

Dérivée : fonctions composées

Solutions

05

Répondre dans les espaces libres en utilisant les notations appropriées.

- Quelle propriété de l'opérateur de dérivation utilise-t-on pour dériver par rapport à x une fonction composée dont la fonction extérieure est $y = f(u)$ et dont la fonction intérieure est $u = g(x)$?
- Déterminer la forme de la fonction extérieure et celle de la fonction intérieure des fonctions composées suivantes puis, dériver chacune des fonctions et donner la dérivée de la fonction composée.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$.

b) $f(x) = e^{\sin x}$

- En appliquant la procédure de dérivation en chaîne, dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{\cos^2 x}$

b) $f(x) = \sin^2(3x^3)$

1. La dérivée est obtenue par : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$.

2. a) La dérivée extérieure est de la forme $y = u^{1/3}$ et la fonction intérieure est de la forme $u = x^3 - 2x$.

La dérivée de la fonction extérieure est :

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3} u^{-2/3} = \frac{1}{3u^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2}}$$

Celle de la fonction intérieure est :

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 2.$$

D'où l'on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{3x^2 - 2}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2}}$$

- b) La dérivée extérieure est de la forme $y = e^u$ et la fonction intérieure est de la forme $u = \sin x$.

On trouve :

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(e^u) = e^u = e^{\sin x} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

$$\text{D'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^{\sin x} \cos x.$$

3. a) $f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{\cos^2 x}) = e^{\cos^2 x} \frac{d}{dx}(\cos^2 x)$

$$= e^{\cos^2 x} \times 2 \cos x \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= e^{\cos^2 x} \times 2 \cos x \sin x = e^{\cos^2 x} \sin 2x.$$

b) $f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin^2(3x^3)) = 2 \sin(3x^3) \frac{d}{dx}(\sin(3x^3))$

$$= 2 \sin(3x^3) \cos(3x^3) \frac{d}{dx}(3x^3)$$

$$= 2 \sin(3x^3) \cos(3x^3) \times 9x^2 = 9x^2 \sin(6x^3).$$

4. En quel(s) point(s) la courbe d'équation $y = 8x\sqrt{1-x^2}$ admet-elle une tangente horizontale?

5. La position s , en mètres, au temps t secondes d'un objet se déplaçant en ligne droite est donnée par :

$$s(t) = \sin(\pi t^2).$$

Trouver l'accélération instantanée de l'objet au temps $t = 1$ s.

6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point indiqué.

a) $3x^2y - y^3 = 11$ au point $(2; 1)$.

4. C'est la dérivée d'un produit et l'une des fonctions de ce produit est composée.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(8x\sqrt{1-x^2}) = \frac{d}{dx}(3x(1-x^2)^{1/2}) \\ &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}(8x) + 8x \frac{d}{dx}((1-x^2)^{1/2}) \\ &= (1-x^2)^{1/2} \times 8 + 8x \times \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(1-x^2) \\ &= (1-x^2)^{1/2} \times 8 + 8x \times \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \times -2x \\ &= 8\sqrt{1-x^2} - \frac{8x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{8(1-x^2) - 8x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{8-16x^2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

La dérivée s'annule à $8 - 16x^2 = 0$, d'où $x = \pm\sqrt{2}/2$.

En substituant dans la fonction, on obtient que les points sont : $(-\sqrt{2}/2; -4)$ et $(\sqrt{2}/2; 4)$.

5. L'accélération est donnée par la dérivée seconde de la fonction décrivant la position.

$$\begin{aligned} s'(t) &= \frac{d}{dt}(\sin \pi t^2) = \cos \pi t^2 \frac{d}{dt}(\pi t^2) \\ &= \cos \pi t^2 \times 2\pi t = 2\pi t \cos \pi t^2 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

La dérivée première est un produit de deux fonctions.

En dérivant à nouveau, on obtient :

$$\begin{aligned} s''(t) &= \cos \pi t^2 \frac{d}{dt}(2\pi t) + 2\pi t \frac{d}{dt}(\cos \pi t^2) \\ &= \cos \pi t^2 \times 2\pi + 2\pi t \times (-\sin \pi t^2) \frac{d}{dt}(\pi t^2) \\ &= \cos \pi t^2 \times 2\pi + 2\pi t \times (-\sin \pi t^2) \times 2\pi t \\ &= 2\pi \cos \pi t^2 - 4\pi^2 t^2 \sin \pi t^2 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

L'accélération au temps $t = 1$ est alors :

$$\begin{aligned} s''(1) &= 2\pi \cos \pi - 4\pi^2 \sin(\pi) \text{ cm/s}^2 \\ &= 2\pi \times -1 = 4\pi^2 \times 0 \text{ cm/s}^2 = -2\pi \text{ cm/s}^2. \end{aligned}$$

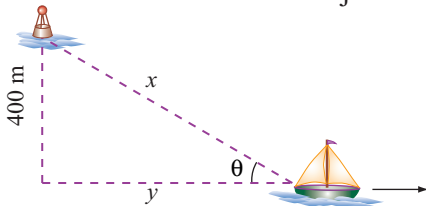
6. a) En dérivant implicitement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3x^2y - y^3) &= \frac{d}{dx}(11) \\ \frac{d}{dx}(3x^2y) - \frac{d}{dx}(y^3) &= 0 \\ 6xy + 3x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

En isolant dy/dx , on obtient :

b) $e^{xy} = \ln y$ au point $(0; e)$.

7. Un voilier naviguant en ligne droite vient de passer une bouée située à 400 m de sa trajectoire.



- a) Si le voilier se déplace à la vitesse de 6 m/s, calculer le taux de variation de la distance entre le voilier et la bouée, 50 secondes plus tard.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6xy}{3x^2 - 3y^2}.$$

La taux de variation en $(2; 1)$ est :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2; 1)} = \frac{12}{12 - 3} = \frac{4}{3}.$$

La tangente est la droite de pente $4/3$ passant par le point $(2; 1)$, soit :

$$y = \frac{4x}{3} - \frac{5}{3}.$$

- b) En dérivant implicitement, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(e^{xy}) = \frac{d}{dx}(\ln y)$$

$$e^{xy} \frac{d}{dx}(xy) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$ye^{xy} + xe^{xy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

En isolant dy/dx , on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 e^{xy}}{xye^{xy} - 1}.$$

La taux de variation en $(2; 1)$ est :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0; e)} = \frac{-e^2 e^{0 \times e}}{0 \times e \times e^{0 \times e} - 1} = \frac{-e^2}{-1} = e^2.$$

La tangente est la droite de pente e^2 passant par le point $(0; e)$, soit : $y = e^2 x + e$.

7. a) On donne $dy/dt = 6$ m/s et on cherche $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=50}$.

On détermine la relation entre les variables en appliquant le théorème de Pythagore. Cela donne :

$x^2 = 400 + y^2$. En dérivant implicitement, on obtient la relation entre les taux de variation.

$$\frac{d}{dt}(x^2) = \frac{d}{dt}(400 + y^2)$$

$$2x \frac{dx}{dt} = 2y \frac{dy}{dt}.$$

En isolant dx/dt , on obtient : $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$.

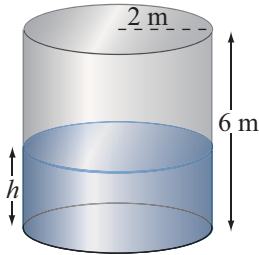
Pour évaluer le taux de variation, il faut connaître

x et y au temps $t = 50$ s. Or, $y = \frac{dy}{dt} \times t$ et puisque $dy/dt = 6$ m/s, on a :

$y|_{t=50} = 6 \text{ m/s} \times 50 \text{ s} = 300 \text{ m}$. En substituant cette valeur dans $x^2 = 400 + y^2$, on obtient $x = 500 \text{ m}$.

- b) Si l'angle d'observation entre la direction du voilier et la bouée diminue de 0,01 rad/s, calculer le taux de variation de la distance entre le bateau et bouée par rapport au temps t , lorsque $\theta = 30^\circ$.

8. On verse un liquide dans un réservoir de forme cylindrique dont le rayon est de 2 mètres et la hauteur est de 6 mètres. Si le liquide est versé à un taux de $3 \text{ m}^3/\text{min}$.



- a) Déterminer à quel taux la hauteur du liquide s'élève dans le réservoir et le temps nécessaire pour remplir le réservoir.
- b) Quel devrait être le débit pour que le niveau s'élève de $0,4 \text{ m}/\text{min}$?

On trouve donc :

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=50} = \frac{300 \text{ m}}{500 \text{ m}} \times 6 \text{ m/s} = \frac{18}{5} \text{ m/s} = 3,6 \text{ m/s}.$$

- b) On donne $\frac{d\theta}{dt} = -0,01 \text{ rad/s}$ et on cherche $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta=30^\circ}$. Les variables à considérer sont x et θ .

On peut établir la relation entre les variables par le sinus de l'angle qui donne : $x \sin \theta = 400$. En dérivant implicitement, on a :

$$\frac{dx}{dt} \sin \theta + x \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = 0, \text{ d'où } \frac{dx}{dt} = \frac{-x \cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Lorsque $\theta = 30^\circ$, on a :

$$x = \frac{400}{\sin 30^\circ} = \frac{400}{1/2} = 800 \text{ m}.$$

En substituant :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta=30^\circ} &= \frac{-800 \text{ m} \times \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \times -0,01 \text{ rad/s} \\ &= \frac{-800 \times \sqrt{3}/2}{1/2} \times -0,01 = 8\sqrt{3} \text{ m/s}. \end{aligned}$$

8. a) Le liquide occupe un volume de forme cylindrique de hauteur h et de rayon de 2 m. Le volume d'un cylindre est : $V = \pi r^2 h$ et, puisque le rayon du volume occupé par le liquide est constant, ce volume est : $V = 4\pi h$. En dérivant, on obtient la relation entre les taux de variation, soit :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt}, \text{ d'où l'on tire : } \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dt}.$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi \text{ m}^2} \times 3 \text{ m}^3/\text{min} = \frac{3}{4\pi} \text{ m}/\text{min}.$$

Pour connaître le temps nécessaire pour emplir le réservoir, on peut diviser le volume par son taux de variation ou encore la hauteur par son taux de variation. Cela donne :

$$t = \frac{V}{dV/dt} = \frac{24\pi \text{ m}^3}{3 \text{ m}^3/\text{min}} = 8\pi \text{ min}.$$

$$t = \frac{h}{dh/dt} = \frac{6 \text{ m}}{3/4\pi \text{ m}/\text{min}} = \frac{6 \times 4\pi}{3} \text{ min} = 8\pi \text{ min}.$$

- b) Le débit devrait être de :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt} = 4\pi \text{ m}^2 \times 0,4 \text{ m}/\text{min} = 1,6\pi \text{ m}^3/\text{min}.$$