Intégrale définie

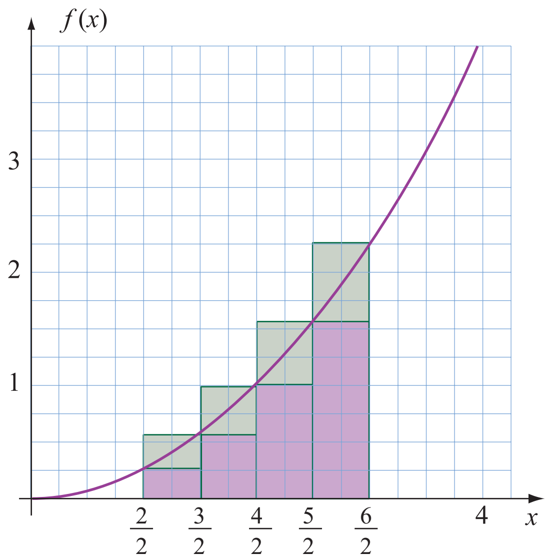
Auto-évaluation

09

Solutions

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe de la fonction définie par $f(x) = x^2/4$.



a) En divisant en quatre sous-intervalles et en représentant votre démarche sur le graphique, donner une estimation par défaut et une estimation en excès de l'aire sous la courbe de cette fonction dans l'intervalle [1; 3].

b) Donner un intervalle de valeurs à l'intérieur duquel se retrouve la valeur de l'aire sous la courbe dans l'intervalle [1; 3].

1. *a*) La courbe est croissante vers le haut dans cet intervalle. Pour obtenir une estimation par défaut, on considère l'image à la frontière de gauche des sous-intervalles comme hauteur des rectangles et la base de ceux-ci est 1/2. On obtient une somme de produits dont on peut alléger l'écriture en mettant en évidence 1/2, la largeur des intervalles, et 1/4, le quotient dans $x^2/4$. L'estimation de l'aire est alors :

$$A=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{4}+\frac{25}{4}\right]$$
$$=\frac{1}{32}(4+9+16+25)=\frac{54}{32}.$$

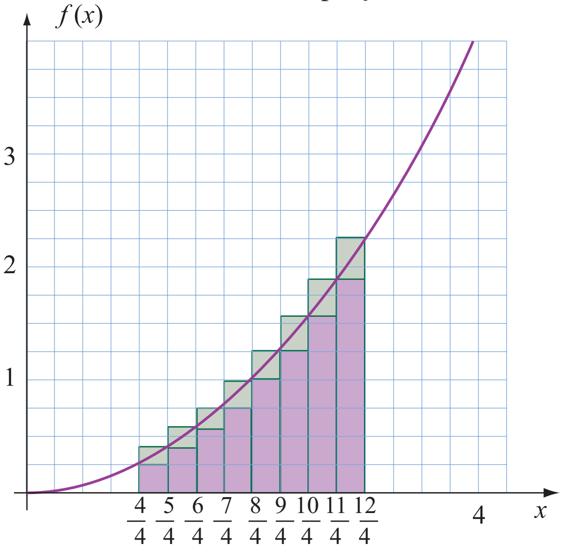
Puisque la courbe est croissante vers le haut dans cet intervalle. On considère l'image à la frontière de droite des sous-intervalles comme hauteur des rectangles pour obtenir une estimation par excès. L'estimation de l'aire est alors :

$$A=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{9}{4}+\frac{16}{4}+\frac{25}{4}+\frac{36}{4}\right]$$
$$=\frac{1}{32}(9+16+25+36)=\frac{86}{32}.$$

b) L'aire sous la courbe est plus grande que 54/32 et plus petite que 86/32, c'est-à-dire :

$$\frac{54}{32}<A<\frac{86}{32}.$$

2. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe de la fonction définie par $f(x) = x^2/4$.



a) En divisant en huit sous-intervalles et en représentant votre démarche sur le graphique, donner une estimation par défaut et une estimation en excès de l'aire sous la courbe de cette fonction dans l'intervalle [1; 3].

b) Donner un intervalle de valeurs à l'intérieur duquel se retrouve la valeur de l'aire sous la courbe dans l'intervalle [1; 3].

c) Comparer l'intervalle obtenu en *b* avec celui du numéro 1.

d) Comment faudrait-il procéder pour l'aire exacte sous la courbe?

2. *a*) La courbe est croissante vers le haut dans cet intervalle. Pour obtenir une estimation par défaut, on considère l'image à la frontière de gauche des sous-intervalles comme hauteur des rectangles et la base de ceux-ci est 1/4. On obtient une somme de produits dont on peut alléger l'écriture en mettant en évidence 1/4, la largeur des intervalles, et 1/4, le quotient dans $x^2/4$. L'estimation de l'aire est alors :

$$A=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{6}{4}\right)^2+...+\left(\frac{11}{4}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{16}\left[\frac{16}{16}+\frac{25}{16}+\frac{36}{16}+...+\frac{121}{16}\right]$$
$$=\frac{1}{256}(16+25+36+...+121)=\frac{492}{256}=\frac{123}{64}.$$

Puisque la courbe est croissante vers le haut dans cet intervalle. On considère l'image à la frontière de droite des sous-intervalles comme hauteur des rectangles pour obtenir une estimation par excès. L'estimation de l'aire est alors :

$$A=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{6}{4}\right)^2+...+\left(\frac{11}{4}\right)^2+\left(\frac{12}{4}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{16}\left[\frac{25}{16}+\frac{36}{16}+...+\frac{121}{16}+\frac{144}{16}\right]$$
$$=\frac{1}{256}(25+36+...+121+144)=\frac{620}{256}=\frac{155}{64}.$$

b) L'aire sous la courbe est plus grande que 123/64 et plus petite que 155/6, soit :

$$\frac{123}{64}<A<\frac{155}{64}.$$

c) Au numéro 1, on a obtenu :

$$\frac{54}{32}<A<\frac{86}{32} \text{ ou } \frac{108}{64}<A<\frac{172}{65}.$$

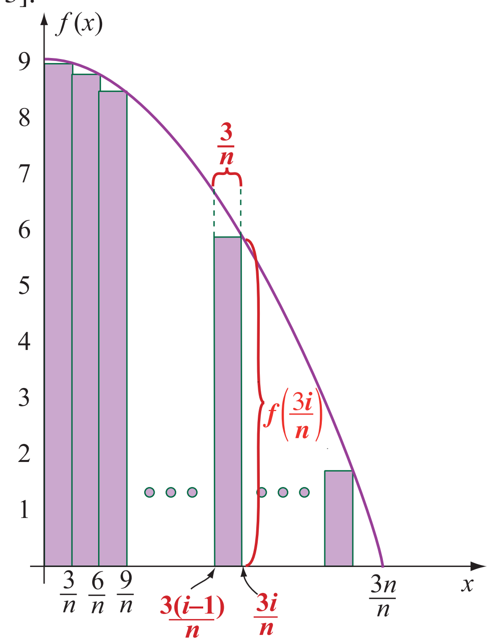
En combinant avec les résultats de 2 *b*, on a :

$$\frac{108}{64}<\frac{123}{64}<A<\frac{155}{64}<\frac{172}{65}.$$

En exprimant en notation décimale, on a :
1,6875 <1,921875 < A < 2,421875 < 2,6875.

d) En augmentant le nombre de sous-intervalles, on augmente la précision de l'estimation et pour trouver la valeur exacte de l'aire, il faut prendre la limite lorsque le nombre de sous-intervalles tend vers l'infini ou la limite lorsque la largeur des sous-intervalles tend vers zéro.

3. Le graphique ci-dessous représente la partie de la courbe de la courbe $f(x) = 9 - x^2$ dans l'intervalle [0; 3].



a) Déterminer la largeur des sous-intervalles constituant une partition de l'intervalle [0; 3] en n sous-intervalles.

b) Déterminer la frontière de droite du i^e intervalle et calculer son image.

c) Déterminer l'aire du i^e rectangle.

d) Écrire la somme des aires des rectangles et simplifier.

e) Évaluer la limite lorsque n tend vers l'infini.

f) Que représente la limite de cette somme de Riemann?

3. *a*) On divise l'intervalle [0; 3[en n sous -intervalles ceux-ci sont donc de largeur $3/n$.

b) Pour parvenir à la frontière droite du i^e sous-intervalle, il faut parcourir i fois la largeur $3/n$. La frontière droite de ce sous-intervalle est donc $3i/n$.

c) La hauteur du i^e rectangle est l'image de la frontière droite par la fonction f. En calculant cette image, on obtient :

$$f\left(\frac{3i}{n}\right) = 9 - \left(\frac{3i}{n}\right)^2 = 9 - \frac{9i^2}{n^2}.$$

L'aire du triangle est le produit de sa hauteur par sa base, ce qui donne :

$$A = \left(9 - \frac{9i^2}{n^2}\right) \times \frac{3}{n} = \left(\frac{9n^2 - 9i^2}{n^2}\right) \times \frac{3}{n}$$
$$= \frac{27}{n^3}(n^2 - i^2).$$

d) La somme des aires est :

$$A_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{27}{n^3}(n^2 - i^2) = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2 - i^2)$$
$$= \frac{27}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} n^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2\right] = \frac{27}{n^3}\left[n^3 - \sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$
$$= \frac{27}{n^3}\left[n^3 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$= 27 - \frac{9n(n+1)(2n+1)}{2n^3}.$$

e) En évaluant la limite à l'infini, on obtient :

$$A_t = \lim_{n\to\infty}\left(27 - \frac{9n(n+1)(2n+1)}{2n^3}\right)$$
$$= 27 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n(n+1)(2n+1)}{2n^3}\right)$$
$$= 27 - \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3}\left(\frac{9(1+1/n)(2+1/n)}{2}\right)$$
$$= 27 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9(1+1/n)(2+1/n)}{2}\right)$$
$$= 27 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9(1+0)(2+0)}{2}\right) = 27 - 9 = 18.$$

f) La limite de la somme de Riemann est l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = 9 - x^2$ dans l'intervalle [0; 3]. On appelle aussi cette limite l'intégrale définie de la fonction sur cet intervalle, soit :

$$A_t = \int_0^3 (9 - x^2)\,dx.$$

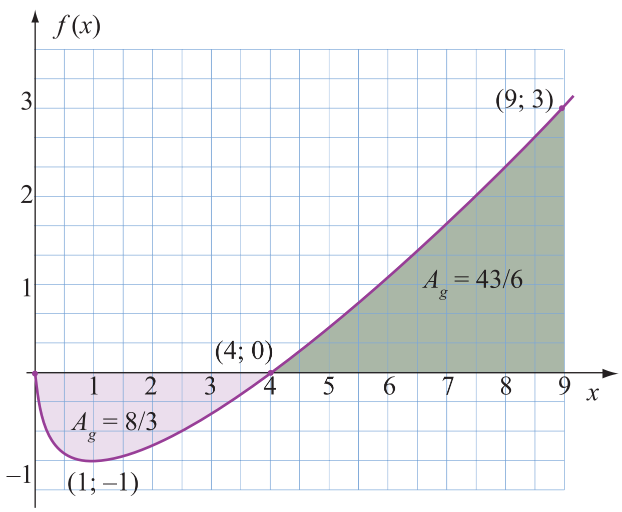
BANQUE D'INTÉGRALES DÉFINIES

$$\int_0^d 1dx = d,\ \int_0^d x\,dx = \frac{d^2}{2},\ \int_0^d x^2\,dx = \frac{d^3}{3},\int_0^d x^3\,dx = \frac{d^4}{4},\ \int_0^d \sqrt{x}\,dx = \frac{2d\sqrt{d}}{3},\ \int_0^d e^x\,dx = e^d,\ \int_0^d e^{-x}\,dx = \frac{e^d-1}{e^d}.$$

4. Le graphique suivant représente la fonction définie par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x},$$

dans l'intervalle [0; 9].



a) Décrire la procédure pour calculer l'aire algébrique sous cette courbe dans l'intervalle [0; 9]. Appliquer cette procédure en ayant recours à la banque d'intégrales définies ci-haut.

b) Décrire la procédure pour calculer l'aire géométrique sous cette courbe dans l'intervalle [0; 4]. Appliquer cette procédure en ayant recours à la banque d'intégrales définies ci-haut.

c) Décrire la procédure pour calculer l'aire géométrique sous cette courbe dans l'intervalle [0; 9]. Appliquer cette procédure en ayant recours à la banque d'intégrales définies ci-haut.

4. *a*) L'aire algébrique sous la courbe est donnée par l'intégrale définie sur l'intervalle [0; 9]. En appliquant les propriétés de l'intégrale définie, on obtient :

$$\int_0^9 \left(x - 2\sqrt{x}\right) dx = \int_0^9 x\ dx - 2\int_0^9 \sqrt{x}\ dx.$$

En utilisant les intégrales de la banque, on trouve pour d = 9 :

$$\int_0^9 \left(x - 2\sqrt{x}\right) dx = \int_0^9 x\ dx - 2\int_0^9 \sqrt{x}\ dx$$
$$= \frac{9^2}{2} - 2\times\frac{2\times 9\sqrt{9}}{3}$$
$$= \frac{81}{2} - \frac{108}{3} = \frac{9}{2}.$$

b) Puisque la courbe est sous l'axe des x partout dans l'intervalle [0; 4], l'aire géométrique est la valeur absolue de l'aire algébrique dans cet intervalle. L'aire algébrique est :

$$\int_0^4 \left(x - 2\sqrt{x}\right) dx = \int_0^4 x\ dx - 2\int_0^4 \sqrt{x}\ dx$$
$$= \frac{4^2}{2} - 2\times\frac{2\times 4\sqrt{4}}{3}$$
$$= 8 - \frac{32}{3} = \frac{-8}{3}.$$

L'aire géométrique sous la courbe dans l'intervalle [0; 4] est donc $A_{g,\ [0;\ 4]} = |-8/3| = 8/3$ u^2.

c) L'aire géométrique sous la courbe dans l'intervalle [0; 9] est la somme de l'aire géométrique dans les intervalles [0; 4] et [4; 9]. Dans l'intervalle [4; 9], l'aire géométrique est égale à l'aire algébrique puisque la courbe est au-dessus de l'axe des x partout dans cet intervalle. Par les propriétés de l'intégrale définie, on a :

$$\int_4^9 f(x)\ dx = \int_0^9 f(x)\ dx - \int_0^4 f(x)\ dx.$$

Les résultats obtenus en a et b permettent d'écrire :

$$\int_4^9 f(x)\ dx = \frac{9}{2} - \left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{43}{6}.$$

L'aire géométrique sous la courbe dans l'intervalle [0; 9] est alors :

$A_{g,\ [0;\ 9]} = |-8/3| = 8/3$ unités d'aire.

$$A_{g,\ [0;9]} = A_{g,\ [0;4]} + A_{g,\ [4;9]} = \frac{8}{3} + \frac{43}{6} = \frac{59}{6}\ \text{u}^2.$$

5. En utilisant la banque d'intégrales ci-haut et les propriétés de l'intégrale, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^6 (2+4e^{-x})dx$

b) $\int_2^4 e^{-x}dx$

5. *a*) $\int_0^6 (2+4e^{-x})dx = 2\int_0^6 1\,dx + 4\int_0^6 e^{-x}\,dx$

$$= 2\times 6 + 4\times\left(\frac{e^6-1}{e^6}\right) \approx 15{,}99 \text{ u}^2.$$

b) $\int_2^4 e^{-x}dx = \int_0^4 e^{-x}dx - \int_0^2 e^{-x}dx$

$$= \left(\frac{e^4-1}{e^4}\right) - \left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)$$

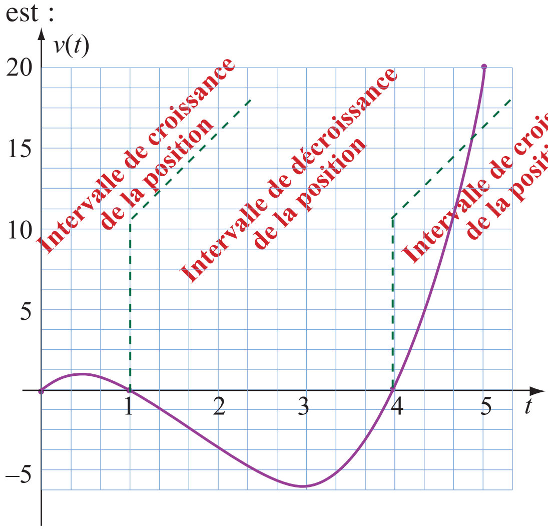
$$= \frac{e^4-1}{e^4} - \frac{e^2}{e^2}\times\frac{e^2-1}{e^2}$$

$$= \frac{e^4-1-e^4+e^2}{e^4} = \frac{e^2-1}{e^4}.$$

6. La vitesse d'un mobile en fonction du temps est donnée par :

$$v(t) = t^3 - 5t^2 - 4t \text{ m/s}$$

dont la représentation graphique sur l'intervalle [0; 5] est :



a) Sur quels intervalles la position est-elle croissante? Décroissante?

b) Si la position initiale du mobile est à 12 m du point de référence, à quelle distance est-il de ce point à 1 s?

c) À quelle distance du point de référence est-il à 4 s?

d) À quelle distance du point de référence est-il à 9 s?

e) Quelle est la distance totale parcourue par le mobile?

6. *a*) La position est croissante sur [0; 1] et [4; 5]. Elle est décroissante sur [1; 4].

b) La variation de position durant la première seconde est donnée par :

$$\int_0^1 (t^3-5t^2+4t)dt = \int_0^1 t^3dt - 5\int_0^1 t^2dt + 4\int_0^1 t\ dt$$

$$= \frac{1}{4} - 5\times\frac{1}{3} + 4\times\frac{1}{2} = \frac{7}{12} \text{ m.}$$

Le mobile s'est éloigné de 7/12 m, il est donc à 12 + 7/12 m = 151/12 m du point de référence.

c) La variation de position durant les quatre premières secondes est donnée par :

$$\int_0^4 (t^3-5t^2+4t)dt = \int_0^4 t^3dt - 5\int_0^4 t^2dt + 4\int_0^4 t\ dt$$

$$= \frac{256}{4} - 5\times\frac{64}{3} + 4\times\frac{16}{2}$$

$$= \frac{-32}{3} \text{ m.}$$

Le mobile est alors à 12 – 32/3 m = 4/3 m.

d) La variation de position durant les cinq premières secondes est donnée par :

$$\int_0^5 (t^3-5t^2+4t)dt = \int_0^5 t^3dt - 5\int_0^5 t^2dt + 4\int_0^5 t\ dt$$

$$= \frac{625}{4} - 5\times\frac{125}{3} + 4\times\frac{25}{2}$$

$$= \frac{-25}{12} \text{ m.}$$

Le mobile est alors à 12 – 25/12 m = 119/12 m.

e) Durant l'intervalle [0; 1], la distance parcourue est 7/12 m.

Durant l'intervalle [1; 4], le changement de position est :

$$\int_1^4 v(t)\,dt=\int_0^4 v(t)\,dt-\int_0^1 v(t)\,dt$$
$$=\frac{-32}{3}-\frac{7}{12}=\frac{-128}{12}.$$

Le mobile a donc parcouru une distance de 128/12 m durant cet intervalle de temps.

Durant l'intervalle [4; 5], le changement de position est :

$$\int_4^5 v(t)\,dt=\int_0^5 v(t)\,dt-\int_0^4 v(t)\,dt$$
$$=\frac{-25}{12}-\frac{-32}{3}=\frac{103}{12}.$$

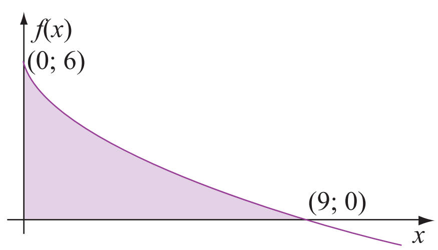
Le mobile a donc parcouru une distance de 103/12 m durant cet intervalle de temps.

Au total, le mobile a parcouru :

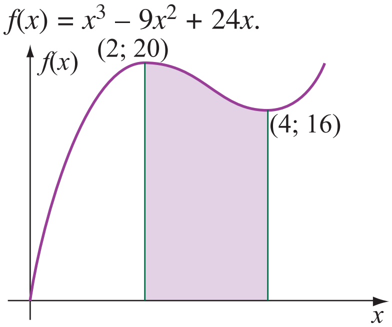
$$\frac{7}{12}+\frac{128}{12}+\frac{103}{12}=\frac{238}{12}\text{ m.}$$

7. Calculer l'aire sous la courbe des fonctions suivantes dans l'intervalle indiqué.

a) L'aire délimitée par les axes et la courbe de : $f(x)=6-2\sqrt{x}$



b) L'aire sous la courbe entre le maximum relatif et le minimum relatif de la fonction : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.



7. *a*) En posant $6-2\sqrt{x}=0$ et en résolvant, on obtient $x = 9$. La courbe coupe l'axe des x au point (9; 0), on cherche donc l'intégrale définie sur l'intervalle [0; 9]. En utilisant les intégrales définies de la banque, on obtient :

$$\int_0^9 6-2\sqrt{x}dx=6\int_0^9 1dx-2\int_0^9\sqrt{x}dx$$
$$=6\times 9-2\times\frac{2\times 9\sqrt{9}}{3}=54-36=18.$$

L'aire est de 18 unités carrées.

b) La dérivée de la fonction est :
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.
Elle s'annule à $x = 2$ et à $x = 4$. L'intervalle d'intégration est donc [2; 4]. Par les propriétés de l'intégrale définie, on a :

$$\int_2^4 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx-\int_0^2 f(x)\,dx.$$

Or,

$$\int_0^4 f(x)\,dx=64 \text{ et } \int_0^2 f(x)\,dx=28.$$

L'aire cherchée est donc de 36 unités carrées.