\ &= \ln|x|+\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}+k.\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(x-2\sqrt{x})dx &= \int (x^{3/2}-2x)dx\\ &= \frac{x^{5/2}}{5/2}-x^2+k\\ &= \frac{2x^2\sqrt{x}}{5}-x^2+k\\ &= \frac{x^2}{5}(2\sqrt{x}-5)+k.\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sec x}\ dx &= \int \frac{\sin x \cos x}{1/\cos x}\ dx\\ &= \int \sin x \cos^2 x\ dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sec x}\ dx &= \int \sin x\cos^2 x\ dx\\ &= \int u^2\,du = \frac{u^3}{3}+k\\ &= \frac{\cos^3 x}{3}+k.\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\int (x+2)e^{x^2+4x}\ dx &= \frac{1}{2}\int e^u\ du = \frac{1}{2}e^u+k\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2+4x}+k.\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x^2}{x}\ dx &= 2\int\frac{\ln x}{x}\ dx = 2\int u\ du\\ &= 2\frac{u^2}{2}+k = u^2+k = (\ln x)^2+k.\end{aligned}$$

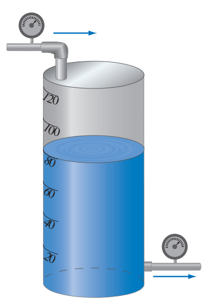
f) $\int \sin^2 \pi t \; dt$

Pour effectuer cette intégrale, il faut d'abord modifier l'intégrande à l'aide de l'identité trigonométrique :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Pour effectuer la deuxième intégrale, on doit faire un changement de variable en posant : $u = 2\pi t$, d'où $du = 2\pi dt$ et $dt = du/2\pi$.

3. Un système de refroidissement comporte un réservoir d'eau doté d'un système de pompage qui se met en marche lorsque le niveau atteint la marque des 20 L. On estime que le débit du système de pompage t minutes après la mise en marche est décrit par :



$$D(t) = \frac{320t}{t^2+2} \text{ L/min.}$$

a) Trouver la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.

b) Quelle est la valeur stable de la fonction décrivant le volume dans le réservoir?

f)
$$\begin{aligned}\int \sin^2 \pi t \; dt &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\pi t)\; dt \\ &= \frac{1}{2}\int 1 \; dt - \frac{1}{2}\int \cos 2\pi t \; dt \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2\pi t \; dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \cos 2\pi t \; dt &= \frac{1}{2}\int \cos u \frac{du}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\int \cos u \; du \\ &= \frac{1}{4\pi}(-\sin u) + k \\ &= \frac{-1}{4\pi}\sin 2\pi t + k.\end{aligned}$$

D'où :

$$\int \sin^2 \pi t \; dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi t + k.$$

3. *a*) $V(t) = \int D(t)\; dt = \int \frac{320t}{t^2+2}\; dt$ L.

Pour effectuer cette intégrale, il faut procéder par changement de variable en posant : $u = t^2 + 3$, d'où $du = 2t\; dt$. En substituant :

$$\begin{aligned}V(t) &= \int \frac{320t}{t^2+2}\; dt = \int \frac{160}{u}\; du \\ &= \frac{-160}{u^2} + k = \frac{-160}{t^2+2} + k.\end{aligned}$$

Puisque le système se met en marche lorsqu'il reste 20 L, on a $V(0) = 20$ et :

$$V(0) = \frac{-160}{0^2+2} + k = 40, \text{ d'où } k = 120 \text{ L.}$$

La fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir est donc :

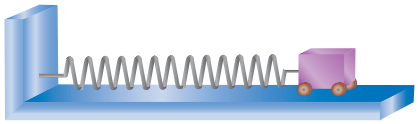
$$V(t) = 120 - \frac{160}{t^2+2} \text{ L.}$$

La valeur stable est la limite à l'infini, soit :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} V(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(120 - \frac{160}{t^2+2}\right) \\ &= 120 - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{160}{t^2+2}\right) = 120 \text{ L.}\end{aligned}$$

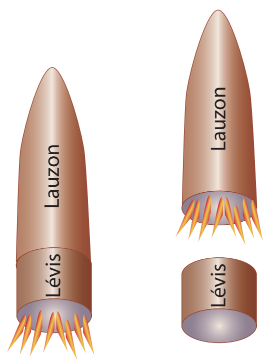
4. Un chariot peut se déplacer sans friction sous l'action d'un ressort. L'accélération communiquée au chariot par le ressort est donnée par :

$$a(t) = -4\pi^2 \cos \pi t \text{ cm/s}^2.$$



a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse du chariot au temps t si celle-ci est nulle au temps 0.
b) Déterminer la fonction décrivant la position du chariot au temps t si celle-ci est de 4 cm au temps 0.

5. Les étudiants de sciences du CEGEP lancent une fusée constituée de deux parties. Il est prévu que la partie inférieure se détachera à 800 m d'altitude et la fusée aura alors une vitesse 196 m/s.



a) En considérant que l'accélération due à l'attraction terrestre est de –9,8 m/s^2, déterminer la fonction décrivant la hauteur de la partie inférieure t secondes après la séparation.

b) Déterminer la hauteur maximale atteinte par la partie inférieure.

4. *a*) La vitesse est décrite par une primitive de l'accélération.

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int -4\pi^2 \cos \pi t\, dt$$

En posant $u = \pi t$, on a $du = \pi dt$ et :

$$v(t) = -4\pi \int \cos u\, du = -4\pi \sin u + k$$
$$= -4\pi \sin \pi t + k.$$

De plus, $v(0) = -4\pi \sin 0 + k = 0 + k = 0$ qui donne $k = 0$. On trouve donc :
$v(t) = -4\pi \sin \pi t$ cm/s.

b) La fonction décrivant la position est une primitive de la fonction décrivant la vitesse. On a donc :

$$s(t) = \int v(t)\, dt = -4\pi \int \sin \pi t\, dt.$$

En posant $u = \pi t$, on a $du = \pi dt$ et :

$$s(t) = \int v(t)\, dt = -4 \int \sin u\, du$$
$$= 4 \cos u + k = 4 \cos \pi t + k.$$

De plus, $s(0) = 4 \cos 0 + k = 4 + k = 4$ qui donne $k = 0$. On trouve donc :

$$s(t) = 4 \cos \pi t \text{ cm}.$$

5. *a*) La vitesse de la partie inférieure lorsqu'elle se détache est :
$v(t) = 196 - 9{,}8t$ m/s.
La fonction décrivant la position est une primitive de la vitesse.

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int (196 - 9{,}8t)\, dt$$
$$= 196t - 4{,}9t^2 + k \text{ m}.$$

Au moment où la partie inférieure se détache, elle est à une altitude de 800 m, on a donc :
$s(0) = 196\times0 - 4{,}9\times0^2 + k = 800$, d'où $k = 800$.
La position de la partie inférieure au temps t est donc :
$s(t) = -4{,}9t^2 + 196t + 800$ m.

b) La partie inférieure atteint sa hauteur maximale lorsque sa vitesse est nulle, soit :
$v(t) = 196 - 9{,}8t$ m/s $= 0$, d'où $t = 20$ s.
La hauteur à ce moment est :
$s(20) = -4{,}9\times20^2 + 196\times20 + 800 = 2\ 760$ m.