Optimisation

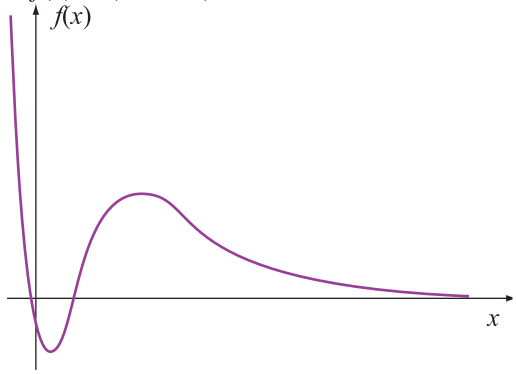
Auto-évaluation

07

Solutions

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. Le graphique ci-dessous représente la fonction définie par : $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x/2}$.



a) Déterminer l'abscisse du minimum relatif de cette fonction et confirmer votre choix par un test de la dérivée première.

b) Déterminer l'abscisse du maximum relatif de cette fonction et confirmer votre choix par un test de la dérivée première.

1. *a*) La dérivée première est :

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x/2}+(x^2+2x)e^{-x/2}\times\frac{-1}{2}$$
$$=\frac{e^{-x/2}}{2}(4x+4-x^2-2x)$$
$$=\frac{e^{-x/2}}{2}(-x^2+2x+4).$$

Elle s'annule à :
$x=1-\sqrt{5}\approx-1{,}24$ et $x=1+\sqrt{5}\approx3{,}24$.

Selon le graphique, le minimum serait atteint à $1-\sqrt{5}\approx-1{,}24$. Confirmons cette conclusion par un test de la dérivée première.

$f'(-2)=\frac{e^1}{2}(-4-4+4)<0$, la fonction est donc décroissante à gauche de –1,24.

$f'(-1)=\frac{e^{1/2}}{2}(-1-2+4)>0$, la fonction est donc décroissante à droite de –1,24 et la fonction a un minimum relatif à –1,24.

Test de la dérivée première			
x	–2	–1,24	–1
$f'(x)$		0	
$f(x)$	↘	min	↗

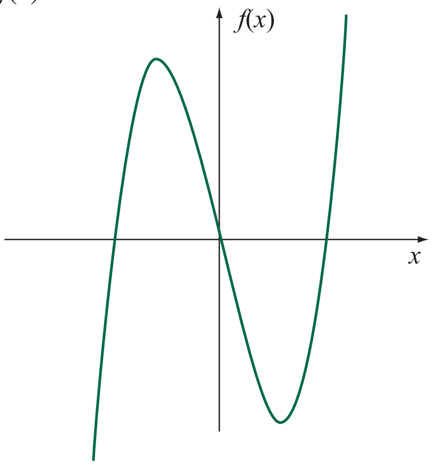
b) Selon le graphique, le minimum serait atteint à $1-\sqrt{5}\approx-1{,}24$. Confirmons cette conclusion par un test de la dérivée première.

$f'(-2)=\frac{e^1}{2}(-4-4+4)<0$, la fonction est donc décroissante à gauche de 3,24.

$f'(-1)=\frac{e^{1/2}}{2}(-1-2+4)>0$, la fonction est donc décroissante à gauche de 3,24 et la fonction atteint un maximum relatif à 3,24.

Test de la dérivée première			
x	3	3,24	4
$f'(x)$		0	
$f(x)$	↗	max	↘

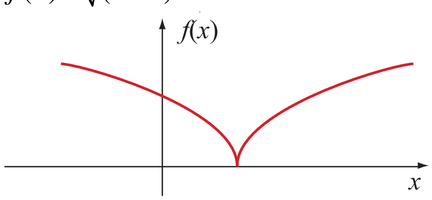
2. Le graphique ci-dessous représente la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 12x$.



a) Déterminer l'abscisse du maximum relatif de cette fonction et confirmer votre choix par un test de la dérivée seconde.

b) Déterminer l'abscisse du minimum relatif de cette fonction et confirmer votre choix par un test de la dérivée seconde.

3. Le graphique ci-dessous représente la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$.



a) Déterminer l'abscisse du minimum relatif de cette fonction et confirmer votre choix par un test de la dérivée première.

b) Expliquer pourquoi on ne peut faire un test de la dérivée seconde dans ce cas.

c) Peut-on utiliser la dérivée seconde d'une autre façon pour confirmer le verdict?

2. *a*) La dérivée première est : $f'(x) = 3x^2 - 12$. Elle s'annule à :
$3x^2 - 12 = 0$, d'où $x^2 - 4 = 0$ et $x = \pm 2$.
Selon le graphique, le maximum serait atteint à $x = -2$. Confirmons ce verdict par un test de la dérivée seconde.
La dérivée seconde est :
$f''(x) = 6x$.
En évaluant la dérivée seconde à x –2, on obtient :
$f''(-2) = -12 < 0$.
La tangente est horizontale à –2 et la courbe est concave vers le bas. La fonction a donc un maximum relatif à $x = -2$.

Test de la dérivée seconde			
x		-2	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		$-$	
$f(x)$		$\frown$ max	

Selon le graphique, le minimum serait atteint à $x = 2$. Confirmons ce verdict par un test de la dérivée seconde.
En évaluant, on obtient :
$f''(2) = 12 > 0$.
La tangente est horizontale à $x = 2$ et la courbe est concave vers le haut. La fonction a donc un minimum relatif à $x = 2$.

Test de la dérivée seconde			
x		2	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$		$\smile$ max	

3. *a*) Le carré d'un nombre est toujours positif et la racine cubique d'un nombre positif est positive. La plus petite valeur que peut prendre la fonction est donc 0 et cela se produit à $x = 2$.
On peut confirmer en appliquant un test de la dérivée première. Celle-ci est :

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left((x-2)^{2/3}\right)=\frac{2}{3}(x-2)^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

On a alors :

$$f'(1)=\frac{2}{3\sqrt[3]{1-2}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{-1}}=\frac{2}{3\times -1}<0.$$

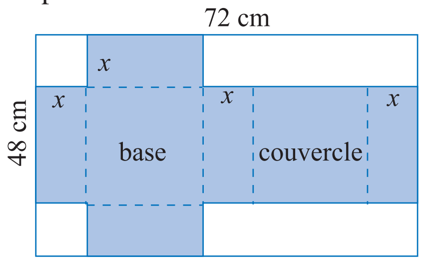
$$f'(3)=\frac{2}{3\sqrt[3]{3-2}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}=\frac{2}{3\times 1}>0.$$

La fonction est décroissante à gauche de 2 et croissante à droite, on a donc un minimum relatif à $x = 2$.

b) Le test de la dérivée seconde nécessite le calcul de la dérivée seconde au point considéré. Or, dans le cas présent, la dérivée seconde n'est pas définie à $x = 2$.

c) On peut utiliser la dérivée seconde pour déterminer la concavité à gauche et à droite de 2, ce qui permet de confirmer le verdict.

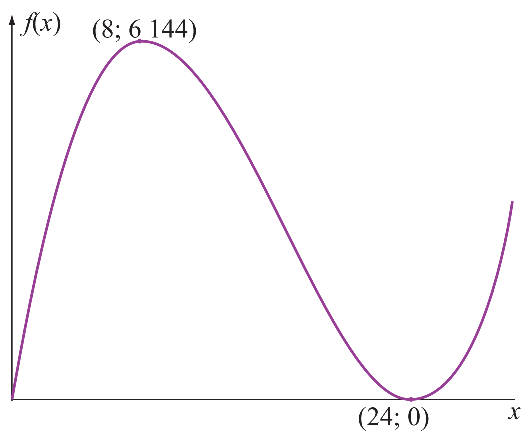
4. Une compagnie doit fabriquer des contenants avec couvercle à partir de feuilles de carton rectangulaires de 30 cm par 48 cm.



Une presse découpe d'abord un carré et un rectangle de chaque côté de la feuille tel qu'indiqué dans le plan suivant. Puis, une autre machine plie la feuille suivant les lignes pointillées et applique un papier scellant pour coller les côtés de la boîte.

a) Quelle est la longueur du côté du carré pour que le volume de la boîte soit maximal?

b) Indiquer, sur le graphique suivant, les coordonnées des points où la fonction (pas simplement le modèle) atteint ses valeurs optimales.



c) Quel est le domaine de validité du modèle?

5. Le ministère des loisirs désire déboiser une surface rectangulaire de 28 800 m^2 pour aménager une aire de stationnement pour une base de plein air. Cette surface, dont le plan est donné ci-contre, devra être clôturée sur les trois côtés non-adjacents à la route de façon à réserver les allées de la base aux randonnées pédestres.

a) Quelles doivent être les dimensions du stationnement pour que la longueur de la clôture soit minimale?

4. *a*) Les contraintes sont les dimensions de la feuille de carton et les variables du problème sont le volume et la longueur x du côté du carré qui donne la hauteur de la boîte. Les dimensions de la boîte seront x, $48 - 2x$ et $(72 - 3x)/2$. On peut directement établir la relation entre le volume et le côté x, on obtient :

$$V(x) = x(48-2x)\left(\frac{72-3x}{2}\right) = (24x - x^2)(72-3x).$$

En appliquant la règle de dérivation d'un produit, on obtient :

$V'(x) = (24 - 2x)(72 - 3x) + (24x - x^2) \times -3$
$\quad = 3(3x^2 - 96x + 576)$

La dérivée seconde est :

$V''(x) = 3(6x - 88)$

La dérivée première s'annule lorsque :

$3x^2 - 88x + 576 = 0$. Les racines de cette équation quadratique sont :

$$x = \frac{96 \pm \sqrt{(-96)^2 - 4\times 3 \times 576}}{6}.$$

On trouve $x = 8$ et $x = 24$.

Cette deuxième valeur est à rejeter pour respecter les contraintes du problème.

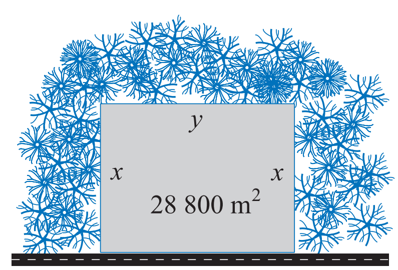
En appliquant le test de la dérivée seconde, on obtient :

$V'(8) = 0$ et $V''(8) = -120 < 0$,

Test de la dérivée seconde			
x		8	
$V'(x)$		0	
$V''(x)$		+	
$V(x)$		$\frown$ max	

Par conséquent, le volume est maximal lorsque le côté du carré à découper est de 8 cm.

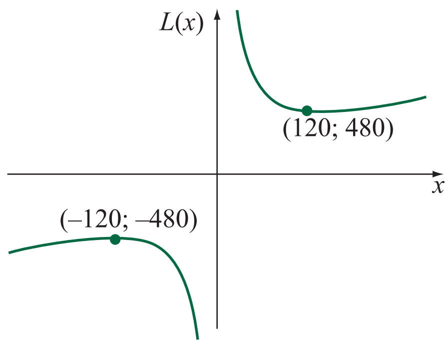
c) Le domaine de validité du modèle est l'intervalle $[0; 24]$.



5. *a*) Soit x la largeur du stationnement, y sa longueur et A sa superficie. La variable à optimiser est la longueur L de la clôture. La contrainte est :

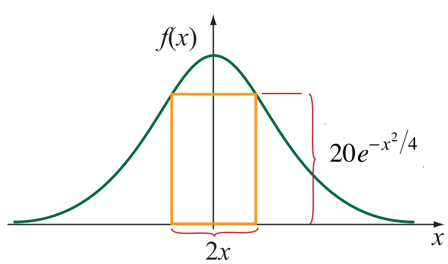
$A = xy = 28\,800$, d'où $y = 28\,800/x$.

La relation entre la longueur de la clôture et les *b*) Indiquer, sur le graphique suivant, les coordonnées des points où la fonction (pas simplement le modèle) atteint ses valeurs optimales.



6. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut former de telle sorte que deux des sommets soient sur l'axe des x et les deux autres sur la courbe d'équation :

$$f(x)=20e^{-x^2/4}.$$



variables sous contrainte est :
$L = 2x + y$
Par substitution, on a :

$$L(x)=2x+\frac{28\ 800}{x}=2x+28\ 800x^{-1}.$$

Les dérivées sont :

$$L'(x)=2-28\ 800x^{-2}=2+\frac{28\ 800}{x^2},$$

$$L''(x)=57\ 600x^{-3}=\frac{57\ 600}{x^3}.$$

La dérivée première s'annule lorsque :

$$2+\frac{28\ 800}{x^2}=0,$$

d'où $2x^2 = 28\ 800$ et $x^2 = 6\ 400$.

On a donc $x = \pm\ 120$. Puisqu'il s'agit d'une longueur, on retient $x = 120$ m.
Puisque $L'(120) = 0$ et $L''(120) = 0{,}03 > 0$, le test de la dérivée seconde permet de conclure que la longueur de la clôture est minimale lorsque $x = 120$ m. On trouve alors $y = 240$ m.

Test de la dérivée seconde			
x		120	
$L'(x)$		0	
$L''(x)$		+	
$L(x)$		$\smile$ min	

6. Les variables sont la base $b = 2x$ et la hauteur $h=20e^{-x^2/4}$. L'aire du rectangle est donnée par :

$$A(x)=40xe^{-x^2/4}.$$

En dérivant, on obtient :

$$A'(x)=40e^{-x^2/4}+40xe^{-x^2/4}\times\frac{-2x}{4}$$
$$=e^{-x^2/4}\left(40-20x^2\right).$$

Cette dérivée s'annule lorsque $40 - 20x^2 = 0$, ce qui donne $x^2 = 2$ et $x=\pm\sqrt{2}$.
La dérivée seconde est :

$$A''(x)=e^{-x^2/4}\times\frac{-2x}{4}\left(40-20x^2\right)+e^{-x^2/4}\times-40x$$
$$=-10e^{-x^2/4}\left(x^3+6x\right).$$

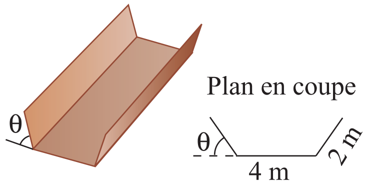
En appliquant le test de la dérivée seconde à $x=\sqrt{2}$, on obtient :

$$A''(\sqrt{2})=-10e^{-2/4}\sqrt{2}(2+6)<0.$$

Par conséquent, à $x=\sqrt{2}$, la tangente est horizontale et la courbe est concave vers la bas. La fonction atteint donc un maximum à $x=\sqrt{2}$.

Test de la dérivée seconde			
x		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		–	
$f(x)$		$\frown$ max	

7. On doit construire un canal d'irrigation en béton. Une coupe transversale de ce canal doit avoir la forme d'un trapèze isocèle dont la petite base, constituant le fond du canal, sera de quatre mètres et les côtés isocèles de deux mètres.



Déterminer l'angle θ pour lequel la capacité du canal est maximale.

7. La capacité est maximale lorsque l'aire de la coupe transversale est maximale. Cette aire est celle d'un trapèze et est donnée par :

$$A=\frac{b+B}{2}\times h.$$

où b = 4 m, $B = 4 + 4\cos\theta$ et $h = 2\sin\theta$.

La fonction décrivant l'aire du trapèze est :

$$A(\theta) = 4(2 + \cos\theta)\sin\theta.$$

Sa dérivée est :

$A'(\theta) = 4(-\sin^2\theta + 2\cos\theta + \cos^2\theta$.

Et, puisque $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, on a :

$A'(\theta) = 4(2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1)$

On trouve alors $\cos\theta=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

La valeur négative est à rejeter dans ce contexte car l'angle est nécessairement plus petit que 90°. La dérivée s'annule à :

$$\theta=\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=1{,}196\text{ rad }=68{,}53°.$$

Appliquons un test de la dérivée première. Puisque cos 60° = 1/2, on a :

$$A'(60°)=4\left(2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}-1\right)=2>0.$$

Puisque cos 90° = 0, on a :

$$A'(90°)=4(2\times0+2\times0-1)=-4<0.$$

La fonction est croissante lorsque $\theta < 68{,}53°$ et décroissante lorsque $\theta > 68{,}53$. La capacité est donc maximale pour un angle de 68,53.

Test de la dérivée première			
x	60°	68,53°	90°
$A'(x)$		0	
$A(x)$	↗	max	↘