

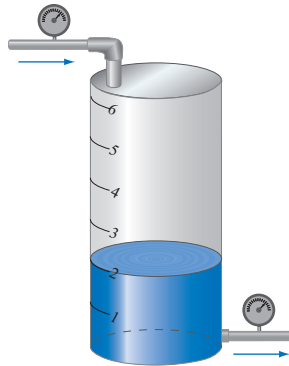
Intégration : une introduction

Solutions

08

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. Lorsque le système d'alimentation d'un réservoir se met en marche, un appareil enregistre, chaque minute, le débit dans la conduite alimentant le réservoir. Les valeurs obtenus lors du dernier relevé sont celles dans du tableau suivant.



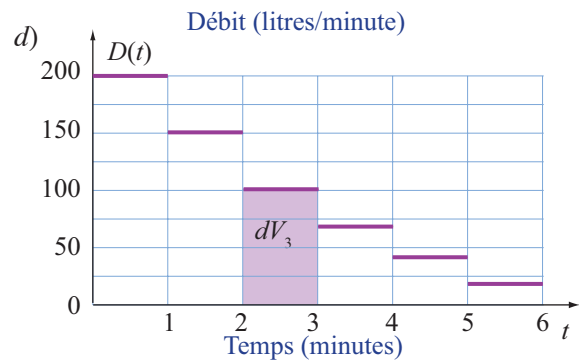
t min	0	1	2	3	4	5
$D(t)$ L/min	200	150	100	70	40	20

- a) Calculer dV_1 , la variation du volume de liquide dans l'intervalle $[0; 1]$.
- b) Calculer dV_4 , la variation du volume de liquide dans l'intervalle $[3; 4]$.
- c) Utiliser la notation dV_i pour décrire la variation du volume de liquide durant l'intervalle $[0; 6]$.
- d) Dans le premier système d'axes ci-contre, représenter la fonction débit. Dans ce graphique, par quoi est représentée la variation dV_3 .
- e) En complétant le tableau suivant, estimer la quantité de liquide ajouté durant l'intervalle de temps $[0; 6]$.
- f) Dans le deuxième système d'axes ci-contre, représenter la fonction décrivant le volume de liquide ajouté dans le réservoir durant l'intervalle $[0; 6]$. Dans ce graphique, par quoi est représentée la variation dV_3 .

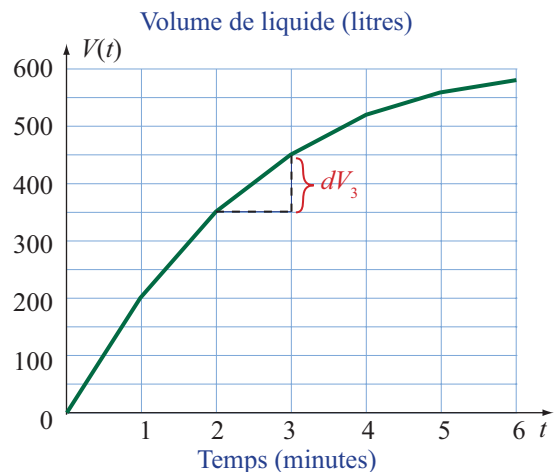
1. a) $dV_1 = D(t)|_{[0; 1]} \times dt = 200 \text{ L/min} \times 1 \text{ min} = 200 \text{ L}$.

b) $dV_4 = D(t)|_{[3; 4]} \times dt = 70 \text{ L/min} \times 1 \text{ min} = 70 \text{ L}$.

c) $dV = dV_1 + dV_2 + dV_3 + dV_4 + dV_5 + dV_6$.



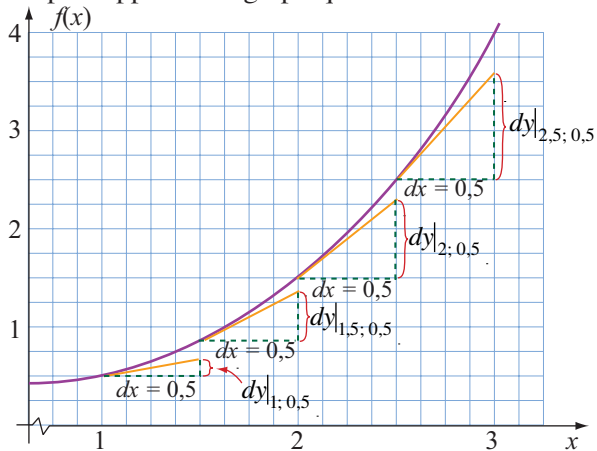
Dans le graphique du débit, la variation de volume durant l'intervalle $[2; 3]$ est représentée par l'aire sous la courbe dans cet intervalle.



Dans le graphique du volume de liquide, la variation de volume durant l'intervalle $[2; 3]$ est représentée par la différence des ordonnées dans cet intervalle.

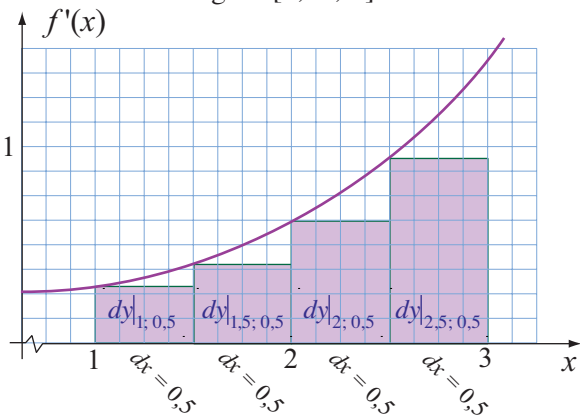
2. Le graphique ci-dessous est une portion de la courbe d'une fonction f et le graphique ci-contre est un agrandissement de la région $[0,75; 2]$.

a) Représenter sur le graphique ci-contre la différentielle $dy|_{1;0,5}$, en expliquant ce que représente cette différentielle et ce qu'elle permet d'estimer par rapport à ce graphique.



b) Expliquer et illustrer sur le graphique ci-dessus, comment il faudrait procéder pour calculer une estimation de la variation de la fonction dans l'intervalle $[1; 3]$, en divisant celui-ci en quatre sous-intervalles. Décrire cette estimation par une somme de différentielles.

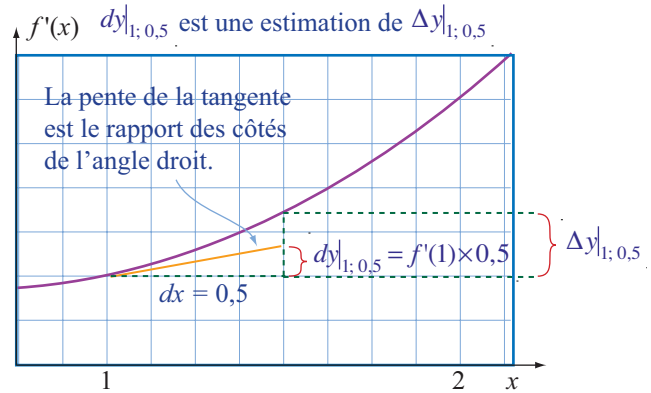
3. Le graphique ci-dessous est celui d'une fonction dérivée f' et le graphique ci-contre est un agrandissement de la région $[0,75; 2]$.



a) Représenter sur le graphique ci-contre la différentielle $dy|_{1;0,5}$, en expliquant ce que représente cette différentielle et ce qu'elle permet d'estimer par rapport à ce graphique.

b) Expliquer et illustrer sur le graphique de f' , ci-dessus, comment il faudrait procéder pour calculer une estimation de l'aire sous la courbe de cette fonction dans l'intervalle $[1; 2]$ en divisant celui-ci en quatre sous-intervalles. Décrire cette estimation par une somme de différentielles.

2. a)



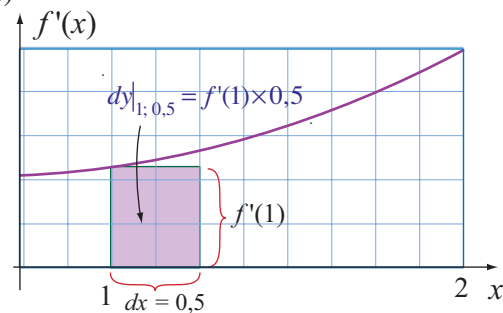
$$dy = f'(x) dx \text{ et } dy|_{1;0,5} = f'(1) \times 0,5.$$

Puisque $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, le rapport des variations est approximé par la pente de la tangente. En isolant dy on obtient une valeur approché de la variation de y sur l'intervalle considéré. Dans ce cas-ci, l'intervalle est $[1; 1,5]$.

La différentielle $dy|_{1;0,5}$ permet d'estimer la variation de la fonction sur l'intervalle $[1; 1,5]$.

b) On peut estimer la variation Δy sur l'intervalle $[1; 3]$ par la somme de différentielles suivante :
 $\Delta y \approx dy|_{1;0,5} + dy|_{1,5;0,5} + dy|_{2;0,5} + dy|_{2,5;0,5}$.
 On peut augmenter la précision en augmentant le nombre de sous-intervalles.

3. a)



$dy|_{1;0,5}$ est l'aire du rectangle de hauteur $f'(1)$ et dont la base est $dx = 1,5 - 1 = 0,5$.

Dans ce cas, $f'(x)$ représente la hauteur du rectangle de largeur $0,5$ sur l'intervalle $[1; 1,5]$. Par conséquent, $dy|_{1;0,5}$ est une estimation de l'aire sous la courbe dans cet intervalle.

b) On peut estimer l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[1; 3]$ par la somme de différentielles suivante :

$$\Delta y \approx dy|_{1;0,5} + dy|_{1,5;0,5} + dy|_{2;0,5} + dy|_{2,5;0,5}$$

On peut augmenter la précision en augmentant le nombre de sous-intervalles.

4. Un corps chauffé à 90°C est plongé dans un milieu à 30°C . La température T du corps, t minutes après avoir été plongé dans ce milieu satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{5}(T-30), \text{ où } T \geq 30^\circ.$$

- a) Calculer la température du corps, une minute et demie après avoir été plongé dans le milieu.

- b) En complétant le tableau suivant, déterminer l'évolution de la température du corps durant les neuf premières minutes.

Δt (min)	T ($^\circ\text{C}$)	dT/dt ($^\circ\text{C}/\text{min}$)	dT ($^\circ\text{C}$)	$T + dT$ ($^\circ\text{C}$)
[0; 1,5[90	-12	-18	72
[1,5; 3[72	-8,4	-12,6	59,4
[3; 4,5[59,4	-5,88	-8,82	50,58
[4,5; 6[50,58	-4,116	-6,174	44,406
[6; 7,5[44,406	-2,8812	-4,3218	40,0842
[7,5; 9[40,0842	-2,01684	-3,02526	37,05894

- c) Dans le système d'axes ci-contre, représenter graphiquement le comportement de la température du corps durant cet intervalle de temps.

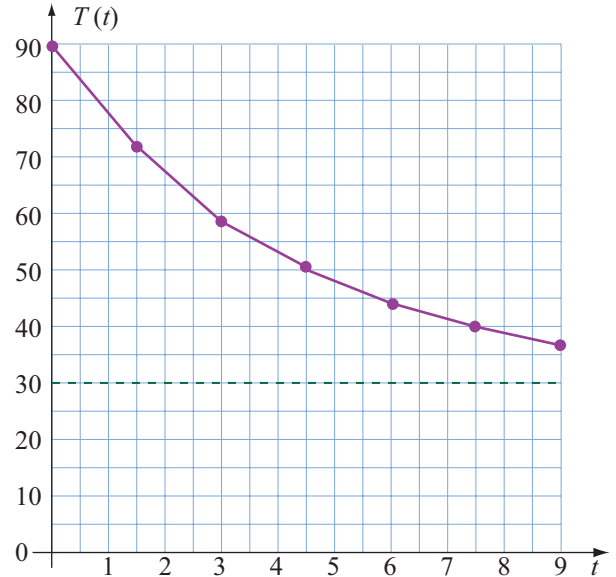
- d) Notons T_0 , la température initiale du corps et T_i la température à la fin du i^{e} intervalle d'une minute et demie. Écrire, à l'aide des différentielles, la relation permettant d'estimer la température du corps neuf minutes après qu'il a été plongé dans le milieu à 30°C .

4. a) La température du corps à $t = 0$ est de 90°C . Pour déterminer la température à 1,5 min, il faut calculer la différentielle $dT|_{90^\circ; 1,5}$.

$$\text{Or, } dT = -\frac{1}{5}(T-30)dt, \text{ d'où :}$$

$$dT|_{90^\circ; 1,5} = -\frac{1}{5}(90-30) \times 1,5 = -18^\circ\text{C}.$$

La température du corps diminue de 18°C durant cette minute et demie. Le corps est donc à 72°C .



- d) L'estimation de la température après neuf minutes est donnée par :

$$\begin{aligned} T &\approx T_0 + dT_1 + dT_2 + dT_3 + dT_4 + dT_5 + dT_6 \\ &\approx 90^\circ - 18 - 12,6 - 8,82 - 6,17 - 4,32 - 3,03 \\ &\approx 37,06^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

C'est la démarche suivie dans le tableau.