

Analyse de fonctions

Solutions

Auto-évaluation

06

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

1. Dans le rectangle sous les représentations graphiques de la colonne de droite, indiquer par la lettre associée, les propriétés de la fonction.

a) $f(c) \exists$ b) $f(c) \nexists$

c) $f'(c) \exists$ d) $f'(c) \nexists$

e) $f'(c) = 0$ f) $f'(c) > 0$

g) $f'(c) < 0$ h) $f''(c) > 0$

i) $f''(c) < 0$ j) $f''(c) = 0$

k) $f''(c) \nexists$

l) $f'(x) > 0$ si $c < 0$, $f'(x) < 0$ si $c > 0$.

m) $f'(x) < 0$ si $c < 0$, $f'(x) > 0$ si $c > 0$.

n) $f'(x) < 0$ si $c < 0$, $f'(x) < 0$ si $c > 0$.

o) $f'(x) > 0$ si $c < 0$, $f'(x) > 0$ si $c > 0$.

p) $f''(x) > 0$ si $c < 0$, $f''(x) < 0$ si $c > 0$.

q) $f''(x) < 0$ si $c < 0$, $f''(x) > 0$ si $c > 0$.

r) $f''(x) > 0$ si $c < 0$, $f''(x) > 0$ si $c > 0$.

s) $f''(x) < 0$ si $c < 0$, $f''(x) < 0$ si $c > 0$.

t) $(c; f(c))$ est un maximum relatif.

u) $(c; f(c))$ est un minimum relatif.

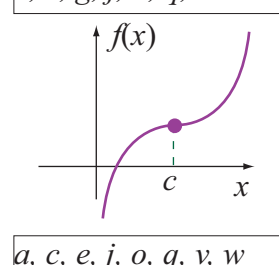
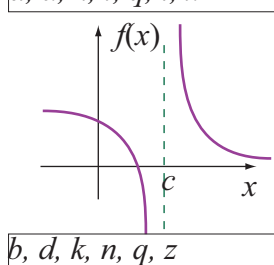
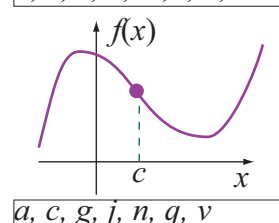
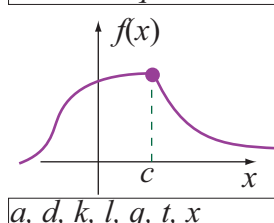
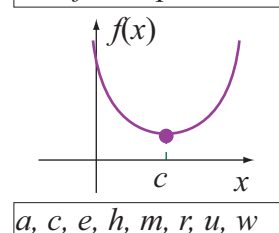
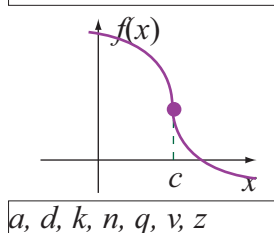
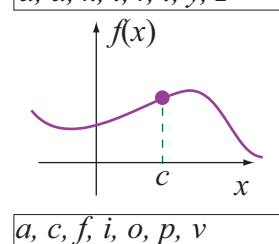
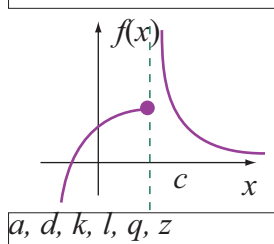
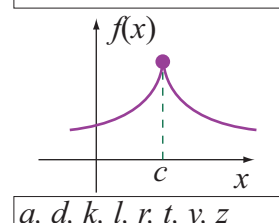
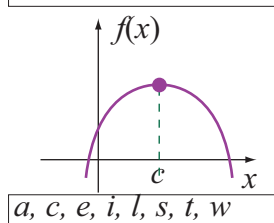
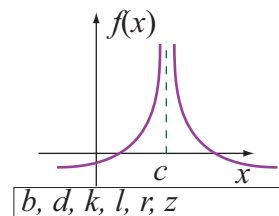
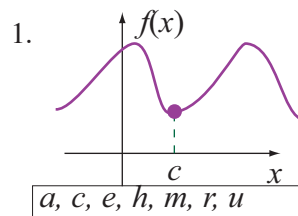
v) $(c; f(c))$ est un point d'inflexion.

w) $(c; f(c))$ est un point stationnaire.

x) $(c; f(c))$ est un point anguleux.

y) $(c; f(c))$ est un point de rebroussement.

z) $f'(x)$ a une asymptote verticale à $x = c$.



2. Déterminer si les fonctions suivantes ont une asymptote verticale. Justifier votre réponse.

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

$$b) f(x) = x^2 + 4x - 2$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$$

$$e) f(x) = \ln x$$

$$f) f(x) = \tan x$$

3. Déterminer si les fonctions suivantes ont une asymptote horizontale. Justifier votre réponse.

$$a) f(x) = e^x$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 4}$$

$$c) f(x) = \frac{2x^2 - 3}{5x^2 + 4}$$

$$d) f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 5}$$

2. a) La fonction n'a pas d'asymptote verticale puisque son dénominateur ne s'annule pas. Elle ne peut donc avoir de discontinuité de la forme $k/0$.

b) Une fonction polynomiale n'a pas d'asymptote verticale. Son domaine est \mathbb{R} et elle ne peut donc avoir de discontinuité de la forme $k/0$.

c) La fonction n'a pas d'asymptote verticale puisque son numérateur et son dénominateur s'annule à $x = 3$. Elle a une discontinuité de la forme $0/0$.

d) La fonction a une asymptote verticale à $x = 2$ car elle a alors une discontinuité de la forme $k/0$.

e) La fonction a une asymptote verticale à $x = 0$. En effet, si $y = \ln x$, alors $x = e^y$. De plus :

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

f) La fonction a une asymptote verticale à $x = \pm\pi/2 + k\pi$. En effet, la fonction tangente peut s'écrire $f(x) = \sin x / \cos x$, et :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$, la fonction a donc une asymptote horizontale à $y = 0$ dans la partie gauche de l'axe des x .

b) La fonction n'a pas d'asymptote horizontale car le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur. En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x + 4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} \times \frac{1 - 3/x^2}{1 + 4/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1 - 3/x^2}{1 + 4/x} = \infty \times \frac{1 - 0}{1 + 0} = \infty. \end{aligned}$$

c) La fonction a une asymptote horizontale à $y = 2/5$. En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{5x^2 + 4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2 - 3/x^2}{5 + 4/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3/x^2}{5 + 4/x^2} = \frac{2 - 0}{5 + 0} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

d) La fonction a une asymptote horizontale à $y = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4}{x^2 - 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} \times \frac{1 + 4/x}{1 - 5/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \times \frac{1 + 4/x}{1 - 5/x^2} = 0 \times \frac{1 + 0}{1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

4. Déterminer si les fonctions suivantes, dont on donne les dérivées première et seconde, ont des valeurs critiques et indiquer de quelle sorte de points critiques il s'agit. Justifier votre réponse.

$$a) f(x) = 3x^2 - 12x - 5, f'(x) = 6x - 12 \\ \text{et } f''(x) = 6$$

$$b) f(x) = \frac{5}{x-2}, f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{10}{(x-2)^3}$$

$$c) f(x) = \frac{x+4}{x-2}, f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{12}{(x-2)^3}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}, f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$e) f(x) = (x^2-12)e^{x/2}, f'(x) = \frac{e^{x/2}}{2}(x^2+4x-12) \\ \text{et } f''(x) = \frac{e^{x/2}}{4}(x^2+8x-4)$$

$$f) f(x) = 8 - \sqrt[3]{(x-4)^2}, f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(x-4)}} \\ \text{et } f''(x) = \frac{2}{9(x-4)\sqrt[3]{(x-4)}}$$

$$g) f(x) = \sqrt[3]{x^2-x-6}, f'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2-x-6)^2}} \\ \text{et } f''(x) = \frac{-2(x^2+x+38)}{9(x^2-x-6)\sqrt[3]{(x^2-x-6)^2}}$$

4. a) La représentation graphique d'une fonction quadratique est une parabole. Elle a toujours soit un maximum, soit un minimum. Dans ce cas-ci, c'est un minimum puisque le coefficient de x^2 est positif. Cela est confirmé par les dérivées, en effet : $f'(x) = 6x - 12$ et $f''(x) = 6$. La tangente est horizontale à $x = 2$ et la courbe est concave vers le haut. On peut conclure que la fonction a un minimum relatif à $x = 2$.
- b) Les dérivées première et seconde ne s'annulent pas, la fonction n'a ni minimum, ni maximum relatif et n'a pas de point d'inflexion.
- c) Les dérivées première et seconde ne s'annulent pas, la fonction n'a ni minimum, ni maximum relatif et n'a pas de point d'inflexion.
- d) La dérivée première s'annule à $x = 1$ et $x = 3$, de plus $f''(1) < 0$, la courbe est concave vers le bas et la fonction a un maximum relatif à $x = 1$. $f''(3) > 0$, la courbe est concave vers le haut et la fonction a un minimum relatif à $x = 3$. La dérivée seconde ne s'annule pas, la fonction n'a pas de point d'inflexion.
- e) La dérivée première s'annule à $x = 2$ et $x = -6$, de plus $f''(2) > 0$, la courbe est concave vers le haut et la fonction a un minimum relatif à $x = 2$. $f''(-6) < 0$, la courbe est concave vers le bas et la fonction a un maximum relatif à $x = -6$. La dérivée seconde s'annule à : $-4 - 2\sqrt{5} \approx -8,47$ et $-4 + 2\sqrt{5} \approx 0,47$. Ce sont des points d'inflexion puisque la dérivée seconde change de signe en ces valeurs. En effet : $f''(-9) > 0$ et $f''(-8) < 0$. De même : $f''(0) < 0$ et $f''(1) > 0$.
- f) Les dérivées première et seconde ne s'annulent pas, cependant elles ont une asymptote verticale à $x = 4$. Le point $(4; 8)$ est un point de rebroussement, puisque $f''(3) > 0$ et $f''(5) > 0$. La courbe est concave vers le haut à gauche et à droite de $x = 4$.
- g) La dérivée première s'annule à $x = -1/2$. C'est un minimum relatif. En effet, $f''(-1/2) > 0$, la courbe est concave vers le haut dans cet intervalle. La dérivée seconde ne s'annule pas cependant, les dérivées première et seconde ont des asymptotes verticales à $x = -2$ et $x = 3$. Ce sont des points d'inflexion. En effet, $f''(-3) < 0$ et $f''(-1) > 0$, la courbe change donc de concavité à $x = -2$. De plus, $f''(2) > 0$ et $f''(4) < 0$, la courbe change donc de concavité à $x = 3$.

5. On donne la fonction $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$.

a) Déterminer le domaine de $f(x)$, son ordonnée à l'origine, ses zéros et ses valeurs critiques par rapport à la dérivée première et à la dérivée seconde.

b) La fonction a-t-elle une asymptote verticale? Justifier.

c) La fonction a-t-elle une asymptote horizontale? Justifier.

d) Déterminer les points critiques de la fonction.

e) Compléter l'analyse de la fonction dans le tableau de la page suivante et esquisser le graphique de la fonction en indiquant les zéros et les points critiques.

5. a) Le domaine de la fonction est \mathbf{R} .

Zéros de la fonction :

$x^2 - 4 = 0$ à ± 2 et $x^2 - 1 = 0$ à ± 1 . La fonction coupe l'axe des x aux points $(-2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$ et $(2; 0)$.

L'ordonnée à l'origine est $f(0) = 4$.

La dérivée première est :

$$f'(x) = 2x(x^2 - 1) + (x^2 - 4)2x = 2x(2x^2 - 5).$$

Elle s'annule à $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{5/2} \approx \pm 1,58$.

La dérivée seconde est :

$$f''(x) = 2(2x^2 - 5) + 2x(4x) = 12x^2 - 10.$$

Elle s'annule à $x = \pm\sqrt{5/6} \approx \pm 0,91$.

b) La fonction n'a pas d'asymptote verticale, car c'est une fonction polynomiale. Elle n'a pas de dénominateur qui s'annule.

c) La fonction n'a pas d'asymptote horizontale, car c'est une fonction polynomiale. Ses limites à l'infini sont toujours infinies.

d) Les points critiques par rapport à la dérivée première sont :

$f(0) = 4$, c'est l'ordonnée à l'origine.

$$f(\sqrt{5/2}) = \left(\frac{5}{2} - 4\right)\left(\frac{5}{2} - 1\right) = \frac{-3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{-9}{4} = -2,25.$$

Puisque toutes les occurrences de x sont à un degré pair, on obtient la même image à $x = -\sqrt{5/2}$. On a donc les points :







$$(-\sqrt{5/2}; -9/4) \text{ et } (\sqrt{5/2}; -9/4).$$

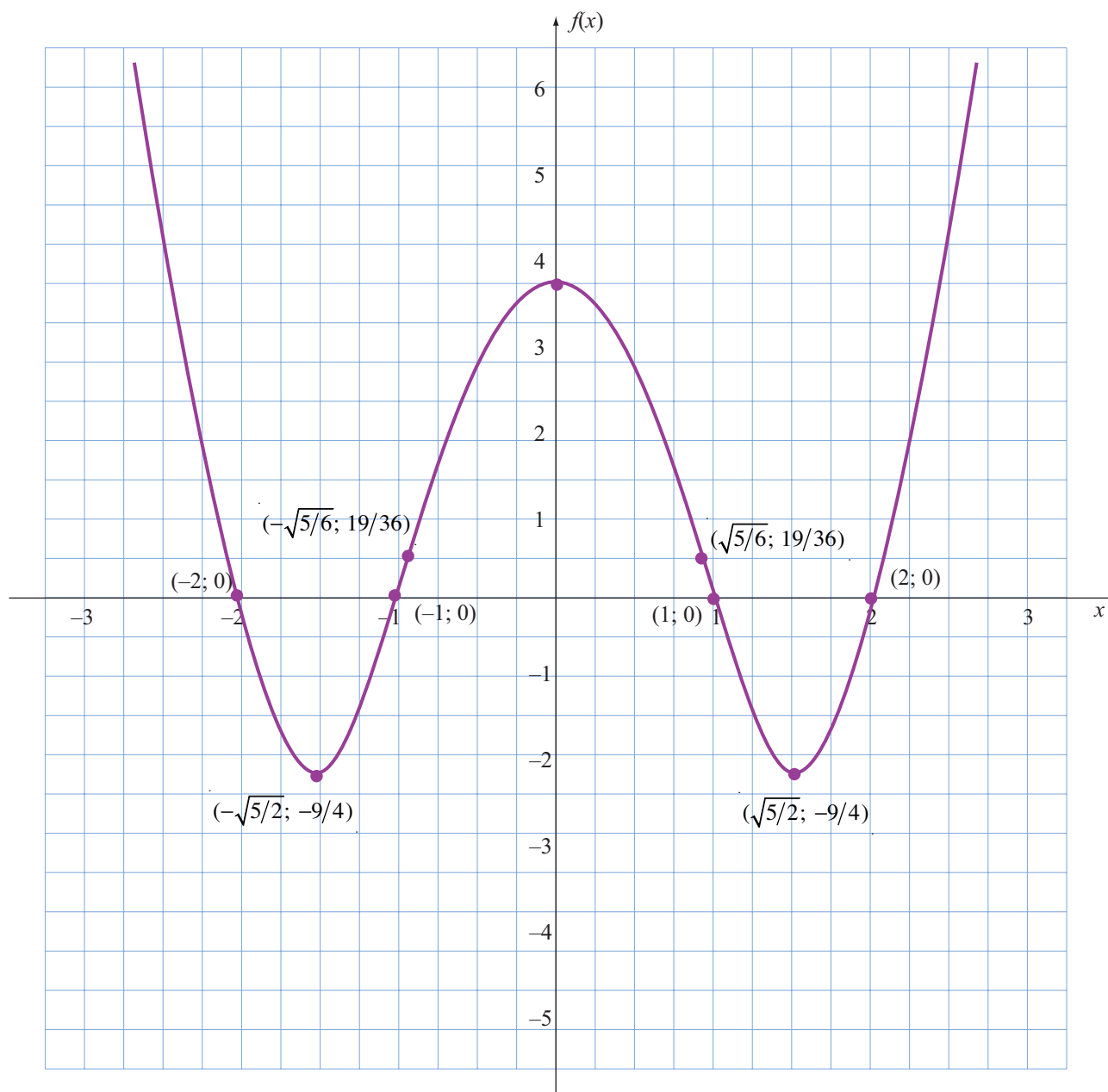
Les points critiques par rapport à la dérivée seconde sont :

$$f(\sqrt{5/6}) = \left(\frac{5}{6} - 4\right)\left(\frac{5}{6} - 1\right) = \frac{-19}{6} \times \frac{-1}{6} = \frac{19}{36} \approx 0,53.$$

Puisque toutes les occurrences de x sont à un degré pair, on obtient la même image à $x = -\sqrt{5/6}$. On a donc les points :

$$(-\sqrt{5/6}; 19/36) \text{ et } (\sqrt{5/6}; 19/36).$$

	$-\infty$	$-\sqrt{5/2}$	$-\sqrt{5/6}$	0	$\sqrt{5/6}$	$\sqrt{5/2}$	∞						
$f'(x)$		+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	0	-	-	-	-	0	-	-	
$f(x)$			$-9/4$		$-19/36$		4		$-19/36$		$-9/4$		
	$\infty \leftarrow$	min.		inf.		max.		inf.		min.		$\rightarrow \infty$	



6. On donne la fonction $f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x/2}$.

a) Déterminer le domaine de $f(x)$, son ordonnée à l'origine, ses zéros et ses valeurs critiques par rapport à la dérivée première et à la dérivée seconde.

b) La fonction a-t-elle une asymptote verticale? A-t-elle une asymptote horizontale? Justifier.

c) Déterminer les points critiques de la fonction.

e) Compléter l'analyse de la fonction dans le tableau de la page suivante et esquisser le graphique de la fonction en indiquant les zéros et les points critiques.

6. a) Le domaine de la fonction est \mathbf{R} .

Zéros de la fonction :

$x^2 - 2x = 0$ à $x = 0$ et à $x = 2$. La fonction coupe l'axe des x aux points $(0; 0)$ et $(2; 0)$.

L'ordonnée à l'origine est $f(0) = 4$.

La dérivée première est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^{-x/2} + (x^2-2x)e^{-x/2} \times \frac{-1}{2} \\ &= \frac{e^{-x/2}}{2}(4x-4) - (x^2-2x) \\ &= \frac{e^{-x/2}}{2}(-x^2+6x-4). \end{aligned}$$

Elle s'annule à :

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-16}}{-2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Les abscisses des points critiques par rapport à la dérivée première sont $\approx 0,76$ et $\approx 5,23$.

La dérivée seconde est :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^{-x/2}}{2} \times \frac{-1}{2} \times (-x^2+6x-4) + (-2x+6) \frac{e^{-x/2}}{2} \\ &= \frac{e^{-x/2}}{4} [-(-x^2+6x-4) + (-4x+12)] \\ &= \frac{e^{-x/2}}{4} (x^2-10x+16). \end{aligned}$$

Elle s'annule à :

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}.$$

Les abscisses des points critiques par rapport à la dérivée seconde sont 2 et 8.

b) La fonction n'a pas d'asymptote verticale car, aucune valeur de x ne donne une forme $k/0$.

La fonction a une asymptote horizontale à droite de l'axe des x car :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x)e^{-x/2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 2x)}{e^{x/2}} = 0.$$

$$\text{Cependant : } \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x^2 - 2x)e^{-x/2}) = \infty.$$

c) Les images des valeurs critiques par rapport à la dérivée première sont :







$$f(3-\sqrt{5}) \approx -0,64 \text{ et } f(3+\sqrt{5}) \approx 1,24.$$

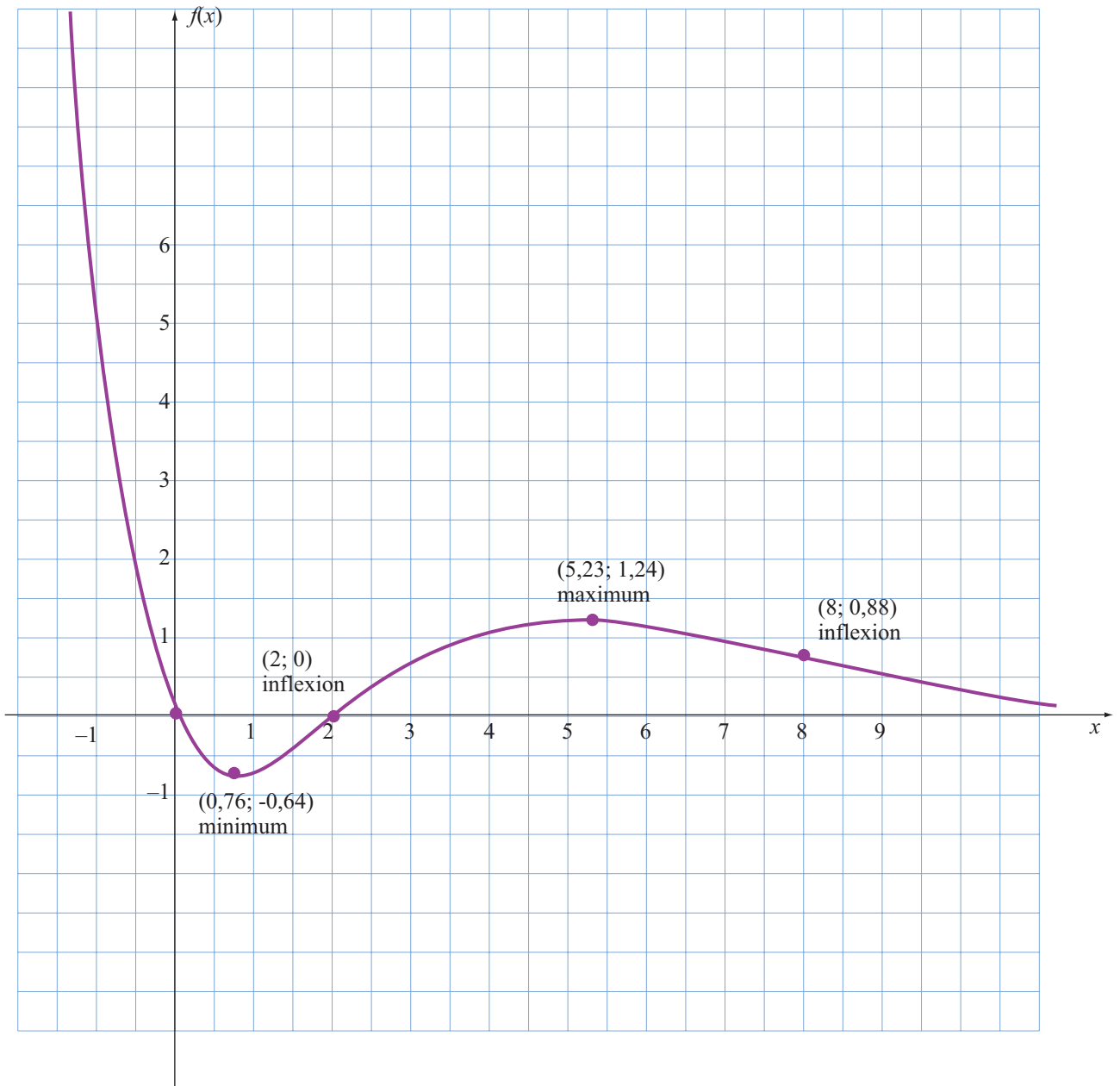
Les points sont $(0,76; -0,64)$ et $(5,23; 1,24)$.

Les images des valeurs critiques par rapport à la dérivée seconde sont :

$$f(2) = 0 \text{ et } f(8) = 48e^{-4} \approx 0,88.$$

Les points sont $(2; 0)$ et $(8; 0,88)$.

	$-\infty$		0		0,73		2		5,23		8		∞
$f'(x)$		-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	
$f''(x)$		+	+	+	0	-	0	-	0	-	0	-	
$f(x)$	$\infty \leftarrow$		0		-19/36		0		-19/36		-9/4		$\rightarrow 0$
			zéro		min.		zéro inf.		max.		inf.		



7. On donne la fonction $f(x)$ et ses dérivées première et seconde.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 1}{(x-1)^2}, f'(x) = \frac{4x-2}{(x-1)^3} \text{ et } f''(x) = \frac{-8x+2}{(x-1)^4}.$$

a) Déterminer le domaine de $f(x)$, son ordonnée à l'origine et les zéros de chacune de ces fonctions.

b) Évaluer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Quelle conclusion peut-on tirer de ces résultats?

c) Évaluer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Quelle conclusion peut-on tirer de ces résultats?

d) Déterminer les points critiques de la fonction.

7. a) Le domaine de la fonction est $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Zéros de la fonction :

$-2x^2 + 1 = 0$, d'où $x^2 = 1/2$ et $x = \pm\sqrt{2}/2$. Le graphique coupe l'axe des x à $(-\sqrt{2}/2; 0)$ et $(\sqrt{2}/2; 0)$.

L'ordonnée à l'origine est $f(0) = 1$.

La dérivée première s'annule à $x = 1/2$ et la dérivée seconde à $x = 1/4$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Que x s'approche de 1 par la gauche ou par la droite, le numérateur s'approche toujours de -1 et le dénominateur s'approche de 0^+ puisque le facteur $(x-1)$ du dénominateur est affecté d'un exposant pair. C'est le signe au numérateur qui permet de détecter le comportement à gauche et à droite, on obtient $-\infty$.

La fonction a une asymptote verticale à $x = 1$.







$$\begin{aligned} c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 1}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(-2 + 1/x^2)}{x^2(1 - 1/x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2 + 1/x^2)}{(1 - 1/x)^2} = \frac{-2 + 0}{(1 - 0)^2} = -2; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 1}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(-2 + 1/x^2)}{x^2(1 - 1/x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-2 + 1/x^2)}{(1 - 1/x)^2} = \frac{-2 + 0}{(1 - 0)^2} = -2. \end{aligned}$$

La fonction a une asymptote horizontale à $y = -2$.

d) Les seules valeurs critiques sont $1/2$ et $1/4$. Ce sont des zéros des fonctions dérivées. Ceux-ci indiquent les points critiques qui sont :

$$f(1/2) = \frac{-2\left(\frac{1}{4}\right) + 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{1/2}{(-1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2.$$

$$f(1/4) = \frac{-2\left(\frac{1}{16}\right) + 1}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} = \frac{7/8}{(-3/4)^2} = \frac{7/8}{9/16} = \frac{14}{9} \approx 1,56.$$

	$-\infty$		$-0,71$		$1/4$		$1/2$		$0,71$		1		∞
$f'(x)$		+	+	+	+	+	0	-	-	-	\neq	+	
$f''(x)$		+	+	+	0	-	-	-	-	-	\neq	-	
$f(x)$			0		$14/9$		2		0		\neq		
	a. h. $y = -2$				inf.		max.				a. v. $x = 1$		a. h. $y = -2$

